Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 130–133

С. И. Сенашов, Н. Д. Дудинова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА СИСТЕМ ТРЕХМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика Решетнева

Аннотация. Для общего случая статически определимой системы уравнений предельного состояния выписываются уравнения характеристических поверхностей. В качестве примера рассмотрим общий случай плоской задачи теории идеальной пластичности.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, предельное состояние, задача Коши, характеристические поверхности, плоская задача.

УДК: 539.375

Постановка задачи. Рассмотрим трехмерные статически определенные уравнения идеальной пластичности [1,18].

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0,\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}f^1\left(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}\right)=0,\\ f^2\left(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}\right)=0,\\ f^3\left(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}\right)=0,\end{gathered}\tag{2}$$

где $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$ - компоненты тензора напряжений, f^1,f^2,f^3 – некоторые гладкие функции.

Определим тип системы (1) – (2). Для этого поставим задачу Коши, которая сводится к заданию функций $\sigma_x,\tau_{xy},\tau_{xz}$ на поверхности $\omega^1(x,y,z)=0$.

Введем новые переменные по формулам

$$x' = \omega^1(x,y,z),\quad y' = \omega^2(x,y,z),\quad z' = \omega^3(x,y,z),\tag{3}$$

где поверхности ω^2 и ω^3 введены таким образом, чтобы система (3) была разрешима относительно переменных x,y,z.

Вычислим производные по новым переменным и подставим эти соотношения в уравнения (1), получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial z}+...=0,\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial z}+...=0,\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial x'}\frac{\partial\omega^1}{\partial z}+...=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Теперь продифференцируем уравнение (2) по переменным x, y, z. Получим

Поступила 02.03.2009

$$\begin{array}{l} f`^i_1 \frac{\partial\sigma_x}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_2 \frac{\partial\sigma_y}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_3 \frac{\partial\sigma_z}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_4 \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_5 \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_6 \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + ... = 0, \\ f`^i_1 \frac{\partial\sigma_x}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_2 \frac{\partial\sigma_y}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_3 \frac{\partial\sigma_z}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_4 \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_5 \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_6 \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + ... = 0, \\ f`^i_1 \frac{\partial\sigma_x}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_2 \frac{\partial\sigma_y}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_3 \frac{\partial\sigma_z}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_4 \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_5 \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_6 \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + ... = 0 \end{array} \quad (5)$$

где $f`^i_1 = \frac{\partial f^i}{\partial\sigma_x}$, $f`^i_2 = \frac{\partial f^i}{\partial\sigma_y}$, $f`^i_3 = \frac{\partial f^i}{\partial\sigma_z}$ и т. д.

Задача Коши для системы (1) - (2) разрешима в том случае если из уравнений (4),(5) мы можем однозначно выразить производные $\frac{\partial\sigma_x}{\partial x`}, \frac{\partial\sigma_y}{\partial x`}, \frac{\partial\sigma_z}{\partial x`}, \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}, \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}, \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}$.

Система (1) – (2) в новых переменных имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + ... = 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + ... = 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + ... = 0, \\ f`^i_1 \frac{\partial\sigma_x}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_2 \frac{\partial\sigma_y}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_3 \frac{\partial\sigma_z}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_4 \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_5 \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + f`^i_6 \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial x} + ... = 0, \\ f`^i_1 \frac{\partial\sigma_x}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_2 \frac{\partial\sigma_y}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_3 \frac{\partial\sigma_z}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_4 \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_5 \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + f`^i_6 \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial y} + ... = 0, \\ f`^i_1 \frac{\partial\sigma_x}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_2 \frac{\partial\sigma_y}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_3 \frac{\partial\sigma_z}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_4 \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_5 \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + f`^i_6 \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x`}\frac{\partial\omega^1}{\partial z} + ... = 0, \end{array}\right.$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

где $f`^i_1 = \frac{\partial f^i}{\partial\sigma_x}$, $f`^i_2 = \frac{\partial f^i}{\partial\sigma_y}$, $f`^i_3 = \frac{\partial f^i}{\partial\sigma_z}$ и т. д.

В системе (4) - (5) последние 6 уравнений есть линейная комбинация предыдущих, поэтому их можно исключить. Окончательно получаем: задача Коши не может быть решена, если определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & \frac{\partial\omega^1}{\partial y} & \frac{\partial\omega^1}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial\omega^1}{\partial y} & \frac{\partial\omega^1}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial\omega^1}{\partial y} & \frac{\partial\omega^1}{\partial z} \\ f`^1_1 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^1_2 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^1_3 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^1_4 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^1_5 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^1_6 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} \\ f`^2_1 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^2_2 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^2_3 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^2_4 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^2_5 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^2_6 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} \\ f`^3_1 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^3_2 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^3_3 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^3_4 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^3_5 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} & f`^3_6 \frac{\partial\omega^1}{\partial x} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) определяет характеристическую поверхность для системы (1)-(2).

Замечание: Эта задача без труда может быть обобщена для случая $m-s$ квазилинейных дифференциальных уравнений и s конечных соотношений [2,45]

Проиллюстрируем метод на примере системы дифференциальных уравнений, содержащей одно конечное соотношение.

Рассмотрим двумерные уравнения теории пластичности с общим условием текучести

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0, \end{array}\right. \quad (7)$$

$$f\,(u, v) = 0, \quad (8)$$

где $u = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\cdot\tau^2$, $v = \sigma_x - \sigma_y$; σ_x, σ_y, τ - компоненты тензора напряжений, f – некоторая гладкая функция.

Для системы (7) – (8) поставим задачу Коши, которая сводится к заданию функций σ_x, σ_y на некоторой кривой $\omega^1(x, y) = 0$.

Введем новые переменные

$$x` = \omega^1\,(x, y)\,, \quad y` = \omega^2\,(x, y)\,, \quad (9)$$

где функция ω^2 выбрана так, чтобы систему (9) можно было разрешить относительно переменных x, y.

Система (7)-(8) в новых переменных имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} = 0, \\ f_1' \Big[2 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) - 2 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) + \\ +8\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) \Big] + f_2' \Big[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) \Big] = 0, \\ f_1' \Big[2 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) - 2 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) + \\ +\, 8\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) \Big] + f_2' \Big[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) \Big] = 0, \end{cases}$$

где $f'_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$, $f'_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$.

Заметим, что два последних уравнения системы линейно зависимые, что позволяет нам отбросить одно из двух последних уравнений системы.

Задача Коши для системы (7)-(8) разрешима в том случае, если из системы можно однозначно выразить производные $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'}$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'}$, $\frac{\partial \tau}{\partial x'}$.

Составляем определитель Δ из коэффициентов системы при производных $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'}$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'}$, $\frac{\partial \tau}{\partial x'}$ и приравниваем его к нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \omega^1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \omega^1}{\partial y} & \frac{\partial \omega^1}{\partial x} \\ 2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + f_2' \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & -2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} - f_2' \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & 8f_1' \cdot \tau \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$8f_1' \cdot \tau \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \omega^1}{\partial y} \right)^2 \cdot (2f_1' (\sigma_x - \sigma_y) + f_2') + \left(\frac{\partial \omega^1}{\partial x} \right)^2 \cdot (2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f_2') = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial \omega^1}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \omega^1}{\partial y} = -\frac{dy}{dx}$, получим уравнения характеристик в традиционной форме

$$-8f_1' \cdot \tau \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \cdot (2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f_2') - (2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f_2') = 0. \tag{11}$$

Разрешим уравнение (1) относительно $\frac{dy}{dx}$

$$(2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f_2') \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 8f_1' \cdot \tau \cdot \frac{dy}{dx} - (2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f_2') = 0.$$

Получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8f_1' \cdot \tau \pm \sqrt{D}}{2\,(2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f_2')},$$

где

$$D = (-8f_1' \cdot \tau)^2 + 4\,(2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f_2')\,(2f_1' \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f_2')\,.$$

Если

D$>$0 – система гиперболического типа,

D=0 – система параболического типа ,

D$<$0 – система эллиптического типа .

ЛИТЕРАТУРА

[1]*Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 701 с.

[2]*Дудинова, Н. Д.* Определение типа систем дифференциальных уравнений, содержащих конечные соотношения / Н. Д. Дудинова, С. И. Сенашов // Материалы научной конференции «Герценовские чтения» (16-21 апреля, г. СПб.) : РГПУ. - СПб. , 2007. - 45 с.

[3]*Смирнов, В. И.* Курс высшей математики / В. И. Смирнов - М. : Наука, 1981. - Т. 4, ч. 2. - 550 с.

S. I. Senashov, N. D. Dudinova

THE DEFINITION OF THE THREE-DIMENSIONAL STATICALLY DEFINED EQUATIONS SYSTEM TYPE OF IDEAL PLASTICITY

Reshetnev Siberian State Aerospace University

Abstract. Characteristic surfaces equations are given for statically defined limiting state equations system. We shall consider a general case of ideal plasticity theory plane problem.

Keywords: tension, plasticity, limiting state, Cauchy problem, characteristic surfaces, plane problem.

Сенашов Сергей Иванович

доктор физико-математических наук, профессор Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика Решетнева, г. Красноярск

e-mail: senashov@mail.kgtei.ru

Дудинова Наталья Дмитриевна

ассистент кафедры Высшей математики Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика Решетнева, г. Красноярск

e-mail: dnd22@rambler.ru

Senashov Sergey Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

Dudinova Nataliya Dmitrievna

Assistant, Department of Higher Mathematics, Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk