

Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев

К 80-ЛЕТИЮ Д.Д. ИВЛЕВА

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Московский городской университет управления Правительства Москвы

Самарский государственный университет

6 сентября 2010 г. исполняется 80 лет Дюису Даниловичу Ивлеву — доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации. Д.Д. Ивлеву принадлежит свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе семь монографий. Его вклад в математическую теорию пластичности и механику деформируемого твердого тела с полным правом можно назвать выдающимся. Д.Д. Ивлев — основатель и руководитель научной школы механики идеально пластических тел и конструкций, базирующейся в университетских и академических центрах Воронежа, Самары, Владивостока, Чебоксар. Огромная часть научной и педагогической деятельности Д.Д. Ивлева связана с подготовкой кадров высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела. В настоящее время в рамках возглавляемой им научной школы работает свыше 20 докторов и более 100 кандидатов наук. Главное в творческой деятельности Д.Д. Ивлева — бескомпромиссное служение научной истине и неустанный поиск на самых передовых рубежах современной науки. 55 лет его научной и общественной деятельности, выдающиеся научные достижения позволяют причислить Д.Д. Ивлева к категории мыслителей, являющихся национальным достоянием России.

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в г. Чебоксары в семье преподавателя Чувашского Педагогического института Ивлева Данила Осиповича. В августе 1941 года Ивлев Д. О. был призван в ряды Красной Армии, среди его правительственных наград медаль “За взятие Берлина”.

После окончания средней школы в 1948 г. Д.Д. Ивлев покидает Чебоксары и поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который заканчивает в 1953 г. В 1956 г., после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ, он успешно защитил диссертацию “Приближенное решение упруго-пластических задач методом малого параметра” в совете при МГУ (оппонентами по этой работе выступили В.В. Соколовский и Г.С. Шапиро; председательствовал на защите Ю.Н. Работнов) и получил ученую степень кандидата физико-математических наук. С февраля 1957 г. по октябрь 1958 г. он работает в должности младшего научного сотрудника Института механики АН СССР. В 1959 г., после защиты диссертационной работы “Пространственная задача теории идеальной пластичности”, которая также представлялась в совет при МГУ, Д.Д. Ивлев получает

степень доктора физико-математических наук. Оппонентами по докторской диссертационной работе выступили Л.А. Галин, Л.М. Качанов и Г.С. Шапиро, председательствовал на защите А. Ю. Ишлинский.

В октябре 1959 г. Д.Д. Ивлев, будучи 29-летним доктором физико-математических наук и уже достаточно широко известным ученым в области математической теории пластичности по приглашению ректора Воронежского университета Б.И. Михантьева приезжает в г. Воронеж. В декабре 1959 г. Д.Д. Ивлев возглавил созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок активизировать научную и педагогическую работу. Лекции и научные семинары под руководством профессора Д.Д. Ивлева отличались способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. В 60-е годы в Воронежском государственном университете на математико-механическом факультете Д.Д. Ивлев работал вместе с профессорами М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, В.И. Соболевым. Творческое взаимодействие механиков и математиков Воронежского университета было заложено именно в те годы. Созданная Д.Д. Ивлевым воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые в те годы научные исследования были связаны с рядом фундаментальных и прикладных проблемам механики сплошных деформируемых сред. Работы Д.Д. Ивлева и его учеников постоянно были в фокусе внимания ученых как нашей страны, так и за ее пределами; их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным и ощущается до сих пор. В 1961 г. Д.Д. Ивлеву было присвоено ученое звание профессора. Под руководством профессора Д.Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР.

Параллельно с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в ВГУ профессор Д.Д. Ивлев в течение ряда лет заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, куда его пригласил ректор В.С. Постников. В эти же годы Д.Д. Ивлев по предложению ректора Л.Н. Талова читает лекции в Воронежском педагогическом институте. Следует отметить, что уже в годы работы в Воронежском университете началось сотрудничество Д.Д. Ивлева с одним из своих аспирантов — Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды — научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Одним из талантливых учеников Д.Д. Ивлева тех лет также был В.В. Дудукаленко. Г.И. Быковцев стал первым деканом нового факультета — прикладной математики и механики, возглавил созданную им кафедру технической кибернетики и теории автоматического регулирования. Через несколько лет, после известных событий, связанных с абсолютно несправедливыми и неприемлемыми обвинениями, выдвинутыми против его научной и педагогической деятельности,¹ Геннадий Иванович возглавил кафедру механики деформируемого твердого тела в Куйбышевском (Самарском) государственном университете. С избранными научными статьями Г.И. Быковцева заинтересованный читатель может познакомиться по книге: Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сб. ст. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

¹Оценка этих событий имеется в статье: Яровой Г.П., Радаев Ю.Н. К 70-летию Г.И. Быковцева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №9/1(59). 2007. С. 9-30.

В 1966 г. Д.Д. Ивлев возвращается в Москву, где сначала работает профессором МВТУ им. Н.Э. Баумана (1966–1970 гг.) и заведует кафедрой высшей математики, а затем (1971–1982 гг.) — заведующим кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном политехническом институте (сейчас Московский государственный открытый университет). Вместе со своими учениками профессорами Г.И. Быковцевым и И.А. Бережным параллельно он активно участвует в создании научной школы механики деформируемого твердого тела в г. Куйбышеве.

В 1982 г. Д.Д. Ивлев приезжает на родину в г. Чебоксары, где в период с 1982 г. по 1993 г. работает сначала заведующим кафедрой математического анализа, а затем — заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела в Чувашском государственном университете им. И.Н. Ульянова. В 1985–1993 гг. он является деканом физико-математического факультета. В 1993 г. Д.Д. Ивлев переходит на работу в в Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, где в настоящее время заведует кафедрой математического анализа.

Работы Д.Д. Ивлева посвящены механике деформируемого тела, в основном математической теории пластичности.² Ряд результатов Д.Д. Ивлева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела. Далее нам представляется уместным дать необходимые сведения о развитии математической теории пластичности и ее современном состоянии.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (В. Saint-Venant, 1870 г.) [1], [2] на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска (Н. Tresca). Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения k . Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе "О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре" [3], представленной во Французскую Академию наук в 1773 г. В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по некоторой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скальванию по этой плоскости.

Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье—Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния и поэтому его теория

²Среди них семь монографий: "Теория идеальной пластичности" (1966); "Теория упрочняющегося пластического тела" (в соавторстве с Г.И. Быковцевым, 1971); "Метод возмущений в теории упруго-пластического тела" (в соавторстве с Л.В. Ершовым, 1978); "Теория пластичности" (в соавторстве с Г.И. Быковцевым, 1998); "Математическая теория пластичности" (в соавторстве с А.Ю. Ишлинским, 2001); фундаментальная двухтомная монография "Механика пластических сред" (2001, 2002); "Предельное состояние деформируемых тел и горных пород" (в соавторстве с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным, Ю.Н. Радаевым, С.И. Сенашевым, Е.И. Шемякиным, 2008).

нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (M. Levy, 1871 г.) [4]. Статьи Сен-Венана и Леви появились одна за другой в *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона—Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций.³ Теория Леви, поскольку она основана на "неассоциированном" законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга.⁴

Соотношения Сен-Венана для плоской пластической деформации — статически определяемая система уравнений гиперболического типа, что и позволило позднее развить теорию полей скольжения, связываемую обычно с именами Генки (H. Hencky, 1923 г.) и Гейрингер (H. Geiringer, 1930 г.). Математический аппарат, соответствующий соотношениями Сен-Венана для плоской задачи, оказался, таким образом, вполне адекватным экспериментальным и теоретическим представлениям о течении идеально пластического тела. Заметим, что уравнения теории плоского напряженного состояния (в отличие от случая плоской деформации) не могут быть получены как частный случай пространственных уравнений.

Уравнения пространственной задачи математической теории пластичности длительное время оставались неизученными. И в настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния. Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения. "Задачи трехмерного пластического течения трудны и мало изучены". Так сформулировано отношение к вопросам пространственной задачи математической теории пластичности авторов известной обзорной статьи: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности / В кн.: *Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела.* М.: Наука, 1972. С. 79-118.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви—Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболически. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории

³В настоящее время закон течения, устанавливающий пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций, называют законом Леви—Мизеса.

⁴Об этом ярко свидетельствуют работы: Михлин С.Г. Основные уравнения математической теории пластичности. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. 71 с.; Христианович С.А., Михлин С.Г., Девисон Б.Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды: Неустановившееся движение в каналах и реках. Математическая теория пластичности. Движение грунтовых вод / Изд-во АН СССР. Математический институт им. В.А. Стеклова; Под ред. Н.Е. Кочина. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. 407 с. (См. ч. II: С.Г. Михлин. Математическая теория пластичности. С. 157-218. Здесь на с. 163 приводятся пространственные уравнения Леви.)

идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [5], с. 144-146). Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптически (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви—Мизеса, действительные характеристики отсутствуют.⁵ Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования (см. [6]– [11]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения.

Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Кулона—Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние, и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов.⁶ Фигуры

⁵Как представляется, задача поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона—Треска, для огромного большинства пространственных состояний уравнения теории пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Не спасает положения учет упругих деформаций и различных гипотез упрочнения. Все равно для абсолютного большинства пространственных состояний соответствующие уравнения эллиптически. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругоупругих деформаций, и для редко применяемых в настоящее время "неассоциированных" законов пластического течения.

⁶Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д.К. Чернов оставался вне поля зрения официальной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Жизнь, научное творчество и практическая инженерная деятельность Д.К. Чернова подробно освещены в книге: Д.К. Чернов и наука о металлах. (Под ред. акад. Н.Т. Гудцова.) М., Л.: Металлургиздат, 1950. 564 с. В это издание включены основные научные труды этого выдающегося

скольжения, которые наблюдались Д.К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся в известной монографии: Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1952. 556 с. (см. с. 103). Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. В начальный период развития теории пластичности при изучении пластического течения широко использовались представления о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия.⁷ В предисловии мы уже говорили о соответствии между изменениями в структуре сильно деформированных металлов и при формации горных пород, отмечаемыми и описываемыми в петрографии. Поэтому теория линий скольжения в руках геологов может служить средством расшифровки процессов образования горных цепей и континентальных плато, восстановления истории движения земной коры (в том числе и ее континентальной части).⁸ Таким образом, теория скольжения находит свое подтверждение на двух существенно отличающихся масштабных уровнях.

К настоящему времени уже стало ясно, что предельные состояния твердых тел должны так же описываться статически определенными уравнениями гиперболического типа.⁹ Теория предельного состояния первоначально развивалась в рамках механики сыпучих сред. Основоположник теории К. Кулон сформулировал (1773 г.) основные положения теории предельного состояния и ввел представление о поверхности сползания, которые были применены для решения ряда важных прикладных задач. Систематическое изложение теории предельного состояния сыпучих сред на основе представления о сетке скольжения было дано В.В. Соколовским в 1942 г. (см.: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 208 с.; третье издание: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 244 с.). Теории предельного состояния и идеальной пластичности, таким образом, имеют общие основы, однако они далеко не тождественны. Теория идеальной пластичности основана на представлении об условии пластичности, которое, вообще говоря, может приводить либо к статически определенным, либо к статически неопределенным состояниям. Теория предельного состояния в качестве своего предмета исследования берет лишь статически определенные состояния, которые могут быть достигнуты, скажем, при пропорциональном возрастании внешних нагрузок. Для предельного состояния все "предыдущие" свойства материала не играют никакой роли, поскольку предельное состояние определяется из замкнутой системы формально статически определенных соотношений, не имеющих ничего общего с допредельным поведением тела.

ученого. Его научная биография опубликована также в книге: Гумилевский Л.И. Чернов. (Научн. ред. проф. И.Я. Конфедератов.) М.: Молодая гвардия, 1975. 208 с.

⁷В настоящее время более эффективными являются прямой конечно-разностный численный анализ.

⁸Применение математической теории пластичности и концепции скольжения к задачам геологии и геофизики читатель может найти в монографиях: Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.; Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Изд-во Мир, 1969. 864 с.

⁹См.: Ивлев Д.Д. Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. №5(39). С. 33-41.

Экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Кулона—Треска.¹⁰ Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится, тем более, что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текучести от условия Кулона—Треска. Тем не менее, можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытными данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов до конца не удастся. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т.е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Кулона—Треска. Таким образом, критерий текучести Кулона—Треска, по-видимому, действительно лучше, чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т.е. большего соответствия условия Кулона—Треска физике пластической деформации, высказывались многие авторы.¹¹

Итак, формально статически определяемая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности. Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (А. Нааг, Th. von Karman) выдвинули условие "полной пластичности" [13], которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска,¹² и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определяемыми.

В 1923 г. Генки (Н. Hencky) [14] предложил использовать условие полной пластичности Хаара—Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определяемой системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона—Треска исследовались Р. Шилдом (R. T. Shield) [15]

¹⁰См., например, [?], с. 55, 57; [?], с. 29-34. Обычно при этом указывают на экспериментальные данные А. Надаи (A. Nadai) и Лоде (W. Lode, 1928 г.). Именно в результате выполненных ими в Геттингене при участии Прандтля экспериментов и был сделан вывод о предпочтительности условия пластичности Мизеса. *В опытах Надаи и Лоде окончательно установлено условие пластичности Мизеса, причем показано его преимущество перед условием наибольших касательных напряжений.* (Цит. по: Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. С. 57.) Имеется перевод оригинальной работы Лоде: Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов: Сб. ст.// Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 168-205.

¹¹Дискуссия по этому поводу имеется на с. 86, 87 упомянутой выше обзорной статьи А.А. Вакуленко и Л.М. Качанова.

¹²Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Кулона—Треска и соответствует ребру призмы Кулона—Треска. Ясно, что состояние полной пластичности может быть описано также в рамках условия пластичности Мизеса. Однако в этом случае ассоциированный с условием пластичности Мизеса закон течения приводит к неправильно определенной системе кинематических уравнений.

для ребер и граней призмы Кулона—Треска. Осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Кулона—Треска, были построены Р. Шилдом (R.T. Shield) в той же самой работе [15]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [16] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности Хаара—Кармана, доказав статическую определенность и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А.Ю. Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла, полагавшего, что "такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара—Кармана для металлов физически нереальна и она вводит ошибку неизвестной величины" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 321). Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви—Мизеса определить связанного с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании гипотезы Хаара—Кармана и замене закона течения Леви—Мизеса на *обобщенный* ассоциированный с условием пластичности Кулона—Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара—Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [17], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций,¹³ следующие из *обобщенного* ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые, в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи *двух* условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров [22]. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: "Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение $2k$. Таким образом для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение." Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от "неассоциированного" определяющего закона Леви [4] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана

¹³А.Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

[1], [2] на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [18], [19], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара—Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона—Треска) и *обобщенный* ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в *регулярных* точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T. Koiter) в 1953 г.¹⁴ Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

В работах Д.Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определенными и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска, также гиперболически и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения.¹⁵

¹⁴Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface// Quart. Appl. Math. V. 11. №3. 1953. P. 350-354.

¹⁵Этот результат был получен в работе [20]. Классическое изложение теории пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, имеется в монографии [11], с. 205-246.

Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определимых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности "продиктованы скорее заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса" (см.: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 100). Тем не менее они замечают, что решения, полученные по схеме полной пластичности, могут иметь несомненный интерес, полемизируя при этом с Р. Хиллом, критически оценившим условие полной пластичности Хаара—Кармана как "искусственное и нереальное условие текучести" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 320, 321). Не вызывает возражений высказываемая ими мысль о том, что ценность того или иного решения пространственной задачи устанавливается возможностью либо построить согласованное кинематически допустимое поле, либо продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. В противном случае вопрос о значимости решения остается открытым. Ясно, что исключительную ценность представляют полные решения, когда удается построить согласованное кинематически допустимое поле и продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. Таким образом, неполные решения обладают лишь относительной ценностью, а полные — абсолютной. На практике, однако, чаще всего удается построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны. Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так, или иначе, но большинство прикладных задач решены по идеально пластической схеме не полно.

В дальнейшем Д.Д. Ивлевым была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести и в результате показано, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Любопытно отметить, что как статические, так и кинематические уравнения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для граней призмы Кулона—Треска, соответствующих кинематически определимым режимам течения, также являются гиперболическими; характеристические направления ориентированы так же, как и главные направления тензора напряжений, т.е. характеристики касаются главных направлений тензора напряжений.¹⁶

¹⁶См. работу [21]. Полное исследование характеристик уравнений осесимметричной задачи при условии пластичности Треска для различных режимов пластического течения читатель может найти в [8], с. 258-268.

Подобным же образом дело обстоит и в пространственной задаче: в случае грани произвольного кусочно-линейного условия текучести характеристические поверхности касаются главных направлений тензора напряжений.

В 1971 г. Д.Д. Ивлев и Г.И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности как идеального, так и упрочняющегося тела, как с учетом упругих деформаций, так и без их учета, на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений.¹⁷ Полученные ими результаты устанавливают, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т.е. эллиптичны; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптичны.

В 1966 г. выходит в свет монография Д.Д. Ивлева “Теория идеальной пластичности”. В этом оригинальном сочинении с высоким мастерством были изложены новые результаты и принципы математической теории идеальной пластичности и, прежде всего, теория пространственной и обобщенной плоской задачи. Заметим, что эта монография стоит в одном ряду с замечательными руководствами по теории пластичности, написанными советскими учеными-механиками, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами.¹⁸ И в настоящее время “Теория идеальной пластичности” Д.Д. Ивлева служит незаменимым руководством для тех, кто пытается глубже проникнуть в основы математической теории идеальной пластичности, опираясь на блестящее и последовательное изложение, данное грандом этой науки.

В механике упрочняющихся пластических тел Д.Д. Ивлев (совместно с Г.И. Быковцевым) последовательно развивал представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения, предложенные ранее в исследованиях А.Ю. Ишлинского и В. Прагера (W. Prager). Результаты их совместных исследований легли в основу классической монографии, которая по сути представляет собой каноническое изложение математической теории пластичности упрочняющегося тела в случае малых деформаций. В этой монографии читатель найдет исчерпывающий анализ общих уравнений теории течения и свойств их решений, включая анализ сильных и слабых разрывов с помощью аппарата геометрических и кинематических условий совместности Адамара—Томаса (J. Hadamard, T. Tomas).

¹⁷См.: Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с. Научная биография Г.И. Быковцева, отражающая его выдающийся вклад в развитие теории пространственной задачи математической теории пластичности, имеется в статье: Яровой Г.П., Радаев Ю.Н. К 70-летию Г.И. Быковцева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №9/1(59). 2007. С. 9-30.

¹⁸Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с. (это последнее третье издание; второе издание: Соколовский В.В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 396 с.; первое издание книги было выпущено в свет издательством АН СССР в 1946 г.);

Ильющин А.А. Пластичность. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.;

Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. (первое издание этой книги: Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 324 с.).

Исследования Д.Д. Ивлева в области математической теории пластичности подытожены в фундаментальной двухтомной монографии "Механика пластических сред"¹⁹.

Помимо перечисленных, Д.Д. Ивлеву принадлежат различные результаты в области предельного состояния конструкций, статики и динамики сыпучих сред, устойчивости равновесия упругопластических тел, гидродинамики, теории трещин и механики разрушения. Следует отметить обстоятельный обзор работ по механике разрушения с изложением основных результатов этой части механики деформируемого твердого тела, сделанный им в момент острой дискуссии, посвященной механике трещин (см.: Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1967. №6. С. 88-128). Дискуссиям в механике посвящена важная и весьма поучительная статья: Ивлев Д.Д. Три дискуссии в механике // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. 2007. №4(54). С. 115-123. В ней Д.Д. Ивлев с присущей ему корректностью, тактом и бережным отношением к научным фактам затрагивает важную тему о дискуссии по механике квазихрупкого разрушения и дает свою оценку имевшим место событиям, тем более, что Д.Д. Ивлев лично участвовал в этой дискуссии. Мы также ранее высказывались по этому поводу в статье: Радаев Ю.Н. К 75-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. №5(39). 2005. С. 5-32. Наши оценки результатов имевшей место более сорока лет назад дискуссии совпадают. В частности, Д.Д. Ивлев в указанной выше статье пишет: "Прав Ю.Н. Радаев, когда написал: *"Через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке"*."

В течение трех последних десятилетий рядом ученых проводятся исследования в рамках научного направления, вектор которого был задан Д.Д. Ивлевым в его работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности конца 50-х годов. Как уже указывалось, это один из самых сложных и наименее изученных разделов механики деформируемого твердого тела. Тем не менее, за последние два десятилетия удалось существенно продвинуться в создании общей теории трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и предложить общую схему интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризуемых наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [23] и [24]. Исследования в области пространственной задачи теории идеальной пластичности были подытожены в монографиях: Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.; Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И., Радаев Ю.Н., Сенашов С.И., Шемякин Е.И. Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.

В первой из указанных монографий сделана попытка дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке,

¹⁹См.: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 448 с.; Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 448 с.

делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Исходной точкой построения общей теории пространственных уравнений выступает одна замечательная инвариантная векторная форма пространственных уравнений, анализ которой позволяет сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. Затем рассматриваются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, основные кинематические соотношения для приращений перемещений, следующие из него, а также исследуется кинематика течения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Показано, что скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т.е. когда Гауссова кривизна положительна, на поверхности максимальной скорости сдвига. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений вдоль изостатических траекторий выводятся преобразованием векторного уравнения равновесия к изостатической координатной сетке. Устанавливается возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

Значительное внимание уделяется исследованию трехмерных уравнений математической теории пластичности в триортогональных изостатических координатах [25]. Основным интерес здесь представляют уравнения совместности приращений деформаций и пространственные соотношения Коши. Уравнения совместности для приращений малых деформаций в триортогональной изостатической системе координат исследуются вместе дополнительными соотношениями, связывающими физические компоненты тензора несовместности. Существенных уравнений совместности шесть. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, имеется лишь три независимых уравнения совместности. Явно указываются и рассматриваются системы независимых уравнений совместности, сформулированные в изостатической координатной сетке. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении трех независимых уравнений совместности удовлетворялись три оставшихся уравнения совместности. Показано, что нарушения сплошности на поверхности идеально пластического тела распространяются вглубь тела вдоль асимптотических линий на слоях векторного поля, указывающего направления наибольшего главного нормального напряжения. Поскольку асимптотические линии *наименее* искривлены по сравнению с любыми другими линиями на поверхности (в том смысле, что нормальная кривизна асимптотических линий равна нулю), то нарушения сплошности проникают вглубь идеально пластического тела по наименее искривленным траекториям. Именно в этом смысле можно вести речь о минимальном искривлении траекторий распространения трещин в твердых телах.

Анализ плоской и осесимметричной задач выполнен с использованием аппарата производящих функций, определяющих канонические преобразования пространственных координат. Альтернативный вариант вывода всех основных геометрических соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений, сформулированных для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, простым понижением на одну единицу их размерности был выполнен в статье [26].

В рамках построения математической теории пластичности с уравнениями гиперболического аналитического типа был выполнен групповой анализ уравнений пространственной, плоской и осесимметричной задачи. В отношении пространственных уравнений эта работа еще далека от завершения и продолжается поиск новых симметрий пространственных уравнений Д.Д. Ивлева. Методы группового анализа все шире проникают в механику деформируемого твердого тела, позволяя в некоторых случаях получать точные решения важнейших прикладных задач.²⁰ Получены новые результаты применения классических методов Ли к нелинейным уравнениям теории пластичности. Определены группы симметрий уравнений в частных производных теории пластичности, алгебры симметрий (алгебры Ли) и оптимальные системы одномерных подалгебр для пространственной, плоской и осесимметричной задач. Оптимальные системы позволяют найти ряд новых решений трехмерных уравнений теории пластичности инвариантно-групповой природы. Применение групповых методов (особенно это касается пространственной задачи) требует выполнения огромного объема рутинных преобразований и вычислений, которые были проведены с помощью систем символьных вычислений. Чтобы оценить примерный объем вычислительной работы заметим, что лишь для одной естественной конечномерной (размерности 12) подалгебры алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности, оптимальная система одномерных подалгебр насчитывает один трехпараметрический элемент, 12 двухпараметрических, 66 однопараметрических элементов и 108 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного однопараметрического элемента и двадцати двух индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений плоской задачи (плоское деформированное состояние) имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного двухпараметрического элемента, 11 однопараметрических и 20 индивидуальных элементов.

Преподавание математической теории пластичности в российских университетах имеет свою историю и традиции. В настоящее время они прочно связаны с именами Д.Д. Ивлева и Г.И. Быковцева. Отличительной чертой их преподавательской деятельности является сочетание прикладного содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения. Такой синтез требовал также прочтения особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко

²⁰При этом не следует однако преувеличивать возможности группового анализа. В настоящее время его роль как средства нахождения новых точных решений задач механики деформируемого твердого тела является более чем скромной.

освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования.

Д.Д. Ивлев — член Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, член редколлегии журнала “Известия РАН — Механика твердого тела”, член экспертного совета по математике и механике ВАК Минобрнауки РФ, председатель диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, заслуженный деятель науки и техники РФ (1992 г.), лауреат Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники (2006 г.) Среди учеников Д.Д. Ивлева — доктора и кандидаты наук, которые работают в различных городах России — Москве, Воронеже, Самаре, Чебоксарах, Владивостоке.

Мы поздравляем Дюиса Даниловича с 80-летием — замечательной датой, которая является важнейшей вехой на пути его научного поиска. Мы желаем ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *De Saint-Venant, B.* Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. — 1870. — Т. 70. — Р. 473–480.

[2] *De Saint-Venant, B.* Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. — 1871. — Т. 16. — Р. 308–316, 373–382.²¹

[3] *Coulomb, C. A.* Essay sur l'application des règles de maximes et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture / C. A. Coulomb // Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'académie Royale des Sciences. Année 1773. — Paris : L'imprimerie Royale, 1776.

[4] *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости : сб. ст. / М. Леви // Теория пластичности. — М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — С. 20–23.²²

[5] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. — М. : Мир, 1964. — 308 с.

[6] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. — М. : Гостехтеоретиздат, 1956. — 407 с.

[7] *Фрейденталь, А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. — М. : Физматгиз, 1962. — 432 с.

²¹Имеется перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости : сб. ст. // Теория пластичности. М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 11–19.

²²Оригинальная работа: Levy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1870. Т. 71. Р. 1323–1325.

- [8] Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [9] Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [10] Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
- [11] Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [12] Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч.1 : Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Ленинград [СПб.] : Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.
- [13] Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах : сб. ст. / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.²³
- [14] Генки, Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах : сб. ст. / Г. Генки // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 80–101.
- [15] Шилд, Р. Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии : сб. переводов / Р. Т. Шилд // Механика. – 1957. – № 1. – С. 102–122.²⁴
- [16] Ишлинский, А. Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля / А. Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8, вып. 3. – С. 201–224. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1 : Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М. : Наука, 1986. С. 17–42.)
- [17] Ишлинский, А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Ученые записки МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108. (См. там же: С. 62–83. В заключительном подстрочном замечании А. Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)
- [18] Ивлев, Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.²⁵
- [19] Ивлев, Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3. – С. 546–549.²⁶
- [20] Ивлев, Д. Д. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 3. – С. 137. (Статья воспроизводится также в книге: Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 20–21.)

²³Оригинальная работа: Haar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien // Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. H. 2. S. 204–218.

²⁴Оригинальная работа: Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. Vol. 233A. №. 1193. P. 267–287.

²⁵См. также: Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 5–14.

²⁶См. также: Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 15–20.

[21] *Ивлев, Д. Д.* К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска / Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114. (См. там же: С. 263–267.)

[22] *Радаев, Ю. Н.* О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – № 6(56). – 2007. – С. 102–114.

[23] *Радаев, Ю. Н.* О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 1. – С. 86–94.

[24] *Радаев, Ю. Н.* К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 2003. – № 5. – С. 102–120.

[25] *Радаев, Ю. Н.* О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке / Ю. Н. Радаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 2008. – № 5. – С. 79–89.

[26] *Радаев, Ю. Н.* К теории плоской деформации идеально пластического тела / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – № 3(62). – 2008. – С. 272–289.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Д. Д. ИВЛЕВА

1955

1. К теории простого деформирования пластических тел // Прикладная математика и механика. – 1955. – Т. 19, Вып. 6. – С. 734–735.

1956

2. К использованию линейной тензорной связи в пластичности // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, Вып. 2. С. 289–292.
3. Выпучивание эксцентричной трубы // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1956. – № 10. – С. 112–166.

1957

4. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких круговому // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
5. Упруго-пластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник МГУ. – 1957. – № 2. – С. 51–52 (совм. с Л. В. Ершовым).
6. Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 5. – С. 113–118.
7. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 113. – № 2. – С. 294–296.
8. Приближенное решение задач теории малых упруго-пластических деформаций // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 113, № 2. – С. 527–528.
9. Упруго-пластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 7. – С. 129–131 (совм. с Л. В. Ершовым).
10. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 8. – С. 149–152 (совм. с Л. В. Ершовым).
11. Упруго-пластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 9. – С. 130–134 (совм. с Л. В. Ершовым).
12. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 10. – С. 89–93.
13. Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т. 21, вып. 5. – С. 716–718.
14. Приближенное решение плоских упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. – 1957. – № 5. – С. 17–26 (совм. с Л. В. Ершовым).

1958

15. О потере устойчивости вращающихся дисков // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125 (совм. с Л. В. Ершовым).
16. О некоторых работах К. Н. Шевченко по теории пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 2. – С. 159–162.
17. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.

18. Приближенное решение упругопластических осесимметрических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. – 1958. – № 2. – С. 47–56 (совм. с Л. В. Ершовым).
19. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 4. – С. 480–486.
20. О некоторых частных решениях уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности и обобщение решения Л. Прандтля о сжатии пластической полосы шероховатыми плитами // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 673–678.
21. К построению теории идеальной пластичности // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 6. – С. 850–855.
22. Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 11. – С. 107–109.
23. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 6. – С. 488–490.

1959

24. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1959. – № 1. – С. 132–133.
25. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 6. – С. 546–549.
26. О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 2. – С. 247–281.
27. К теории разрушения твердых тел // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 3. – С. 618–624.
28. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1959. – № 3. – С. 137.
29. Об изотропном упрочнении пластических тел // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 4. – С. 777–779.
30. К определению перемещений в задаче Л. А. Галина // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 5. – С. 987–988.
31. К теории идеальной пластической анизотропии // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 6. – С. 1107–1114.
32. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114.

1960

33. К теории идеально затвердевающих сред // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 4. – С. 742–745.
34. Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 6. – С. 1232–1235.
35. О границе пластического состояния материала // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1960. – № 1. – С. 161.

36. О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 1. – С. 144–146.
37. О постулате изотропии в теории пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.
38. К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 4. – С. 707–710.
39. Об экстремальных свойствах условий пластичности // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 5. – С. 951–955.
40. К построению гидродинамики вязкой жидкости // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 135, № 2. – С. 280–282.
41. О работе В.С. Ленского “Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении” // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 179–180.
42. К теории вдавливания штампа в пластическую среду // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1960. – № 3. – С. 214–216 (совм. с В. А. Жалнинным).
43. О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство // Журнал практической механики и технической физики. – 1960. – № 4. – С. 75–78.

1961

44. Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 1. – С. 173–174 (совм. с Г. И. Быковцевым).
45. К теории неустановившейся ползучести // Проблемы механики сплошной среды : сб. ст., посв. 70-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – С. 157–160.
46. Об определении поверхности выпучивающегося материала при вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 2. – С. 332–335.
47. К теории сферического деформированного состояния идеально пластических сред // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 1. – С. 72–75 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
48. Об устойчивости полосы при сжатии // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049 (совм. с Л. В. Ершовым).
49. К построению теории упругости // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 6. – С. 1321–1324.
50. Об основных соотношениях теории анизотропной сыпучей среды // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 2. – С. 116–121 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
51. О математическом описании поведения упругого изотропного тела при помощи кусочнолинейного потенциала // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 5. – С. 897–905.
52. О кручении винтовых стержней из идеально жесткопластического материала // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 5. – С. 124–126.

53. О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 6. – С. 153–154 (совм. с В. А. Жалниным, В. С. Мищенко).
54. Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1126–1128 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
55. О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. – 1961. – № 6. – С. 197–203.

1962

56. Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, вып. 4. – С. 709–714.
57. К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочнолинейных условиях пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 6. – С. 95–102.

1963

58. К теории сжимаемых идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 3. – С. 589–592 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
59. О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линейаризованном условии пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 3. – С. 115–118 (совм. с В. В. Дудукаленко).
60. К теории сложных сред // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 148, № 1. – С. 64–67.
61. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1963. – № 3. – С. 102–104 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
62. О предельном состоянии осесимметричных тел при условиях сопротивления сдвигу и отрыву // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 79–85 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
63. О кручении анизотропно упрочняющихся стержней при линейаризованном законе пластического течения // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 173–175 (совм. с В. В. Дудукаленко).
64. О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений // Журнал прикладной механики и технической физики. 1963. – № 5. – С. 154–157 (совм. с И. А. Бережным).
65. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочнолинейных потенциалах // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 12–16 (совм. с В. А. Знаменским).
66. О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 5. – С. 1024–1026 (совм. с В. В. Дудукаленко).

1964

67. К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1964. – № 5. – С. 102–108 (совм. с Г. И. Быковцевым, Т. Н. Мартыновой).

68. О функциях нагружения анизотропного упрочняющегося пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 4. – С. 794–797 (совм. с Г. И. Быковцевым, В. В. Дудукаленко).
69. О предельном состоянии слоистых пластин и оболочек вращения // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 77–86 (совм. с Ю. П. Листровой, Ю. В. Немировским).
70. Об устойчивости пластин в общем случае нелинейной деформационной теории при малых деформациях // Прикладная механика. – 1964. – № 2. – С. 117–123 (совм. с И. Д. Легеней).
71. Пластичности теория (математич.) // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 37–39.
72. Пластический шарнир // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 37.
73. Пластичности условия // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 39.

1965

74. О влиянии вязкости на механическое поведение упруго-пластических сред // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 163, № 3. – С. 595–598 (совм. с И. А. Бережным).
75. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 164, № 4 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
76. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочнолинейных потенциалах // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1965. – № 1. – С. 56–69 (совм. с Г. И. Быковцевым, Т. Н. Мартыновой).
77. К теории устойчивости пластины в общем случае деформационной теории : тр. всесоюз. конф. по устойчивости. – М. : Стройиздат, 1965.

1966

78. Теория идеальной пластичности. – М. : Наука, 1966. – 232 с.

1967

79. О некоторых случаях интегрируемости соотношений теории упрочняющихся пластических сред при сингулярных поверхностях текучести // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1967. – № 1. – С. 143–144 (совм. с Л. В. Ершовым).
80. О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 2. – С. 346–348.
81. Об условиях квазихрупкого разрушения // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 5. – С. 537–542 (совм. с Л. В. Ершовым).
82. О деформационных теориях пластичности при сингулярных поверхностях нагружения // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 32, вып. 5. – С. 887–889.
83. О диссипативной функции в теории пластических сред // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1037–1039.
84. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеально-пластических телах // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1039–1042 (совм. с Г. И. Быковцевым, Ю. М. Мяснянкиным).
85. Об одном построении теории трещин // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1967. – № 6. – С. 91–94.

86. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1967. – № 6. – С. 88–128.

1968

87. О соотношениях на поверхности разрыва напряжений в трехмерных идеально жесткопластических телах // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 3. – С. 472–477 (совм. с Г. И. Быковцевым, Ю. М. Мяснянкиным).
88. О кинематических соотношениях на поверхности скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 4. – С. 623–631 (совм. с Г. И. Быковцевым, Ю. М. Мяснянкиным).
89. К задаче о внедрении гладкого клинообразного в плане штампа с плоским основанием в жесткопластическое пространство // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 115–118 (совм. с Р. И. Непершиным).

1969

90. О деформационных теориях пластичности // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды : сб. ст., посв. 60-летию акад. Л. И. Седова. – М., 1969. – С. 233–239.

1970

91. О диссипативных функциях в теории вязкопластических сред // Проблемы механики сплошной среды : (к 60-летию акад. В. В. Новожилова). – 1970. – С. 67–70 (совм. с И. А. Бережным, Е. В. Макаровым)
92. Об одной неполной задаче теории идеальной пластичности // Труды НИИ математики ВГУ. – 1970. – С. 145–148.
93. О деформационных моделях теории пластичности и сплошных сред // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 40, вып. 3. – С. 553–557 (совм. с И. А. Бережным, Е. В. Макаровым).

1971

94. Об уравнениях теории идеальной пластичности в компонентах скоростей перемещений // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 41, вып. 1. – С. 183–185 (совм. с А. Д. Чернышевым).
95. Теория упрочняющегося пластического тела. – М. : Наука, 1971. – 232 с. (совм. с Г. И. Быковцевым).

1972

96. О приобретенной анизотропии пластических тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа : сб. ст., посв. 80-летию акад. Н. И. Мухелишвили. – М., 1972. – С. 601–605 (совм. с И. А. Бережным, В. В. Дудукаленко).
97. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 42, вып. 5. – С. 957–959.
98. О построении модели сыпучих сред исходя из определения диссипативной функции // Основы пластичности : сб. тр. симпозиума. – Варшава, 1973. – С. 601–605 (совм. с И. А. Бережным, В. Б. Чадовым).

1973

99. О построении модели сыпучих сред на основе диссипативных функций // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 123. – № 6 (совм. с И. А. Бережным, В. Б. Чадовым).

100. Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 159–166 (совм. с Р. И. Непершиным).
101. Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния // Труды НИИ математики ВГУ. – Воронеж, 1973. – Вып. 10. – С. 1–3.

1974

102. О диссипативной функции в теории анизотропных пластических сред // Известия вузов. Машиностроение. МВТУ. – 1974. – С. 21–24 (совм. с В. Б. Чадовым).
103. О некоторых моделях, построенных на основе механизмов упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 1 (совм. с И. А. Бережным, Н. В. Герасимовым).
104. О функции нагружения для идеально пластических моделей // Избранные проблемы прикладной механики : сб. ст., посв. 60-летию акад. В. Н. Челомея. – М., 1974. – С. 113–117 (совм. с И. А. Бережным, В. И. Цейлером).

1975

105. Об определении перемещений в упруго-пластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред : (к 100-летию со дня рождения акад. Б. Г. Галеркина). – М., 1975. – С. 236–240.
106. О построении поверхностей сложных жесткопластических моделей // Механика деформируемых тел и конструкций : сб. ст. – М. : Машиностроение, 1975. – С. 62–70 (совм. с И. А. Бережным, В. И. Цейлером).
107. О течении жидкости с управляемой вязкостью // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223, № 3. – С. 582–584 (совм. с И. А. Бережным, Н. В. Герасимовым, В. И. Цейлером).
108. О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223. – № 4. – С. 810–811 (совм. с И. А. Бережным, Р. К. Логвиновой).

1976

109. Об определяющих неравенствах в теории пластичности // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 4. – С. 824–826 (совм. с И. А. Бережным)

1977

110. Диссипативная функция в теории пластичности // Механика деформируемого тела : межвуз. сб. – Куйбышев, 1977. – Вып. 3. – С. 5–22 (совм. с И. А. Бережным).

1978

111. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М. : Наука, 1978. – 208 с. (совм. с Л. В. Ершовым).
112. Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 80–87. (совм. с Е. В. Макаровым, Ю. М. Марушкой)

1980

113. Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 3. – С. 540–549 (совм. с И. А. Бережным).

1981

114. Определяющие неравенства в теории упругопластического тела : тез. докл. V Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. – Алма-Ата, 1981 (совм. с И. А. Бережным).

1982

115. Об уравнениях стареющих пластических тел // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1982. – Т. 25. – № 5. – С. 22–25 (совм. с Н. Х. Арутюняном).
116. Об обобщении решения Л. Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации : сб. ст. в честь 60-летия акад. И. Ф. Образцова. – М. : Машиностроение, 1982. – С. 137–144 (совм. с Л. В. Ершовым, А. В. Романовым).
117. Об обобщении решения Прандтля в сферической системе координат // Прикладная математика и механика. – 1982. – Т. 46, вып. 5. – С. 524–527 (совм. с А. В. Романовым).

1983

118. О влиянии внутреннего механизма вязкости на поведение идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47, вып. 3. – С. 524–527 (совм. с М. А. Артемовым).
119. Об одной предельной модели сплошной среды // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1074–1076 (совм. с И. Т. Артемьевым).

1984

120. К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 1. – С. 111–116 (совм. с И. Т. Артемьевым).
121. Об одном точном неавтономном решении теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 275. – № 5. – С. 1080–1083 (совм. с А. В. Романовым).
122. Об одном классе точных неавтономных задач теории идеальной пластичности // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела : сб. ст., посв. 60-летию акад. Ю. Н. Работнова. – М. : Наука, 1984. – С. 90–97 (совм. с А. В. Романовым).

1985

123. Краевая задача для сред с предельным сопротивлением всестороннему растяжению // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1985. – С. 3–9 (совм. с И. Т. Артемьевым).

1986

124. О течении идеально вязкой среды // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1986. – С. 33–42 (совм. с А. А. Горбуновым).
125. Об упругопластическом состоянии клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1986. – № 1. – С. 157–161 (совм. с И. Т. Артемьевым).
126. О нижней границе несущей способности тел, определяемой условиями предельного состояния : аннотации докл. VI Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. – Ташкент, 1986. – С. 51 (совм. с И. Т. Артемьевым, А. А. Горбуновым).
127. Об определяющих соотношениях в теории предельного сопротивления сдвигу и среднему напряжению // Актуальные задачи механики сплошных сред. – Чебоксары, 1986. – С. 45–52 (совм. с А. А. Горбуновым).

128. Об изгибе пластической полосы, ослабленной пологими выточками // Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. – Чебоксары, 1986. – С. 57–60 (совм. с Л. Б. Шитовой).

1988

129. Определение напряженного состояния в деформируемом объеме порошкового материала методом характеристик // Порошковая металлургия. – 1988. – № 1. – С. 6–10 (совм. с Н. А. Чайниковым).
130. Упругопластические равновесия остроугольного клина при предельном сопротивлении сдвигу, среднему растягивающему напряжению и отрыву // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1988. – № 4. – С. 157–162 (совм. с И. Т. Артемьевым).
131. Линеаризованные уравнения теории анизотропного идеального жесткопластического тела // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложений. – Чебоксары, 1988. – С. 55–58 (совм. с Л. Б. Шитовой).

1989

132. Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 2. – С. 183–185 (совм. с Е. А. Григорьевым, Л. Б. Шитовой).
133. Об образовании шейки при растяжении плоского образца с учетом влияния среднего напряжения // Краевые задачи и их приложения. – Чебоксары, 1989. – С. 117–119 (совм. с Л. Б. Шитовой).

1992

134. Пластичности теория (математическая) // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 628–631.
135. Пластический шарнир // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 628.
136. Пластичности условие // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 631.
137. К теории предельного состояния пластических пористых тел // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 163–165.
138. Об условиях текучести идеально пластического тела // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 107–109 (совм. с А. В. Романовым).
139. О свойствах основных соотношений теории идеальной пластической анизотропии // Актуальные проблемы механики деформ. твердого тела : сб. ст., посв. 70-летию Ж. С. Ержанова. – Алма-Ата, 1992. – С. 69–75 (совм. с И. Т. Артемьевым).

1993

140. Теория идеальной пластической анизотропии // Прикладная механика. – 1993. – Т. 29, № 1. – С. 73–78 (совм. с И. Т. Артемьевым).
141. Линеаризованные уравнения теории идеальной пластичности // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1993. – № 5. – С. 107–113 (совм. с И. Т. Артемьевым).
142. О применении обобщенных функций комплексного переменного к двумерной задаче теории упругости // Прочность и надежность конструкций : сб. ст., посв. 50-летию В. Д. Кулиева. – М., 1993. – С. 83–89 (совм. с М. В. Михайловой).

1994

143. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Известия АН Чувашской республ. – 1994. – № 2. – С. 16–21 (совм. с М. А. Артемовым).

144. К теории идеально затвердевающих сред // Известия АН Чувашской республ. – 1994. – № 2. – С. 22–25 (совм. с М. А. Артемовым).

145. К теории предельного состояния сыпучих сред. – 5 с. – Деп. в ВИНТИ 16.12.94. 2918-в94. (совм. с Л. Б. Шитовой).

1995

146. О статических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. – № 3. – С. 104–110 (совм. с М. А. Артемовым).

147. О линеаризованных уравнениях кинематически определяемых задач // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 6. – С. 104–110 (совм. с М. А. Артемовым).

148. К теории затвердевающих сред // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 14–21 (совм. с М. А. Артемовым).

149. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально-пластического материала // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 39–48 (совм. с А. М. Васильевой, М. В. Михайловой).

150. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 27–38 (совм. с Т. Л. Захаровой).

151. Об идеально пластическом состоянии полого кругового цилиндра при произвольном возмущении боковой поверхности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 29–36 (совм. с А. М. Васильевой).

1996

152. Об одной модели предельного состояния тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 1. – С. 61–64 (совм. с Л. Б. Шитовой).

153. О пластическом течении бруса прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 8–17 (совм. с М. А. Артемовым).

154. О соотношениях теории пластической анизотропии // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 121–125.

155. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Проблемы механики сплошной среды. – Владивосток, 1996. – С. 112–115.

156. О статической определяемости предельного состояния твердого тела при отрыве // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 48–51.

157. О разрывных решениях теории пластичности // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32. – № 7. – С. 65–68 (совм. с М. А. Артемовым).

158. Об одном случае предельного состояния тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 3. – С. 43–45 (совм. с М. А. Артемовым).

159. К теории дифференциальных соответствий в механике сплошной среды // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1996. – № 2. – С. 5–7.

160. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Доклады РАН. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 332–334 (совм. с М. А. Артемовым).

161. О течении трубы, ослабленной пологими выточками // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 28–31 (совм. с Т. Л. Захаровой).
162. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально пластического материала // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 6. – С. 79–87 (совм. с А. М. Васильевой, М. В. Михайловой).
163. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 32–34.
164. Об образовании шейки в растягиваемой вязкопластической полосе // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 35–38 (совм. с Т. И. Рыбаковой).

1997

165. Об идеально пластическом состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Доклады РАН. – 1997. – Т. 353, № 1. – С. 47–50 (совм. с М. А. Артемовым).
166. К теории идеально затвердевающих сред // Доклады РАН. – 1997. – Т. 355, № 5. – С. 623–625 (совм. с М. А. Артемовым).
167. О напряженном состоянии идеально пластического полого цилиндра, близкого к круговому // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 4. – С. 113–119 (совм. с А. М. Васильевой).
168. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1997. – Т. 38, № 5. – С. 165–172 (совм. с Т. Л. Захаровой).
169. О соотношениях ассоциированного закона течения и нагружения в теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1997. – № 4. – С. 78–94.

1998

170. О пространственном течении идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 5–12.
171. О течении трубы, ослабленной выточками // Доклады РАН. – 1998. – Т. 359, № 1. – С. 40–42 (совм. с Т. Л. Захаровой).
172. Об устойчивости вязкопластической полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 358, № 4. – С. 490–491 (совм. с Т. И. Рыбаковой).
173. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 1998. – Т. 361, № 6. – С. 765–767.
174. Об идеальном жесткопластическом течении плоской полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 4. – С. 483–485 (совм. с Л. А. Максимовой).
175. О возмущенном течении растягиваемой идеально пластической полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 5. – С. 632–633 (совм. с Л. А. Максимовой).
176. О соотношениях ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 6. – С. 775–776.
177. О предельном состоянии идеально пластического прямоугольного бруса, ослабленного пологими выточками // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 4. – С. 173–179 (совм. с М. А. Артемовым).
178. Теория пластичности. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с. (совм. с Г. И. Быковцевым).

179. Изменение жесткости и процессы микроповреждений в хрупком материале // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1998. – № 5. – С. 18–28 (совм. с В. В. Дудукаленко).

1999

180. Об определении соотношений ассоциированного закона идеально-пластического течения // Прикладные задачи механики сплошных сред. – Воронеж, 1999. – С. 116–123.
181. К теории кинематически определимых состояний идеальнопластических тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 1. – С. 92–98 (совм. с М. А. Артемовым).
182. О соотношениях общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. – Чебоксары. Сводный том. – 1998. – № 3, 4 ; 1999. – № 1, 2. – С. 13–16 (совм. с Л. А. Максимовой).
183. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 6. – С. 39–54 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
184. Полная пластичность в теории идеально пластического тела // Доклады РАН. – 1999. – Т. 368, № 3. – С. 333–334 (совм. с А. Ю. Ишлинским).

2000

185. О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатыми плитами // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 129–140 (совм. с И. П. Григорьевым).
186. О плоских течениях идеально жесткопластической среды // Доклады РАН. – 2000. – Т. 370, № 1. – С. 43–45 (совм. с Л. А. Максимовой).
187. О вдавливании индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 3. – С. 131–136 (совм. с Л. А. Максимовой).
188. О течениях изотропных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 5–12 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
189. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Доклады РАН. – 2000. – Т. 371, № 1. – С. 49–51 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
190. О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Доклады АН РАН. – 2000. – Т. 373, № 1. – С. 39–41 (совм. с Л. А. Максимовой).
191. О свойствах течений изотропной среды // Доклады АН РАН. – 2000. – Т. 375, № 2. – С. 191–194 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
192. Об определении связи „деформация – напряжение“ в теории сложного нагружения при выполнении постулата изотропии А. А. Ильюшина // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 2000. – № 4. – С. 15–28.

2001

193. О вдавливании жесткого штампа в идеально пластическое полупространство с учетом сдвиговых усилий // Доклады РАН. – 2001. Т. 379, № 2. – С. 196–199 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).

194. Об определении поля скоростей идеально пластического течения в случае общей плоской задачи // Доклады РАН. – 2001. – Т. 379, № 6. – С. 758–763 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).
195. О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Доклады РАН. – 2001. – Т. 381, № 5. – С. 616–622 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
196. Математическая теория идеальной пластичности. Состояние и развитие : докл. на VIII Всерос. съезде по теор. и прикл. механике // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 32–44 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
197. О представлении состояния полной пластичности на диаграмме Мора // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 45–51 (совм. с Л. А. Максимовой).
198. О соотношениях плоской задачи теории упругопластического тела для неоднородного материала // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 52–59 (совм. с А. В. Горским, П. В. Горским).
199. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
200. Математическая теория пластичности. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с. (совм. с А. Ю. Ишлинским).
201. О предельных течениях изотропных сред // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск, 2001. – С. 223–227 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
202. Условия изотропии и ассоциированный закон пластического деформирования // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород : сб. ст., посв. 70-летию проф. Л. В. Ершова. – М. : Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 2001. – С. 93–116 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
- 2002**
203. Механика пластических сред. Т. 2 : Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
204. О характеристических соотношениях для напряжений пространственной задачи сыпучей среды при полном предельном равновесии // Доклады РАН. – 2002. – Т. 383, № 5. – С. 638–642 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
205. О характеристических соотношениях для скоростей перемещений в пространственной задаче полного предельного равновесия сыпучей среды // Доклады РАН. – 2002. – Т. 384, № 1. – С. 57–61 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
206. Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // Доклады РАН. – 2002. – Т. 385, № 6. – С. 766–769 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).

207. О вдавливании плоского штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии контактных касательных напряжений // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 1. – С. 134–139 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).
208. О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 4. – С. 57–62 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
209. О свойствах моделей изотропных сред // Проблемы механики деформируемого твердого тела : сб. ст. к 70-летию акад. Н. Ф. Морозова. – СПб, 2002. – С. 149–153 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).

2003

210. О сдавливании идеально пластической пирамиды плоским штампом // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 3. – С. 337–339 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
211. О статически определяемых соотношениях теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 4. – С. 483–486.
212. Статически определяемые соотношения теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 5. – С. 634–637 (совм. с М. В. Михайловой).
213. О линеаризованных уравнениях статически определяемых соотношений теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 6. – С. 769–771 (совм. с М. В. Михайловой).
214. К теории статически определяемых соотношений и предельного состояния пластических тел // Доклады РАН. – 2003. – Т. 392, № 1. – С. 59–62 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
215. Статически определяемые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 3. – С. 84–89 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
216. Идеи и результаты А. Ю. Ишлинского в теории пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 4. – С. 167–174.
217. Идеи и результаты А. Ю. Ишлинского в теории пластичности // Проблемы механики : сб. ст. к 90-летию А. Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 30–38.
218. О соотношениях теории идеальной пластичности при условии пластичности максимального приведенного напряжения // Проблемы нелинейной механики : сб. ст. к 80-летию Л. А. Толоконникова. – Тула, 2003. – С. 178–184 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
219. Статически определяемые состояния теории идеальной пластичности : тез. докл. междунар. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики”. – Тула. – 2003. – С. 147.
220. Статически определяемые соотношения теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 2003. – № 3. – С. 36–46 (совм. с М. В. Михайловой).
221. Теория идеальной пластичности. Состояние и развитие // Прикладная механика. – 2003. – № 11. – С. 6–46.

2005

222. Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2005. – № 5(39). – С. 33–41.

223. Теория предельного состояния и идеальной пластичности : избранные работы. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005. – 357 с.
224. О статически определимых состояниях в теории идеальной пластичности // Вестник Чувашского педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2005. – №2(44). – С. 13–18 (совм. с Л. А. Максимовой).
225. Статически определимые соотношения теории сжимаемых идеально-пластических сред // Теоретическая и прикладная механика : межвед. сб. науч.-метод. ст. Вып. 19 : Белорусский национальный технический университет. – Минск, 2005. – С. 21–24.
226. О соотношениях ассоциированного закона течения теории сжимаемых идеально-упругих сред // Доклады РАН. – 2005. – Т. 405, № 5.
227. О статически определимых соотношениях сжимаемых идеально упругих сред // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 5. – С. 131–134.

2006

228. К теории статически определимых состояний деформируемых тел // Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 131–136 (совм. с Л. А. Максимовой).
229. О развитии идеальноупругого состояния // Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 130–133 (совм. с Н. М. Матченко).
230. Об идеях и результатах Е. И. Шемякина в механике предельного состояния твердых деформируемых тел и конструкций // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 46–51.
231. О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 287–290 (совм. с Н. М. Матченко).
232. Предельное состояние твердых тел как состояние статической определимости // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докладов. – Н. Новгород, 2006. – Т. 3. – С. 100.
233. Об эволюции идеальноупругого состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 58–61.
234. Механика сплошной среды как раздел дифференциальной геометрии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 5(52). – С. 215–220.

2007

235. О переходе статически неопределимого состояния в статически определимое // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 5–9.
236. Три дискуссии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 157–163.
237. Чем отличается теория идеальной пластичности от теории предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 3. – С. 3–10.
238. Три дискуссии в механике // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 4(54). – С. 115–123.
239. О предельных соотношениях при отрыве для анизотропного материала // Математические модели и методы механики сплошных сред : сб. науч. тр. к 60-летию А.А. Буренина. – Владивосток, 2007. – С. 106–107 (совм. с А. Н. Роштовой).

2008

240. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с. (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным, Ю. Н. Радаевым, С. И. Сенашевым, Е. И. Шемякиным).

2009

241. Коэффициент интенсивности статистической неопределимости и достижение состояния полной пластичности // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1(6). – С. 76–80.

2010

242. Об одном вопросе в теории предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. – № 2(66). – С. 19–24.

Климов Дмитрий Михайлович

академик РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

e-mail: klimov@ipmnet.ru

Ковалев Владимир Александрович

доктор физико-математических наук, профессор Московского городского университета управления Правительства Москвы, г. Москва

e-mail: kovalev@migm.ru

Радаев Юрий Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного университета, г. Самара

e-mail: radayev@ssu.samara.ru

Klimov Dmitry Mikhailovich

Academician of RAS, Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Kovalev Vladimir Alexandrovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow City Government University of Management, Moscow, Russia

Radayev Yuri Nickolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, Russia