

И. А. Семенова

ПРИМЕРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНО СИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПОЛОСЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Проблеме решения бигармонического уравнения в конечных канонических областях с угловыми точками границы (бигармоническая проблема) почти 200 лет (см. обзор [3]). В теории упругости она обычно формулируется в простейшей постановке следующим образом: найти решение бигармонического уравнения в прямоугольной полуполосе, продольные стороны которой не нагружены, а на торце заданы нормальное и касательное напряжения. Если решение для полуполосы построено, то решение для прямоугольника уже не представляет труда получить. В серии публикаций, подытоженных статьей [13], была развита общая теория, дана схема решения задачи в полуполосе и рассмотрены различные примеры. Но только для симметричной деформации полуполосы. В этой работе даются примеры решения обратно-симметричной задачи для полуполосы. Продольные стороны полуполосы свободны, а на торце заданы нормальные и касательные напряжения. Решение представляется в виде явных разложений по функциям Фадля – Папковича, коэффициенты которых определяются как интегралы Фурье от заданных на торце полуполосы граничных функций. Работа базируется на статье [13] и на статье [18], в которых даны соотношения биортогональности и разложения Лагранжа для обратно симметричной задачи.

Ключевые слова: полуполоса, краевая задача, функции Фадля – Папковича, точные аналитические решения, обратно симметричная задача.

УДК: 539.3

Материал и методика исследований. Рассмотрим решение первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе $\{\Pi : x \geq 0, |y| \leq 1\}$, у которой продольные стороны $y = \pm 1$ не нагружены, т. е. напряжения (рис.1)

$$\sigma_y(y, \pm 1) = \tau_{xy}(y, \pm 1) = 0, \quad (1)$$

а на торцах заданы нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \quad (2)$$

Поступила 10.11.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-31-50033 мол_пр).

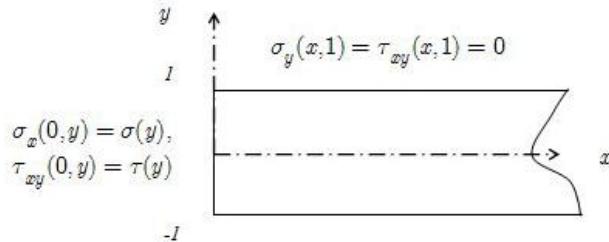


Рис. 1

При построении решения будем пользоваться методом начальных функций [2], в соответствии с которым все перемещения и напряжения в полуполосе находятся по формулам:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= L_{UU}(y)U_0(x) + L_{UV}(y)V_0(x) + L_{UY}(y)Y_0(x) + L_{UX}(y)X_0(x), \\
 V(x, y) &= L_{VU}(y)U_0(x) + L_{VV}(y)V_0(x) + L_{VY}(y)Y_0(x) + L_{VX}(y)X_0(x), \\
 Y(x, y) &= L_{YU}(y)U_0(x) + L_{YV}(y)V_0(x) + L_{YY}(y)Y_0(x) + L_{YX}(y)X_0(x), \\
 X(x, y) &= L_{XU}(y)U_0(x) + L_{XV}(y)V_0(x) + L_{XY}(y)Y_0(x) + L_{XX}(y)X_0(x),
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\sigma_x(x, y) = L_{XU}(y)U_0(x) + L_{XV}(y)V_0(x) + L_{XY}(y)Y_0(x) + L_{XX}(y)X_0(x),$$

в которых используются принятые в методе начальных функций следующие обозначения: $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$, $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$. Здесь G – модуль сдвига, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения. Через $U_0(x)$, $V_0(x)$, ... обозначены начальные функции, а через $L_{UU}(y)$, и т. д. – операторы метода начальных функций:

$$\begin{aligned}
 L_{UU}(\alpha, y) &= L_{XX}(\alpha, y) = \cos \alpha y - \frac{1+\nu}{2}\alpha y \sin \alpha y, \\
 L_{UV}(\alpha, y) &= L_{YX}(\alpha, y) = -\frac{1}{2}[(1-\nu)\sin \alpha y + (1+\nu)\alpha y \cos \alpha y], \\
 L_{UY}(\alpha, y) &= L_{VX}(\alpha, y) = -\frac{1+\nu}{4}y \sin \alpha y, \\
 L_{UX}(\alpha, y) &= \frac{1}{4}\left[\frac{3-\nu}{\alpha}\sin \alpha y + (1+\nu)y \cos \alpha y\right], \\
 L_{VU}(\alpha, y) &= L_{XY}(\alpha, y) = \frac{1}{2}[(1-\nu)\sin \alpha y - (1+\nu)\alpha y \cos \alpha y], \\
 L_{VV}(\alpha, y) &= L_{YY}(\alpha, y) = \frac{1}{2}(1+\nu)\alpha y \sin \alpha y + \cos \alpha y, \\
 L_{YU}(\alpha, y) &= L_{XU}(\alpha, y) = (1+\nu)\alpha^2 y \sin \alpha y, \\
 L_{YV}(\alpha, y) &= (1+\nu)\alpha(\alpha y \cos \alpha y - \sin \alpha y), \\
 L_{XU}(\alpha, y) &= -(1+\nu)\alpha(\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y),
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$A_U(\alpha, y) = (1 + \nu)\alpha(2 \cos \alpha y - \alpha y \sin \alpha y),$$

$$A_V(\alpha, y) = -(1 + \nu)\alpha(\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y),$$

$$A_Y(\alpha, y) = \nu \cos \alpha y - \frac{1}{2}(1 + \nu)\alpha y \sin \alpha y,$$

$$A_X(\alpha, y) = \frac{1}{2}[(1 + \nu)\alpha y \cos \alpha y + (3 + \nu)\sin \alpha y],$$

в которых $\alpha = \partial/\partial x$ [2].

В силу обратной симметрии задаичетные начальные функции $U_0(x) = Y_0(x) = 0$. Удовлетворяя с помощью зависимостей (3) граничным условиям (1), получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций $V_0(x)$, $X_0(x)$:

$$\begin{cases} L_{YV}(1)V_0(x) + L_{YX}(1)X_0(x) = 0, \\ L_{XV}(1)V_0(x) + L_{XX}(1)X_0(x) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Если ввести разрешающую функцию $F(x)$ по формулам:

$$V_0 = L_{YX}(1)F(x), \quad X_0 = -L_{YV}(1)F(x), \quad (6)$$

то тем самым первое уравнение (5) будет тождественно удовлетворено, а из второго, раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим

$$-(1 + \nu)\alpha(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)F'(x) = 0. \quad (7)$$

Разыскивая решение его решения в виде $F'(x) = e^{\lambda x}$, получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$-(1 + \nu)\lambda(\lambda - \sin \lambda \cos \lambda) = 0, \quad (8)$$

которое имеет четыре нулевых корня и бесконечное множество комплексно-сопряженных корней $\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Следовательно, невозрастающая на бесконечности часть решения представима в виде

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\sum} k = 1 \quad (9)$$

(решение сопротивления материалов, отвечающее нулевым корням, можно считать известным и оно не рассматривается).

Подставляя (9) в (6), найдем начальные функции, а затем по формулам (3) все перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \quad x < 0, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}.$$

Функции $\xi(\lambda_k, y), \chi(\lambda_k, y), s_x(\lambda_k, y), s_y(\lambda_k, y), t_{xy}(\lambda_k, y)$, входящие в эти формулы, называются функциями Фадля – Папковича. Они таковы, что граничные условия по продольным сторонам полуполосы удовлетворяются автоматически, поскольку для всех $k = 1, 2, \dots$ $\sigma_y(\lambda_k, \pm 1) = \tau_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = 0$. Входящие сюда функции Фадля – Папковича имеют вид

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_k, y) &= \left(\sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\ \chi(\lambda_k, y) &= - \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\ s_x(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \lambda_k ((2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\ s_y(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \lambda_k ((\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y). \end{aligned} \quad (11)$$

Удовлетворим граничным условиям на торце полуполосы (2) с помощью соответствующих выражений (3). В результате приходим к задаче определения коэффициентов $\{a_k, \overline{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$ из разложений:

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y), \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y). \end{cases} \quad (12)$$

Коэффициенты a_k и $\overline{a_k}$ определяются отсюда в явном виде с помощью систем функций $\{X_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{T_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$, биортогональных к функциям Фадля – Папковича $\{s_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{t_{xy}(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно. Эти функции находятся, как решения функциональных уравнений ($m \geq 1$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_m(y) dy = \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_m(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)}. \quad (13)$$

Здесь $s_x(\lambda, y)$ и $t_{xy}(\lambda, y)$ – порождающие функции. Они получаются из соответствующих функций Фадля – Папковича (11) заменой λ_k на некоторый параметр $\lambda \in \mathbb{C}$. Функция

$$L(\lambda) = \lambda - \sin \lambda \cos \lambda \quad (14)$$

целая, экспоненциального типа, равного 2 [4]. Для комплексных значений λ прямую интегрирования в формулах (13) нужно заменить T -образным контуром, лежащим в плоскости $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [5].

Принимая в формулах (13) $\lambda = \lambda_k$, получим такие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T s_x(\lambda_k, y) X_m(y) dy &= \begin{cases} L'(\lambda_m)/2\lambda_m & (\lambda_k = \lambda_m); \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases} \\ \int_T t_{xy}(\lambda_k, y) T_m(y) dy &= \begin{cases} L'(\lambda_m)/2 & (\lambda_k = \lambda_m); \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

где $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_m$. Из формул (13) также получаем следующие равенства, справедливые при всех $m, k \geq 1$:

$$\int_T s_x(\bar{\lambda}_k, y) X_m(y) dy = \int_T s_x(\lambda_k, y) \overline{X_m(y)} dy = 0,$$

$$\int_T t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) T_m(y) dy = \int_T t_{xy}(\lambda_k, y) \overline{T_m(y)} dy = 0.$$

Функции $X_m(y)$ и $T_m(y)$ можно представить в виде суммы финитных $x_m(y)$ и $t_m(y)$, т. е. не равных нулю на отрезке $|y| \leq 1$, и не финитных частей. При решении краевых задач, как правило, используются финитные части биортогональных функций. Окончательные формулы для них (они строятся так же, как и для симметричной задачи [2]) имеют такой вид

$$x_m(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_m^2} \left(\frac{\sin \lambda_m y}{\sin \lambda_m} - y \right), \quad t_m(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_m} \frac{\cos \lambda_m y}{\sin \lambda_m}. \quad (16)$$

Схема определения коэффициентов a_k из разложений (12) для симметричной задачи подробно описана в статье [18]. Для обратно симметричной задачи она остается той же. Поэтому приведем сразу формулы для напряжений и перемещений в полуполосе, разделяя два случая: а) когда на торце заданы ненулевые нормальные напряжения, а касательные равны нулю и б) когда на торце заданы ненулевые касательные напряжения, а нормальные равны нулю ($c_k = Re\lambda_k < 0, b_k = Im\lambda_k$).

$$\begin{aligned} a) U(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{M_k \lambda_k^2} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Другая форма представления формул (17) более общая, хотя и менее наглядная:

$$\begin{aligned} a) U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{Im(-e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{M_k \lambda_k^2} \frac{Im(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{Im(-e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}.$$

Здесь числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy, \quad M_k = \sin^2 \lambda_k / \lambda_k. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} b) \quad U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \left(2c_k \cos b_k x + \frac{c_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \tau_k &= \int_{-1}^1 \tau(y) t_k(y) dy \end{aligned} \quad (20)$$

или

$$\begin{aligned} b) \quad U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{Im(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим пример, когда на торце полуполосы заданы самоуравновешенные касательные напряжения

$$\tau(y) = sign(y) \sin(2\pi y). \quad (23)$$

По формуле (21) найдем

$$\tau_k = \frac{2\pi(\cos \lambda_k - 1)}{(\nu + 1)\lambda_k \sin \lambda_k (\lambda_k^2 - 4\pi^2)}. \quad (24)$$

Подставляя числа (24) в формулы (20), получим решение задачи. На рис.2 показано распределение напряжений в сечении $x = 0.02$, где кривые распределения нормальных и касательных напряжений обозначены как $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ и $\tau_{xy}(x, y)$ на торце полуполосы, обозначенные как $sx(x, y)$, $sy(x, y)$ и $txy(x, y)$ соответственно.

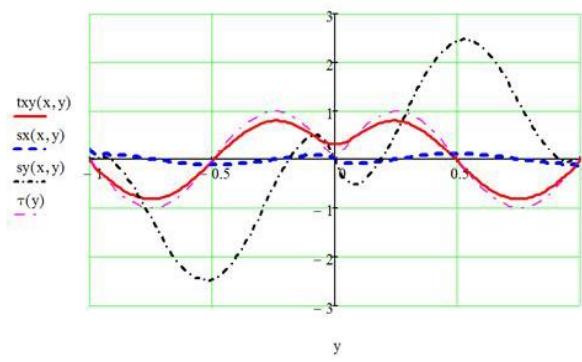


Рис. 2

Приведем еще один пример, когда на торце полуполосы в начале координат приложена изгибающая сосредоточенная сила интенсивности, равная 1. Сила приложена по касательной к торцу и направлена вниз. Ниже изображен график для данного случая в сечении $x = 0.02$.

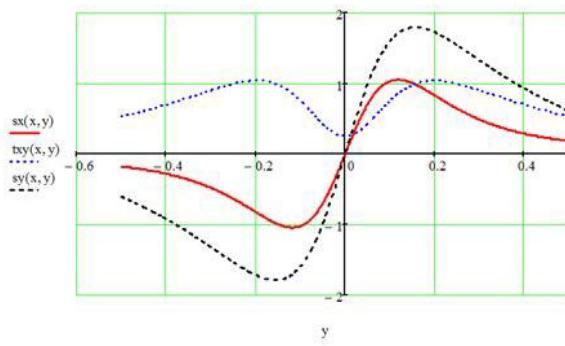


Рис. 3

Результаты исследований и их обсуждение. Получены интегральные соотношения для определения систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича, возникающих в обратно-симметричной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [2] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.

- [3] *Meleshko, V. V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – No. 1. – P. 33–85.
- [4] *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудъер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
- [5] *Меньшова, И. В.* Разложения по функциям Фадля – Папковича в полуполосе. Обратно-симметрическая задача / И. В. Меньшова, И. А. Семенова, Н. В. Храмова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2 (20). – С. 119–130.
- [6] *Леонтьев, А. Ф.* Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1976. – 536 с.
- [7] *Коробейник, Ю. Ф.* Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Математика. – 1980. – Т. 44. – № 5. – С. 1066–1114.
- [8] *Коробейник, Ю. Ф.* Представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // УМН. – 1981. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 73–126.
- [9] *Коробейник, Ю. Ф.* Представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Математика. – 1978. – Т. 42. – № 2. – С. 325–355.
- [10] *Левин, Б. Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.
- [11] *Ахиезер, Н. И.* Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М. : Наука, 1965. – 407 с.
- [12] *Ибрагимов, И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И. И. Ибрагимов. – М. : Наука, 1971. – 518 с.
- [13] *Коваленко, М. Д.* Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [14] *Pflüger A.* Ueber eine „Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reichen // Commentarii Mathem. Helv. – 1935/36. – Vol. 8. – P. 89–129.
- [15] *Коваленко, М. Д.* О преобразовании Бореля в классе W квазицелых функций / М. Д. Коваленко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – № 3. – С. 761–774.
- [16] *Шемякин, Е. И.* О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) / Е. И. Шемякин // Доклады РАН. – 1996. – Т. 347. – № 3. – С. 342–345.
- [17] *Маркушевич, А. И.* Целые функции. Элементарный очерк / А. И. Маркушевич. – М. : Наука, 1965. – 108 с.
- [18] *Коваленко, М. Д.* Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратно-симметрической задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 5(15). – С. 81–89.

Семенова Ирина Александровна,
аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: irishka_g_05@mail.ru

I. A. Semenova

**EXAMPLES OF ANALYTICAL SOLUTIONS IS INVERSELY SYMMETRIC
BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY IN POLOPOLO**

Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The problem of solving the biharmonic equation in a finite canonical domains with corner points of the boundary (biharmonic problem) exists almost 200 years (see the review [3]). In the theory of elasticity it is usually formulated as the problem of finding the solution of the biharmonic equation in rectangular half-strip, the longitudinal sides of which are not loaded, and at the end the normal and tangential stresses are set. If the decision to half-strip is built, the decision for a rectangle is not difficult already. In the series of publications, summarized the articles [13], the general theory was developed, the scheme of the solution of the problem in half-strip was given and various examples were considered (looked through). But it was done only for symmetric deformation of half-strip. In this work the examples of solutions the back-symmetric problem for half-strip are provided. The longitudinal sides of half-strip are free, and at the end the normal and shear stresses are set. The solution is appeared in the form of explicit expansions for Fadle-Papkovich functions which coefficients are defined as Fourier integrals given at the end of half-strip boundary functions. The work is based on the article [13] and the article [18], in which the ratio of biorthogonality and decomposition Lagrangian for backward symmetric tasks are given.

Keywords: semistrip, boundary-value problem, Fadle-Papkovich functions, analytical solutions, antisymmetric boundary-value problem.

REFERENCES

- [1] Kovalenko, M. D. Decomposition on Fadly – Papkovich’s functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.
- [2] Vlasov, V. V. Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [3] Meleshko, V. V. Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – P. 33–85.
- [4] Tymoshenko, S. P. Theory of Elasticity / S. P. Tymoshenko, J. Goodier. – M. : Nauka, 1975. – 576 p.
- [5] Menshova, I. V. Decompose in funktsiyamFadlan – Papkovicha in polupolos. Backsimmetrichnoy problems / I. V. Menshova, I. A. Semenova, N. V. Khramova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2014. – № 2 (20). – P. 119–130.
- [6] Leontiev, A. F. Exponential series / A. F. Leontiev. – M. : Nauka, 1976. – 536 p.
- [7] Korobeynik, Yu. F. Interpolation problems, nontrivial expansions of zero, and representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. USSR Academy of Sciences. Mathematics. – 1980. – Vol. 44. – № 5. – P. 1066–1114.
- [8] Korobeynik, Yu. F. Representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. - 1981. – Vol. 36. – Issue 1. – P. 73–126.
- [9] Korobeynik, Yu. F. Representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. USSR Academy of Sciences. Mathematics. – 1978. – Vol. 42. – № 2. – P. 325–355.
- [10] Levin, B. Ya. Distribution of zeros of entire functions / B. Ya. Levin. – M. : Gostekhizdat, 1956. – 632 p.
- [11] Akhiezer, N. I. Lectures on the theory of approximation / N. I. Akhiezer. – M. : Nauka, 1965. – 407 p.

- [12] Ibragimov, I. I. Interpolation methods and functions some of their applications / I. I. Ibragimov. – M. : Nauka, 1971. – 518 p.
- [13] Kovalenko, M. D. Decomposition on functions Fadly – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.
- [14] Pflüger A. Übereine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reichen // Commentarii Mathem. Helv. – 1935/36. – Vol. 8. – P. 89–129.
- [15] Kovalenko, M. D. Borel transformations in the class W quasi-functions / М. Д. Коваленко // Fundamental and Applied mathematics. – 2001. – № 3. – P. 761–774.
- [16] Shemyakin, E. I. On boundary value problems of elasticity theory for domains with corners (plane strain) / E. I. Shemyakin // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1996. – Vol. 347. – № 3. – P. 342–345.
- [17] Markushevich, A. I. Entire functions. elementary outline / A. I. Markushevich. – M. : Nauka, 1965. – 108 p.
- [18] Kovalenko, M. D. Decompose in Lagrange funktsiyamFadlan – Papkovicha in backsimmetrichnoy Theories uprugostidlyapryamougolynoy polupolos / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 5 (15). – P. 81–89.

Semenova, Irina Alexandrovna

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary