Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 42–54

Р. Ю. Аmензаде, Г. Ю. Мехтиева, Л. Ф. Фатуллаева

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ МЕХАНИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Бакинский государственный университет

Аннотация. Дается формулировка и доказательство смешанного вариационного принципа для трехмерной теории нелинейной вязко-упругости, позволяющего независимо задавать предположительные поля напряжений и перемещений. Учитывается мгновенная упруго-пластическая деформация. Используются точные выражения для компонент тензора деформации через перемещения. Приводится процедура его модификации на случай кусочно-неоднородного тела, составленного из конечного числа частей. Условия сопряжения на поверхностях контакта принципиально различны и заключаются либо в их полном сцеплении, либо – напряженной посадке. Дается видоизменение построенных функционалов на случай упруго-пластических (нелинейно-упругих) деформаций.

Ключевые слова: нелинейность, вязко-упругость, напряжение, деформация, вариация, гетерогенность, сопряжение.

УДК: 539.375

Введение. В современной технике широко используются конструкции, изготовленные из материалов, уравнения состояния которых достаточно хорошо описываются соотношениями теории нелинейной вязко-упругости. Важно подчеркнуть, что при этом для ряда важных задач, таких как устойчивость и выпучивание, необходимо учитывать также геометрическую нелинейность. При решении конкретных задач возникают большие трудности математического характера. Это обстоятельство связано с тем, что теоретические исследования в этой области приводят к интегрированию нелинейных краевых задач. Получение здесь аналитических решений весьма затруднительно, а порою невозможно. Поэтому возникает необходимость в разработке и применении к таким важным в прикладном аспекте задачам эффективных приближенных, в частности вариационных методов.

В последние годы существенно изменилась точка зрения на вариационные методы в механике деформируемого твердого тела. Возможности построения вариационных принципов разного рода, т.е. нахождение функционалов, для которых уравнения задачи являются уравнениями Эйлера, оказались значительно более широкими, чем это казалось ранее. Выявилась возможность достаточно свободного выбора независимых функциональных аргументов [1, 2]. В работе [3] в геометрически нелинейной

Поступила 06.05.2010

постановке в скоростях предложен вариационный метод смешанного типа для определения напряженно-деформированного состояния анизотропных нелинейно вязкоупругих тел. Полагалось, что мгновенная деформация линейно-упругая. В [4] дано обобщение этого принципа на случай гетерогенных сред.

В представленной работе дается обобщение этих принципов для случая, когда мгновенная деформация упруго-пластическая и подчиняется уравнениям типа теории течения.

1. Вариационный принцип смешанного типа для однородных сред. Рассмотрим в трехмерном Эвклидовом пространстве тело и предположим, что под действием нагрузок в нем возникает мгновенная упруго – пластическая деформация ε_{ij}^{M} и деформация ползучести p_{ij}, так, что полная деформация ε_{ij}^{Φ} имеет вид

$$\varepsilon_{ij}^{\Phi} = \varepsilon_{ij}^{M} + \dot{p}_{ij},$$

или в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\Phi} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{M} + \dot{p}_{ij}. \tag{1.1}$$

Далее, точка над символами означает дифференцирование по физическому времени t. При этом мгновенная деформация подчиняется уравнениям типа теории течения. Физический закон для такой среды запишем в форме [5]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{M} = H_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl}, \tag{1.2}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{M}$-ковариантный тензор скоростей деформаций, $\dot{\sigma}^{kl}$-контравариантный тензор скоростей напряжений, а точка означает дифференцирование по времени t. Причем механические характеристики $H_{ijkl} = H_{klij}$ не зависят от скоростей деформаций и напряжений. Условимся считать, что деформация ползучести описывается соотношениями нелинейной теории вязко-упругости. Тогда, с учетом анизотропии имеем, [6]:

$$p_{ij} = \int\limits_0^t F'_{ij}\left[t-\tau,\, \sigma^{kl}(\tau)\right] d\tau \qquad (i, j = 1,\ 2,\ 3)\,. \tag{1.3}$$

Здесь F_{ij}- функция ползучести, а штрих означает частное дифференцирование по параметру $t-\tau$,

$$F'_{ij}\left[t-\tau,\, \sigma^{kl}(\tau)\right] = \frac{\partial}{\partial(t-\tau)}F_{ij}\left[t-\tau,\, \sigma^{kl}(\tau)\right] = -\frac{\partial}{\partial\tau}F_{ij}\left[t-\tau,\, \sigma^{kl}(\tau)\right].$$

Отметим, что соотношение (1.3) является достаточно хорошей аппроксимацией уравнения состояния для широкого класса материалов (металлы и их сплавы, композиты и полимеры), свойства которых невозможно описать в рамках классических моделей теории упругости, пластичности и вязкой жидкости.

Взяв в уравнении (1.3) производную по t, находим:

$$\dot{p}_{ij} = \int\limits_0^t F''_{ij}\left[t-\tau,\, \sigma^{kl}(\tau)\right] d\tau + F'_{ij}\left[0,\, \sigma^{kl}(t)\right]. \tag{1.4}$$

Подставляя (1.2) и (1.4) в равенство (1.1), будем иметь:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\Phi} = H_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl} + \int\limits_0^t F''_{ij}\left[t-\tau,\, \sigma^{kl}(\tau)\right] d\tau + F'_{ij}\left[0,\, \sigma^{kl}(t)\right]. \tag{1.5}$$

Рассмотрим теперь равновесие (предполагается, что динамическими эффектами можно пренебречь) выбранной среды объема V, ограниченного достаточно гладкой поверхностью S. Положим, что на части поверхности S_u заданы ковариантные компоненты вектора смещения $u_i^{(0)}$, а на оставшейся части S_σ- контравариантные составляющие вектора поверхностных сил $T^{i(0)}$, определяемые зависимостями

$$T^i = \sigma^{kj} n_j \left(\delta_k^i + \nabla_k u^i\right), \tag{1.6}$$

в которых, n_j - нормаль к поверхности недеформируемого тела, ∇_k - оператор ковариантного дифференцирования, u^i - контравариантные составляющие вектора перемещения, δ_k^i - тензор Кронекера.

Пользуясь точными выражениями для компонент тензора деформации, равновесие среды описывается следующей нелинейной краевой задачей:

$$\nabla_j \left[\sigma^{ij} \left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right)\right] = 0, \tag{1.7}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\Phi} = H_{ijkl} \dot{\sigma}^{kl} + \int\limits_0^t F_{ij}'' \left[t-\tau,\, \sigma^{kl}(\tau)\right] d\tau + F_{ij}' \left[0,\, \sigma^{kl}(t)\right], \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k\right), \tag{1.9}$$

$$T^k = T^{k(0)} \text{ на } S_\sigma,\ u_k = u_k^{(0)} \text{ на } S_u, \tag{1.10}$$

причем $S = S_u \cup S_\sigma$.

Докажем утверждение, что рассматриваемую краевую задачу можно сформулировать с помощью вариационной теоремы следующим образом: стационарное значение функционала,

$$\delta R = 0,$$

который представлен в виде

$$R = \int\limits_V \left\{\dot{\sigma}^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k - \frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij}\right)\dot{\sigma}^{ij}\right\} dV -$$
$$- \int\limits_{S_u} \left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}\right) \dot{T}^i dS - \int\limits_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)} \dot{u}_i dS, \tag{1.11}$$

при выполнении равенств (1.8) и (1.9) в качестве уравнений Эйлера приводит к нелинейным уравнениям равновесия (1.7) и нелинейным граничным условиям (1.6).

Найдем вариацию этого функционала в предположении, что функциональные аргументы $\dot{\sigma}^{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ варьируются независимо. Будем также учитывать, что оператор варьирования δ действует на скорости величин, но не на сами величины. Тогда из (1.11) получим:

$$\delta R = \int\limits_V \left\{\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\sigma}^{ij} + \dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_j\dot{u}_k\delta\left(\nabla_i\dot{u}^k\right) - \frac{1}{2}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}^M\dot{\sigma}^{ij} -\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij}\right)\delta\dot{\sigma}^{ij}\right\} dV - \int\limits_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)}\delta\dot{u}_i dS - \int\limits_{S_u} \left[\left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}\right)\delta\dot{T}^i\right] dS, \tag{1.12}$$

здесь учитывался тот факт, что по определению $\delta\dot{p}_{ij}=0$, а для выполнения граничных условий принимаются равенства $\delta\dot{T}^i=0$ на S_σ и $\delta\dot{u}_i=0$ на S_u.

Поскольку тензор H_{ijkl} не зависит от скоростей, то

$$\delta\dot{\varepsilon}_{ij}^M=H_{ijkl}\delta\dot{\sigma}^{kl}.$$

Умножая последнее равенство на $\dot{\sigma}^{ij}$и замечая, что $H_{ijkl}\dot{\sigma}^{ij}=\dot{\varepsilon}_{kl}^M$, находим:

$$\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}^M=\dot{\varepsilon}_{ij}^M\delta\dot{\sigma}^{ij}. \tag{1.13}$$

Отдельно рассмотрим четвертое слагаемое в выражении (1.12). Из симметрии тензора напряжений имеем:

$$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_j\dot{u}_k\delta\left(\nabla_i\dot{u}^k\right)=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}_k\delta\left(\nabla_j\dot{u}^k\right),$$

или, в силу очевидных соображений

$$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\left(g_{kr}\dot{u}^r\right)\delta\left(\nabla_j g^{km}\dot{u}_m\right)=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\left(\dot{u}^k\right)\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right),$$

где g_{kr} и g^{kr} соответственно ковариантный и контравариантный метрический тензоры.

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_j\dot{u}_k\delta\left(\nabla_i\dot{u}^k\right)=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right).$$

Таким образом, установлен факт равенства третьего и четвертого слагаемых в (1.12). Это обстоятельство и формула (1.13) позволяют переписать (1.12) следующим образом:

$$\delta R=\int\limits_V\left\{\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\sigma}^{ij}+\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}+\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right)-\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M+\dot{p}_{ij}\right)\delta\dot{\sigma}^{ij}\right\}dV-$$
$$-\int\limits_{S_\sigma}\dot{T}^{i(0)}\delta\dot{u}_i dS-\int\limits_{S_u}\left[\left(\dot{u}_i-\dot{u}_i^{(0)}\right)\delta\dot{T}^i\right]dS. \tag{1.14}$$

По формуле (1.9)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}\left\{\nabla_i\dot{u}_j+\nabla_j\dot{u}_i+\nabla_i u^k\nabla_j\dot{u}_k+\nabla_j u_k\nabla_i\dot{u}^k\right\},$$

а ее вариация записывается как

$$\delta\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}\left\{\delta\nabla_i\dot{u}_j+\delta\nabla_j\dot{u}_i+\nabla_i u^k\delta\nabla_j\dot{u}_k+\nabla_j u_k\delta\nabla_i\dot{u}^k\right\}.$$

Тогда второе слагаемое в (1.12) запишем в форме

$$\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}\left\{\dot{\sigma}^{ij}\delta\nabla_i\dot{u}_j+\dot{\sigma}^{ij}\delta\nabla_j\dot{u}_i+\dot{\sigma}^{ij}\nabla_i u^k\delta\nabla_j\dot{u}_k+\dot{\sigma}^{ij}\nabla_j u_k\delta\nabla_i\dot{u}^k\right\}.$$

После ряда преобразований, характерных для тензорного анализа [7], этому равенству придадим следующий вид:

$$\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}=\dot{\sigma}^{ij}\left\{\delta_i^k+\nabla_i u^k\right\}\delta\nabla_j\dot{u}_k.$$

Теперь вариационное уравнение запишется посредством равенства

$$\delta R=\int\limits_V\left\{\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\sigma}^{ij}+\dot{\sigma}^{ij}\left[\delta_i^k+\nabla_i u^k\right]\delta\nabla_j\dot{u}_k+\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right)-\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M+\dot{p}_{ij}\right)\delta\dot{\sigma}^{ij}\right\}dV-$$

$$-\int\limits_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)}\delta\dot{u}_i dS - \int\limits_{S_u} \left[\left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}\right)\delta\dot{T}^i\right] dS. \tag{1.15}$$

Преобразуя по формуле Гаусса-Остроградского второй интеграл в выражении (1.15), получим:

$$\int\limits_V \dot{\sigma}^{ij}\left[\delta_i^k + \nabla_i u^k\right]\delta\nabla_j\dot{u}_k dV = \int\limits_S \left\{\dot{\sigma}^{ij}\left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right) n_j \delta\dot{u}_k\right\} dS-$$

$$-\int\limits_V \left\{\nabla_j\left[\dot{\sigma}^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right]\delta\dot{u}_k\right\} dV. \tag{1.16}$$

Таким же образом вычислим третий интеграл, для которого запишем:

$$\int\limits_V \sigma^{ij}\nabla_j\dot{u}_k\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right) dV = \int\limits_S \sigma^{ij} n_j \nabla_i \dot{u}^k \delta\dot{u}_k\, dS - \int\limits_V \nabla_j\left(\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\right)\delta\dot{u}_k dV. \tag{1.17}$$

Так как $\delta\dot{u}_k = 0$ на S_u, то поверхностные интегралы в (1.16) и (1.17) отличны от нуля только на поверхности S_σ и таким образом

$$\int\limits_S \left\{\dot{\sigma}^{ij}\left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right) n_j\delta\dot{u}_k\right\} dS = \int\limits_{S_\sigma} \left\{\dot{\sigma}^{ij}\left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right) n_j\delta\dot{u}_k\right\} dS, \tag{1.18}$$

$$\int\limits_S \sigma^{ij} n_j\nabla_i\dot{u}^k\delta\dot{u}_k\, dS = \int\limits_{S_\sigma} \sigma^{ij} n_j\nabla_i\dot{u}^k\delta\dot{u}_k\, dS. \tag{1.19}$$

Вследствие подстановки выражений (1.16), (1.17) в (1.15), и собирая члены при одинаковых независимых вариациях, найдем:

$$\delta R = \int\limits_V \left\{\left[\dot{\varepsilon}_{ij} - \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij}\right)\right]\delta\dot{\sigma}^{ij}\right\} dV-$$

$$-\int\limits_V \left\{\nabla_j\left[\dot{\sigma}^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right] + \nabla_j\left(\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\right)\right\}\delta\dot{u}_k dV+$$

$$+\int\limits_{S_\sigma} \left\{\left[\dot{\sigma}^{ij}\left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right) + \sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\right] n_j - \dot{T}^{k(0)}\delta\dot{u}_k\right\} dS - \int\limits_{S_u} \left(\dot{u}_k - \dot{u}_k^{(0)}\right)\delta\dot{T}^k dS.$$

Заметив, что

$$\nabla_j\left[\dot{\sigma}^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right] + \nabla_j\left(\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\right) = \left\{\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right]\right\}^\bullet,$$

а

$$\dot{\sigma}^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right) + \sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k = \left\{\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right\}^\bullet,$$

выражение δR перепишем следующим образом:

$$\delta R = \int\limits_V \left[\varepsilon_{ij} - \left(\varepsilon_{ij}^M + p_{ij}\right)\right]^\bullet \delta\dot{\sigma}^{ij} dV - \int\limits_V \left\{\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right]\right\}^\bullet \delta\dot{u}_k dV+$$
$$+\int\limits_{S_\sigma} \left\{\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right) n_j - T^{k(0)}\right\}^\bullet \delta\dot{u}_k dS - \int\limits_{S_u} \left(\dot{u}_k - \dot{u}_k^{(0)}\right)\delta\dot{T}^k dS = 0.$$

Учитывая основную лемму вариационного исчисления и формулу (1.6), из условия обращения в нуль вариации δR, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\left(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{M}-p_{ij}\right)^{\bullet}=0,\\ \left\{\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k+\nabla_i u^k\right)\right]\right\}^{\bullet}=0,\\ \left(\dot{T}^{k(0)}=T\right)^{\bullet}\ \text{на}\ S_\sigma,\\ \left(\dot{u}_k=\dot{u}_k^{(0)}\right)^{\bullet}\ \text{на}\ S_u.\end{gathered}\tag{1.20}$$

За начальные условия системы (1.21) примем напряженно-деформированное состояние тела при $t=0$. Это состояние, как это следует из равенства (1.5), является упруго - пластическим, удовлетворяет закону (1.2) и краевым условиям (1.10). Тогда, после интегрирования, получим:

$$\begin{gathered}\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k+\nabla_i u^k\right)\right]=0,\\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{\Phi}=\dot{\varepsilon}_{ij}^{M}+\dot{p}_{ij},\\ T^i=T^{i(0)}\ \text{на}\ S_\sigma,\\ u_i=u_i^{(0)}\ \text{на}\ S_u.\end{gathered}\tag{1.21}$$

Как видно из полученной в результате интегрирования системы (1.20), первое уравнение является уравнением равновесия, а последние два равенства соответствуют краевым условиям (1.10). В совокупности указанное позволяет констатировать, что для функций, описывающих равновесие нелинейно-наследственного тела при мгновенной упруго - пластической деформации, подчиняющейся уравнениям типа теории течения, функционал (1.11) стационарен и выделяет истинные поля напряжений и перемещений из всех статически возможных. Это и доказывает сформулированное выше утверждение.

Если мгновенная деформация нелинейно-упругая, то

$$\varepsilon_{ij}^{M}=\varphi_{ij}\left(\sigma^{kl},g^{km}\right),$$

или в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{M}=\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial\sigma^{kl}}\dot{\sigma}^{kl}=A_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl}.$$

Следовательно, в этом случае постановка краевых задач в скоростях будет такой же, как и выше, с той лишь разницей, что вместо H_{ijkl} фигурируют величины другой физической природы A_{ijkl}.

Таким образом, приходим к весьма важному выводу, что различные по существу задачи в вариационной постановке (1.11) математически идентичны.

2. Вариационный принцип для гетерогенных сред. В настоящее время на практике используются различные по свойствам материалы. Однако однородный (простой) материал редко обладает свойствами, соответствующими требованиям конкретного применения. Опыты и вычисления показали, что, комбинируя материалы, то есть, создавая и используя неоднородность, зачастую можно добиться благоприятного сочетания свойств, которые дают возможность оптимального использования конструкционных сред. Неоднородность можно рассматривать или как идеализацию непрерывного изменения физико-механических свойств от точки к точке, или как скачкообразное изменение свойств при прохождении через поверхность раздела. Здесь будет рассмотрен второй случай, когда в гетерогенной среде различные фазы (включения) остаются отчетливо выраженными.

Создание и широкое применение в технике, машиностроении, станкостроении, авиастроении и т.д. композитных материалов приводит к необходимости определения напряженно-деформируемого состояния в средах, изготовленных из различных материалов, сопряженных между собой посредством полного сцепления либо - посадки. Широкий класс таких задач для линейной теории упругости в плоской постановке, как известно, удобно решать с использованием методов теории функций комплексного переменного в сочетании с теорией конформного отображения [8]. При решении задач, когда тела имеют сложную пространственную конфигурацию, составлены из конечного числа включений (частей), материалы которых различны и нелинейно вязкоупругие, деформации конечны, возникают дополнительные математические трудности, связанные с наличием в уравнениях разрывных коэффициентов и необходимостью учета условий сопряжения между соседними элементами. Поэтому здесь приводим модификацию изложенного вариационного принципа на случай гетерогенных сред. Перейдем к непосредственному описанию процедуры соответствующего обобщения.

Пусть, как и выше, рассматриваемое тело занимает в трехмерном эвклидовом пространстве с криволинейными координатами x^γ область V, ограниченную замкнутой поверхностью S. При постановке контактной краевой задачи, которую будем обсуждать в дальнейшем, предполагаем, что тело состоит из K элементов. Элемент с номером k занимает объем V_k с поверхностью S_k. Принимаем, что $S_k = S_k^{(1)} + S_k^{(2)}$ где $S_k^{(1)}$ граница объема V_k, не имеющая общих точек с S, а $S_k^{(2)}$ является частью общей границы тела. Очевидно, что для объемов, которые не имеют общих точек с границей S имеет место $S_k = S_k^{(1)}$.

На поверхности $S_{k\sigma}^{(2)}$ заданы усилия $T^{\alpha(0)}$, а на оставшейся - перемещения $u_\alpha^{(0)}$. Дополнительно потребуем, чтобы поверхности $S_k^{(1)}$и$S_k^{(2)}$ были достаточно гладкими. В основу используемой здесь теории гетерогенных сред становятся следующие предпосылки:

- в процессе деформации элементы контактируют друг с другом вдоль всей их общей поверхности;

- деформации конечны.

Далее будем исходить из того, что на поверхностях контакта выполняются условия либо полного сцепления, либо напряженной посадки.

Для k-го элемента обозначим через $\sigma_{(k)}^{ij}$ и $\varepsilon_{ij(k)}$ соответственно тензор напряжений и деформаций, $u_{i(k)}$ - вектор перемещения, $n_{i(k)}$ - единичную нормаль к поверхности. Для того чтобы учесть, что материалы разных элементов различны, а их физико-математические свойства описываются соотношениями нелинейной теории вязко – упругости, соотношение (1.1) удобно записать в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(k)}^{\Phi} = \dot{\varepsilon}_{ij(k)}^{M} + \dot{p}_{ij(k)},$$

где, следуя (1.5), имеем:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(k)}^{M} = H_{ijml(k)} \dot{\sigma}_{(k)}^{ml} \left(x^\gamma, t\right),$$

$$\dot{p}_{ij(k)} = \int\limits_0^t F_{ij(k)} \left[t-\tau,\, \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \left(x^\gamma, \tau\right) \right] d\tau + F'_{ij(k)} \left[0, \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \left(x^\gamma, t\right) \right].$$

Рассмотрим равновесие мысленно выбранного объема, прилагая к части границы $S_k^{(1)}$ силы $T_{(k)}^{\alpha(00)}$, действующие на него со стороны других, контактирующих с ним, объемов, либо считая известными перемещения $u_{i(k)}^{(00)}$. Тогда для геометрически нелинейной теории оно описывается следующей краевой задачей:

$$\nabla_j \left\{ \sigma_{(k)}^{ij} \left(\delta_i^\alpha + \nabla_i u_{(k)}^\alpha \right) \right\} = 0,$$

$$\varepsilon_{ij(k)}^{\Phi} = \varepsilon_{ij(k)} + p_{ij(k)},$$

$$2\varepsilon_{ij(k)} = \left\{ \nabla_i u_{j(k)} + \nabla_j u_{i(k)} + \nabla_i u_{(k)}^\alpha \nabla_j u_{\alpha(k)} \right\},$$

для $\forall x^k \in V_k$ и $u_{i(k)} = \bar{u}_{i(k)}^{(0)}$ на S_{ku}, $T_{(k)}^{\alpha(0)} = \bar{T}_{(k)}^\alpha$ на $S_{k\sigma}$.

Здесь весьма важно подчеркнуть, что в самом общем случае, согласно общей постановке задачи,

$$\bar{u}_{i(k)} = \begin{cases} u_{i(k)}^{(0)} & \forall s \in S_{ku}^{(2)}, \\ \\ u_{i(k)}^{(00)} & \forall s \in S_{ku}^{(1)}. \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\bar{T}_{(k)}^\alpha = \begin{cases} T_{(k)}^{\alpha(0)} & \forall s \in S_{k\sigma}^{(2)}, \\ \\ T_{(k)}^{\alpha(00)} & \forall s \in S_{k\sigma}^{(1)}. \end{cases} \tag{2.2}$$

К перечисленным уравнениям должны быть добавлены условия сопряжения на $S_{(k)}^{(1)}$. Установим два рода контактных условий:

а) условие полного сцепления между соседними элементами, когда

$$T_{(k)}^{i+} = T_{(k)}^{i-}; u_{i(k)}^{+} = u_{i(k)}^{-}, \tag{2.3}$$

где знаками "$+$" и "$-$" обозначены значения функций в точках сопряжения при переходе к ним справа и слева от линии контакта;

б) наличие заданной функции скачка смещения $f_{n(k)}\left(S\right)$, нормального к поверхности границы,

$$u_{n(k)}^{+} - u_{n(k)}^{-} = f_{n(k)}\left(S\right) \tag{2.4}$$

и отсутствие сил трения (посадка) на этой поверхности.

$$T_{(k)}^{\tau} = 0. \tag{2.5}$$

Как и выше, для дальнейших целей, выделим произвольный элемент объемом V_k.

Следуя (1.11), выпишем следующий функционал для этого объема:

$$R_k = \int\limits_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}_{(k)}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij(k)} + \frac{1}{2} \sigma_{(k)}^{ij} \nabla_i \dot{u}_{(k)}^m \nabla_j \dot{u}_{m(k)} - \frac{1}{2} \left(\dot{\varepsilon}_{ij(k)}^M + 2\dot{p}_{ij(k)} \right) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV -$$

$$- \int\limits_{S_{ku}} \dot{T}^i \left(\dot{u}_{i(k)} - \bar{u}_{i(k)} \right) dS - \int\limits_{S_{k\sigma}} \dot{\bar{T}}_{(k)}^\alpha \dot{u}_{\alpha(k)} dS. \tag{2.6}$$

Здесь, S_{ku} и $S_{k\sigma}$ участки границы, где считаются известными либо заданными перемещения $\bar{u}_{i(k)}$ и усилия $\bar{T}^{\alpha}_{(k)}$ (см. формулы (2.1) и (2.2)). Отметим, что в (2.6) $\dot{\sigma}^{ij}_{(k)}$, $\dot{u}_{i(k)}$ - независимые функциональные аргументы. Теперь перейдем к построению функционала для всего объема в целом, когда тело составлено из K элементов. Это обобщение, в случае многокомпонентности, как будет установлено ниже, отнюдь не является тривиальным. В этом случае функционал (2.6) необходимо модифицировать таким образом, чтобы были учтены условия сопряжения а) или б) между соседними элементами. С этой целью, вначале, просуммируем функционал (2.6) по всем его компонентам. В дальнейшем, без ущерба для изложения и компактности записи, индекс k у фигурирующих под интегралами величин будем опускать. Тогда, следуя вышеизложенному, запишем:

$$R=\sum_{k}^{K}R_k=\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{V_k}\left\{\dot{\sigma}^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^m\nabla_j\dot{u}_m-\frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}+2\dot{p}_{ij}\right)\dot{\sigma}^{ij}\right\}dV-$$

$$-\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{S_{ku}}\dot{T}^i\left(\dot{u}_i-\dot{\bar{u}}_i\right)dS-\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{S_{k\sigma}}\dot{\bar{T}}^{\alpha}\dot{u}_{\alpha}dS. \tag{2.7}$$

Далее следует учесть контактные условия. Положим, что на некотором числе контактных поверхностей осуществляются условия типа а), а на оставшихся - условия б). Совершенно очевидно, что поверхностные интегралы в (2.7) для участков сопряжения с условиями типа а) в силу (2.3) взаимно сократятся. Докажем, что в выражении (2.7) останутся лишь поверхностные интегралы по границам, где заданы условия типа б) и по общей поверхности всего объема тела. Для этого в функционале (2.7) выделим стоящий под знаком суммы второй поверхностный интеграл

$$\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{S_{k\sigma}}\dot{\bar{T}}^{\alpha}\dot{u}_{\alpha}dS,$$

который, если разбить область интегрирования и учесть равенство (2.2), можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{S_{k\sigma}}\dot{\bar{T}}^{\alpha}\dot{u}_{\alpha}dS=\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{S^{(1)}_{k\sigma}}\dot{T}^{\alpha(00)}\dot{u}_{\alpha}dS+\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{S^{(2)}_{k\sigma}}\dot{T}^{\alpha(0)}\dot{u}_{\alpha}dS. \tag{2.8}$$

Принимая во внимание тот факт, что полная поверхность всего тела есть

$$S=\sum_{k=1}^{K}S^{(2)}_{k},$$

второй интеграл в правой части (2.8) перепишем как

$$\int\limits_{S_{\sigma}}\dot{T}^{\alpha(0)}\dot{u}_{\alpha}dS. \tag{2.9}$$

Преобразуем первый интеграл, фигурирующий в правой части (2.8). Имеем:

$$\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} \dot{u}_\alpha dS = \sum_{k=1}^{K_1} \left\{ \int\limits_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha^+(00)} \dot{u}_\alpha^+ dS + \int\limits_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha^-(00)} \dot{u}_\alpha^- dS \right\},$$

где K_1 $(K_1 < K)$ - общее число внутренних контактных поверхностей.

Выбирая одну и ту же нормаль и опуская знак "$+$", у вектора напряжения согласно сделанным предположениям б) правую часть предыдущего равенства запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{K_1} \int\limits_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} \left(\dot{u}_\alpha^+ - \dot{u}_\alpha^- \right) dS = \sum_{k=1}^{K_1} \int\limits_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS. \tag{2.10}$$

Учитывая (2.9) и (2.10), вместо (2.8) получим следующее равенство

$$\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{S_{k\sigma}} \dot{\bar{T}}^{\alpha} \dot{u}_\alpha dS = \int\limits_{S_\sigma} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS + \sum_{k=1}^{K_1} \int\limits_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS. \tag{2.11}$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{S_{ku}} \dot{T}^{i} \left(\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i \right) dS = \int\limits_{S_u} \dot{T}^{i} \left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)} \right) dS. \tag{2.12}$$

Если теперь подставить (2.11) и (2.12) в (2.7), получим окончательное выражение функционала:

$$R = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^m \nabla_j \dot{u}_m - \frac{1}{2} \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{M} + 2\dot{p}_{ij} \right) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV -$$

$$- \int\limits_{S_\sigma} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS - \int\limits_{S_u} \dot{T}^{i} \left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)} \right) dS - \sum_{k=1}^{K_1} \int\limits_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS. \tag{2.13}$$

Из вида (2.13) вытекает справедливость сформулированного выше утверждения.

Таким образом, полученный функционал описывает поведение всего многокомпонентного тела. Отметим, что здесь суммирование производится по тем граничным поверхностям, где реализуются условия типа б). Запись (2.13) хороша в том отношении, что в ней выделен член, который исчезает, если потребовать, чтобы $f_{(n)} = 0$ т.е., чтобы был реализован случай полного сцепления.

Заключение. Теперь, в силу высказанных предположений, более определенно отметим сущность предложенных вариационных методов. Центральным местом теории нелинейной вязко-упругости является вопрос о выборе конкретного вида функций F_{ij}, используемых в качестве ядер интегральных определяющих уравнений наследственного типа (1.3). Обычно при выборе ядер следует руководствоваться следующими соображениями: с одной стороны получить наилучшее согласование с экспериментом, а с другой стороны – обеспечить удобство применения математического аппарата при решении конкретных задач. Данный принцип допускает использование таких ядер, производные которых по $t - \tau$ не обладают сингулярностью при $t - \tau = 0$.

Характерной особенностью построенных функционалов является то, что они выписаны в скоростях. Если построить аналогичные функционалы типа Рейснера, то применение численных методов, например метода Ритца, приводит к решению системы нелинейных алгебраических уравнений или системы трансцендентных уравнений, реализация которых на ЭВМ весьма затруднительна. Применение же аналогичного приближенного метода в данной постановке приводит к решению системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (задача Коши), численная реализация которой значительно проще.

В данном случае начальные условия представляют значения соответствующих функциональных аргументов немедленно после приложения нагрузок. Так как мгновенная деформация упруго-пластическая (нелинейно-упругая), то для их определения необходимо видоизменить функционалы (1.11) и (2.13). С этой целью отбросим в них величины $\dot{p}_{ij}$, учитывающие ползучесть, а в качестве времени примем любой монотонно изменяющийся параметр, характеризующий процесс нагружения. Для рассматриваемого класса задач за такой параметр естественно принять величину, какой либо из действующих сил. Этот факт следует из того, что функционалы (1.11) и (2.13) однородны относительно производной по t. Следовательно, пользуясь подобным приемом, можно записать

$$R = \int\limits_V \left\{ \dot{\sigma}^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^M_{ij}\,\dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \int\limits_{S_u} \left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)} \right) \dot{T}^i dS - \int\limits_{S_\sigma} \dot{T}^i \dot{u}_i^{(0)} dS,$$

или

$$R = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i \dot{u}^m \nabla_j \dot{u}_m - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^M_{ij}\,\dot{\sigma}^{ij} \right\} dV -$$

$$- \int\limits_{S_\sigma} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS - \int\limits_{S_u} \dot{T}^i \left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)} \right) dS - \sum_{k=1}^{K_1} \int\limits_{S^{(1)}_{k\sigma}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS,$$

задаваясь тем же предположительным распределением перемещений и напряжений, что и при анализе вязко-упругости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Работнов, Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 382 с.

[2] *Васидзу, К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 542 с.

[3] *Амензаде, Р. Ю.* Вариационный принцип нелинейно-вязко-упругости с учетом геометрической нелинейности / Р. Ю. Амензаде, А. Н. Ализаде // ДАН СССР. – 1976. – Т. 230, № 6. – С. 1303–1305.

[4] *Амензаде, Р. Ю.* Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязкоупругих твердых тел / Р. Ю. Амензаде, М. Б. Ахундов // ДАН СССР. – 2006. – Т. 410, № 1. – С. 45–48.

[5] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2003. – 704 с.

[6] *Бугаков, И. И.* Ползучесть полимерных материалов / И. И. Бугаков. – М. : Наука, 1973. – 287 с.

[7] *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1976. – 536 с.

[8] *Амензаде, Ю. А.* Развитие теории контактных задач в СССР / Ю. А. Амензаде. – М. : Наука, 1976. – Гл. 8. – 492 с.

R. Y. Amenzade, G. Y. Mehdiyeva, L. F. Fatullayeva

THE VARIATION METHOD OF NONLINEAR HEREDITARY MECHANICS OF THE FIRM BODIES

Baku State University

Abstract. The formulation and the proof of the mixed variational principle for the three-dimensional theory of nonlinear viscous-elasticity, allowing to set independently the presumable fields of pressure and movings is given here. Instant elastic-plastic deformation is considered. the exact expressions for a component of deformation tensor through the movings are used. Procedure of its updating on a case of the kusochno-non-uniform body made of the final number of the parts is resulted. the interface conditions on the contact surfaces are essentially various and consist or in their full coupling, or in intense landing. Modification of the constructed functionals on a case of the elasto-plastic (nonlinear-elastic) deformations is given.

Keywords: nonlinearity, viscoelasticity, pressure, deformation, a variation, heterogeneity, interface.

Рафаэль Юсиф оглы Амензаде

доктор физико-математических наук, профессор Бакинского Государственного Университета, г. Баку

`e-mail:` laura_fat@rambler.ru

Галина Юревна Мехтиева

доктор физико-математических наук, профессор Бакинского Государственного Университета, г. Баку

`e-mail:` laura_fat@rambler.ru

Лаура Фаиг кызы Фатуллаева

кандидат физико-математических наук Бакинского Государственного Университета, г. Баку

`e-mail:` laura_fat@rambler.ru

Rafael Yusif Amenzade

Dr. Sci. Phys. & Math.,Professor, Baku State University, Baku

Galina Yurevna Mehdiyeva

Dr. Sci. Phys. & Math.,Professor, Baku State University, Baku

Laura Faig kizi Fatullayeva

Ph. D., Baku State University, Baku