

Б. Д. Аннин, В. В. Алёхин

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ С УСЛОВИЕМ ТЕКУЧЕСТИ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача Коши о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой поверхности, на которой действуют нормальное давление, касательные усилия и заданные скорости перемещений. В случае полной пластичности и линейной зависимости условия текучести от среднего напряжения система квазистатических уравнений идеальной пластичности, описывающих напряженно-деформированное состояние среды, является гиперболической. При численном решении этой системы применяется разностная схема для гиперболических систем законов сохранения.

Ключевые слова: напряжение, деформация, идеальная пластичность, полная пластичность, предел текучести, гиперболическая система.

УДК: 539.374

Квазистатические уравнения идеальной пластичности для определения напряжений и скоростей перемещений в случае полной пластичности имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) = 2(k_s - m\sigma), \quad (2)$$

$$\sigma < k_s/m, \quad (3)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3, \quad (3)$$

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \quad (5)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты симметричного тензора напряжений в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 ; $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ — среднее напряжение; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $k_s > 0, m > 0$ — постоянные; e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации; u_i — компоненты вектора скоростей перемещений; n_i — компоненты единичного собственного вектора тензора напряжений, соответствующего некрайнему собственному значению (главному напряжению) σ_1 .

Поступила 11.05.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 40 и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00749-а).

Равенство (2) означает линейную зависимость максимального касательного напряжения от среднего давления [1] (такая зависимость (рис. 1) характерна для некоторых грунтов [2]). Равенство (3) означает условие полной пластичности Хаара–Кармана [3], равенство (4) — условие несжимаемости [4], соотношение (5) — условие изотропии [4].

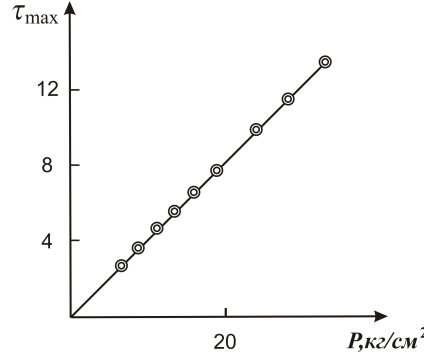


Рис. 1. Физико-механические свойства песка под давлением

Система (1)–(3) исследуется с использованием представления Д. Д. Ивлева тензора напряжений в виде [4]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\xi}{a} + \frac{k_s}{m} + \xi n_1^2, & \sigma_{12} &= \xi n_1 n_2, \\ \sigma_{22} &= \frac{\xi}{a} + \frac{k_s}{m} + \xi n_2^2, & \sigma_{13} &= \xi n_1 n_3, \\ \sigma_{33} &= \frac{\xi}{a} + \frac{k_s}{m} + \xi n_3^2, & \sigma_{23} &= \xi n_2 n_3,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\xi = 2\varepsilon(k_s - m\sigma) = 2\varepsilon e^{ap}, \quad a = \frac{-6m}{3\varepsilon + 2m}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Подстановка (6) тождественно удовлетворяет соотношениям (2), (3). При этом главные напряжения равны

$$\sigma_1 = \frac{4}{3}\varepsilon(k_s - m\sigma) + \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{2}{3}\varepsilon(k_s - m\sigma) + \sigma.$$

Зависящие от x_1, x_2, x_3 функции p, n_1, n_2, n_3 определяются из квазилинейной системы уравнений первого порядка, получаемой из (1), (6) и конечного соотношения $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$:

$$p_{,i} + n_j n_{i,j} + k n_i n_{s,s} = 0, \quad i, j, s = 1, 2, 3; \quad k = (3\varepsilon + 2m)/(3\varepsilon - 4m).\tag{7}$$

Вектор скорости частиц при известном тензоре напряжений определяется из условий несжимаемости (4) и изотропии (5).

При $m = 0$ параметр $k = 1$ и система (7) формально совпадает с системой уравнений Д. Д. Ивлева [4] теории пластичности Треска при условии полной пластичности. При этом подстановка, удовлетворяющая при $m = 0$ условию (2) и соотношению (3), отличается от подстановки (6).

Анализ структуры решений системы (7) при $k = 1$ применим для системы (7) и при $k \neq 1$. Если при $k = 1$ нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора $\varphi = \pi/4$ и осью, ориентированной вдоль единичного собственного вектора $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ тензора напряжений, то при $k \neq 1$ угол полураствора $\varphi = \arctg(1/\sqrt{k})$.

Система для определения вектора скорости имеет характеристический конус с углом полураствора $\varphi = \pi/4$.

Подмодели для системы (7) при $k \neq 1$ рассмотрены в [5].

Система (4), (5), (7) является гиперболической. Для этой системы рассмотрена задача о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой полости, на которой действуют нормальное давление, касательные усилия и заданные скорости перемещений. В [6] для системы (4), (5), (7) при $m = 0$ был предложен численный метод решения задачи Коши в ортогональной криволинейной системе координат (α, θ, γ) , образованной вращением вокруг вертикальной оси z гладкой выпуклой кривой L с опорной функцией $F(\gamma)$ (рис. 2), где координатными поверхностями $\alpha = \text{const}$ являются эквидистантные поверхности. С учетом (6) этот метод может быть применен к решению задачи Коши для системы (4), (5), (7) при $m \neq 0$.

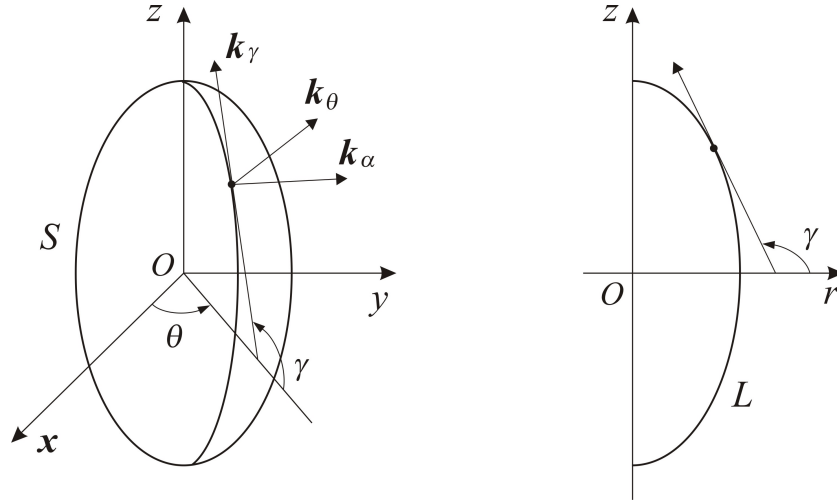


Рис. 2. Ортогональная криволинейная система координат (α, θ, γ) : координатная поверхность S ($\alpha = 0$), базисные векторы $k_\alpha, k_\theta, k_\gamma$ и образующая L координатной поверхности S

В качестве примера была решена задача о распространении зон пластического состояния от границы эллипсоидальной полости, образованной вращением вокруг оси z выпуклой кривой L с опорной функцией $F(\gamma) = \sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}$, где a, b — полуоси эллипса.

Задача решалась в безразмерных переменных. При $m = 0$ напряжения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= p + n_\alpha^2, & \sigma_{\alpha\theta} &= n_\alpha n_\theta, & \sigma_{\alpha\gamma} &= n_\alpha n_\gamma, \\ \sigma_{\theta\theta} &= p + n_\theta^2, & \sigma_{\gamma\gamma} &= p + n_\gamma^2, & \sigma_{\theta\gamma} &= n_\theta n_\gamma, \end{aligned}$$

где $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\gamma\gamma}, \sigma_{\theta\gamma}$ — компоненты напряжений в системе координат (α, θ, γ) , деленные на $2k_s \varepsilon$; $p = \sigma / (2k_s \varepsilon) - 1/3$; $n_\alpha, n_\theta, n_\gamma$ — компоненты единичного собственного вектора, соответствующего главному напряжению σ_1 . При $m \neq 0$ напряжения вычислялись по формулам (6), в которых следует положить $n_1 = n_\alpha, n_2 = n_\theta, n_3 = n_\gamma$.

В численном решении полуось эллипсоида $a = 2$, а полуось $b = 1$. При $m = 0$ на поверхности полости ($\alpha = 0$) задавались следующие начальные условия: $p(0) = 1, n_\alpha(0) = 1, n_\theta(0) = n_\gamma(0) = 0$. Для сравнения получаемых решений при $m = 0$ и $m \neq 0$ начальные значения для $\xi(0)$ в формулах (6) выбирались таким образом, чтобы нормальные напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ при $\alpha = 0$ совпадали.

На рис. 3 приведены зависимости напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$ от координаты α для углов $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$ при $m = 0$ и $m = 0,5$.

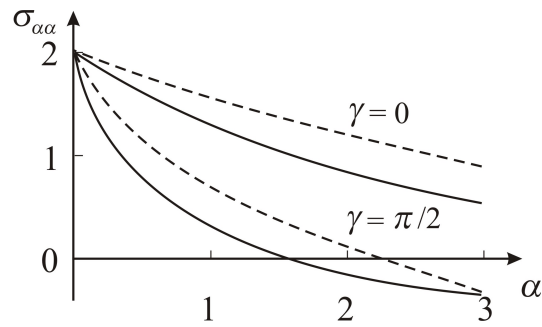


Рис. 3. Распределение напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$ около эллиптической полости для углов $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$ в зависимости от координаты α : пунктирные линии — $m = 0$, сплошные линии — $m = 0,5$

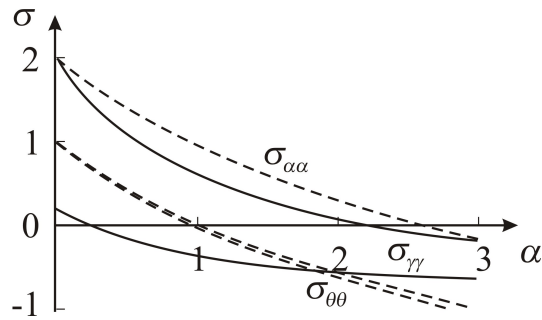


Рис. 4. Распределение напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ около эллиптической полости для угла $\gamma = \pi/4$ в зависимости от координаты α : пунктирные линии — $m = 0$, сплошные линии — $m = 0,5$

На рис. 4 показаны зависимости напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\gamma\gamma}$ от α для $\gamma = \pi/4$ при $m = 0$ и $m = 0,5$.

Закключение. При линейной зависимости условия текучести от среднего напряжения для случая полной пластичности численно решена задача Коши о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой поверхности, на которой действует нормальное давление.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лоде, В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. ст. / под ред. Ю. Н. Работнова. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 168–205.
- [2] *Казаченко, Л. С.* Физико-механические свойства песка под давлением / Л. С. Казаченко, Ю. В. Кулинич // ФТПРПИ. – 1972. – № 1. – С. 22–30.
- [3] *Хаар, А.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. ст. / под ред. Ю. Н. Работнова. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.
- [4] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
- [5] *Аннин, Б. Д.* Об уравнениях идеальной пластичности с условием текучести, зависящим от среднего напряжения / Б. Д. Аннин // Успехи механики сплошных сред : к 70-летию акад. В. А. Левина : сб. науч. тр. – Владивосток : Дальнаука, 2009. – С. 31–34.
- [6] *Аннин, Б. Д.* Алгоритм численного решения задачи Коши для уравнений пластичности Треска / Б. Д. Аннин, В. В. Алёхин, В. В. Остапенко // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 5–13.

B. D. Annin, V. V. Alyokhin

**THE NUMERICAL DECISION OF A PROBLEM KOSHI FOR THE EQUATIONS
OF IDEAL PLASTICITY WITH THE CONDITION OF FLUIDITY DEPENDING
ON AVERAGE PRESSURE**

M. Lavrenteva Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

Novosibirsk State University

Abstract. The problem Koshi about distribution of the zones of a plastic condition to the boundless environment from the border of a convex surface on which there are an operate normal pressure, the tangents of an effort and the set speeds of the movings is considered. In case of full plasticity and linear dependence of a condition of fluidity on the average pressure the system of the quasistatic equations of the ideal plasticity describing the intense-deformed condition of the environment, is hyperbolic. At the numerical decision of this system the difference scheme to the hyperbolic systems of the preservation laws is applied.

Keywords: the pressure, deformation, the ideal plasticity, full plasticity, fluidity limit, hyperbolic system.

Аннин Борис Дмитриевич

член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

e-mail: annin@hydro.nsc.ru

Алёхин Владимир Витальевич

доктор физико-математических наук, профессор Новосибирского государственного университета

e-mail: alekhin@hydro.nsc.ru

Annin Boris Dmitrievich

Corresponding member, Russian Academy of Sciences, M. Lavrenteva Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

Alyokhin Vladimir Vitalyevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Novosibirsk State University, Novosibirsk