

В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, С. Л. Осетров

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию динамического и квазистатического изгиба пластин при малых и больших прогибах с использованием упругопластической и жесткопластической моделей деформирования в геометрически линейной и нелинейной постановках. Решение задач изгиба осуществлялось численным методом на основе модели теории оболочек типа Тимошенко. В результате сравнительного анализа показано, что жесткопластическая модель при классической геометрически линейной постановке неприменима для оценки максимальных прогибов упругопластических пластин. Определены границы применимости жесткопластической модели при немалых прогибах шарнирно опертых круглых пластин.

Ключевые слова: численное моделирование, изгиб, пластина, жесткопластическая модель, применимость, упругопластическая модель, геометрически линейная постановка, геометрически нелинейная постановка, статическое деформирование, динамическое деформирование, предельные состояния.

УДК: 539.3

Введение. Аналитическим и численным методам расчета жесткопластических конструкций (балки, пластины и оболочки) посвящены многие работы [1-5]. Однако, вопросы применимости жесткопластических моделей при расчете тонкостенных металлических конструкций, обладающих в реальности упругопластическими свойствами, мало изучены. Известно, что для использования жесткопластической модели [5] необходимо, чтобы энергия упругого деформирования была на порядок меньше работы пластического деформирования, а, следовательно, деформации должны на порядок превышать предел текучести. Например, для сталей пластические деформации должны превышать 1%, для алюминиевых сплавов – 3%. При таких изгибных деформациях тонкостенных конструкций, особенно балок и пластин, необходимо учитывать геометрически нелинейные эффекты деформирования, которые, в известных авторам публикациях по жесткопластическому анализу, не учитываются [1-5]. Данная работа посвящена исследованию квазистатического и динамического деформирования круглых пластин при малых и больших прогибах в геометрически линейной и нелинейной постановках с использованием упругопластической и жесткопластической моделей деформирования. Исследование проводится на основе сравнительного анализа результатов численного решения

Поступила 15.07.2010

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (код проекта НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00500-а).

задач изгиба пластин с шарнирно-неподвижной и подвижной опорой в различных постановках. Применяемый численный метод прошел многолетнюю верификацию на широком классе задач статики и динамики пластин и оболочек [6, 7, 8].

1. Численное моделирование процессов динамического и квазистатического изгиба пластин. Численное решение задач проводится в осесимметричной постановке. Пластина или оболочка рассматриваются в общей цилиндрической системе координат roz . Кроме того, вводится система координат s, ξ , связанная с деформируемой срединной поверхностью. Общая и местная система ортогональных координат связаны соотношениями $ds = dr\psi_z - dz\psi_r$, где $\psi_r = -\partial z/\partial s$, $\psi_z = -\partial r/\partial s$ – направляющие косинусы нормали, s – длина дуги вдоль образующей. Процесс нагружения разбивается на этапы. В пределах каждого этапа приращения перемещений и деформаций полагаются малыми. Текущая геометрия пластины, которая в процессе деформирования превращается в оболочку, представляется в виде:

$$r = r^H + u_r; \quad z = z^H + u_z; \quad ds = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2},$$

где $r^H = r^H(s)$, $z^H = z^H(s)$ – начальная геометрия, $u_r = u_r(s, t)$, $u_z = u_z(s, t)$ – перемещения, t – время. Толщина пластины изменяется во времени $h = h(s, t)$. Согласно теории Тимошенко, скорости перемещений задаются в виде:

$$\dot{u}_s(s, \xi, t) = \dot{u}_s(s, t) + \xi \dot{\varphi}(s, t); \quad \dot{u}_\xi(s, \xi, t) = \dot{u}_\xi(s, t),$$

где $\dot{\varphi}(s, t)$ – угловая скорость поворота поперечного сечения, которая складывается из скорости поворота нормали $\dot{\psi}(s, t)$ и скорости сдвига $\dot{\gamma}(s, t)$.

Скорости деформаций вычисляются через скорости перемещений в метрике текущего состояния:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ii} &= \dot{e}_{ii}^0 + \xi \dot{\chi}_{ii} (i = 1, 2); \quad \dot{e}_{11}^0 = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial s} \psi_z - \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s} \psi_r; \quad \dot{e}_{22}^0 = \frac{\dot{u}_r}{r}; \quad \dot{h} = -h(\dot{e}_{11}^0 + \dot{e}_{22}^0); \\ \dot{\chi}_{11} &= \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s}; \quad \dot{\chi}_{22} = \frac{\dot{\varphi}}{r} \psi_z; \quad \dot{\gamma}^0 = \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial s} \psi_r + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s} \psi_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Полные деформации определяются интегрированием скоростей деформаций по времени. Напряжения σ_{ij} связаны с упругими деформациями законом Гука. Пластические деформации определяются вариантом теории течения с линейным упрочнением [5]. Вариационные уравнения движения пластины (оболочки) следует из принципа минимума мощности работы:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ [N_1 \psi_z + Q \psi_r] \frac{\delta \delta \dot{u}_r}{\partial s} + \left[\frac{N_2}{r} + \rho h \ddot{u}_r \right] \delta \dot{u}_r \right\} r ds - (r P_r \delta \dot{u}_r)_{s=0, L} &= 0; \\ \int_0^L \left\{ [Q \psi_z - N_1 \psi_r] \frac{\delta \delta \dot{u}_z}{\partial s} + \rho h \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z \right\} r ds - (r P_z \delta \dot{u}_z)_{s=0, L} &= 0; \\ \int_0^L \left[M_1 \frac{\delta \delta \dot{\varphi}}{\partial s} + \left(\frac{M_2}{r} \psi_z + Q + \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\varphi} \right) \delta \dot{\varphi} \right] r ds - (r M \delta \dot{\varphi})_{s=0, L} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь L – длина пластины; ρ – плотность материала; N_1, N_2, Q, M_1, M_2 – внутренние усилия и моменты; $P_r = P_r(t), P_z = P_z(t), M = M(t)$ – внешние силы и моменты, действующие на контуре пластины $s = 0, L$.

Для численного решения задачи применяется вариационно-разностный метод и явная схема «крест» [6], оценки устойчивости которой представлены в [9].

Выше описана моментная модель деформирования пластин и оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности. Для того, чтобы получить безмоментную модель, необходимо в уравнениях движения (2) не учитывать перерезывающую силу, т. е. положить $Q = 0$. При решении задач в геометрически линейной постановке уравнения формулируются в метрике исходного состояния. Для получения решения задачи квазистатического изгиба пластины на основе описанного выше численного метода решения динамических задач применялся подход, изложенный в [7]. Рассмотрим процесс динамического деформирования круглой пластины радиуса R , которая под действием равномерного давления p , превращается в оболочку вращения. Как известно, динамическая составляющая решения определяется темпом нарастания внешних воздействий и низшей частотой колебаний механической системы. Уменьшая скорость нагружения, в пределе можно получить статическое решение. Однако непосредственное использование описанной выше методики решения динамических задач деформирования пластин для моделирования квазистатического процесса не эффективно из-за ограничений, накладываемых на шаг по времени в явной схеме и невозможности исследования предельных состояний и закритического поведения пластины при задании внешнего давления.

Для повышения эффективности численной методики используем следующий прием. Суть его сводится к замене мягкого нагружения пластины внешним давлением на жесткое нагружение, при котором внешнее давление определяется воздействием на пластину жидкости при сжатии поршня. Внешнее давление на пластину осуществим идеализированной сжимаемой жидкостью, которая занимает некоторый объем V , ограниченный жесткими стенками, поршнем и пластинкой. Волновыми процессами в жидкости пренебрегаем. Уравнение состояния жидкости принимаем линейным:

$$p = \frac{K(V - V_0)}{V_0}, \quad (3)$$

где K – модуль объемного сжатия, V_0 – начальный объем.

Запишем (3) в приращениях на временном интервале Δt :

$$\Delta p V_0 \alpha = \Delta V_1 - \Delta V_2; \quad \alpha = 1/K, \quad (4)$$

где ΔV_1 – изменение объема за счет перемещения поршня, ΔV_2 – изменение объема за счет деформирования пластины. Выразим ΔV_2 через компоненты вектора скорости перемещений всех узлов оболочки и подставим в (4). В результате получим:

$$\Delta p = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_2^*}{\beta F^2 + \alpha V_0}; \quad \beta = \frac{\Delta t^2}{\pi^2 \rho h R^2}, \quad (5)$$

где ΔV_2^* – приращение объема, вычисленное по скоростям перемещений, если давление берется с предыдущего временного слоя; F – площадь поверхности оболочки.

Алгоритм определения гидростатического давления состоит в следующем. По заданной скорости движения поршня определяем ΔV_1 . Далее вычисляем скорости перемещения по численной методике, описанной выше, а затем ΔV_2^* и F . Подсчитываем по (5) приращение давления и определяем полное давление, которое используем в качестве внешней нагрузки в (2).

Изложенный прием позволяет увеличить минимальную частоту собственных колебаний оболочки и получить приемлемое статическое решение при скоростях перемещений на два порядка больше, чем при непосредственном задании давления в уравнениях (2) как функции от времени. С использованием данного приема становится возможным моделировать процесс деформирования при достижении нагрузкой предельных значений и исследовать закритическое поведение пластины с учетом больших прогибов.

Рассмотрим далее задачи изгиба толстой и тонкой круглых пластин, закрепленных по контуру с помощью неподвижной и подвижной шарнирной опоры. Геометрические характеристики пластин: радиус $R = 1$ м, толщина $h_1 = 0,2$ м и $h_2 = 0,04$ м.

При упругопластической постановке задачи модуль Юнга принимался $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона – $\mu = 0,3$, при жесткопластической постановке – модуль Юнга увеличивался в 1000 раз. При моделировании идеальной пластичности задавалось малое линейное упрочнение. Заметим, что при отсутствии упругого участка и упрочнения разрешающая система уравнений теряет свойство гиперболичности [10], и численная схема счета становится неустойчивой.

2. Квазистатический изгиб пластины. На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи квазистатического изгиба пластины толщиной $h_1 = 0,04$ м с неподвижной опорой в различных постановках: упругопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (на рисунках кривые обозначены - У.П.Н.); жесткопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (Ж.П.Н.); упругопластическая модель в геометрически линейной постановке (У.П.Л.); жесткопластическая модель в геометрически линейной постановке (Ж.П.Л.). На рисунке приведены зависимости внешнего давления (p/σ_T , σ_T – предел текучести) от максимального прогиба пластины ($\max u_z/R$).

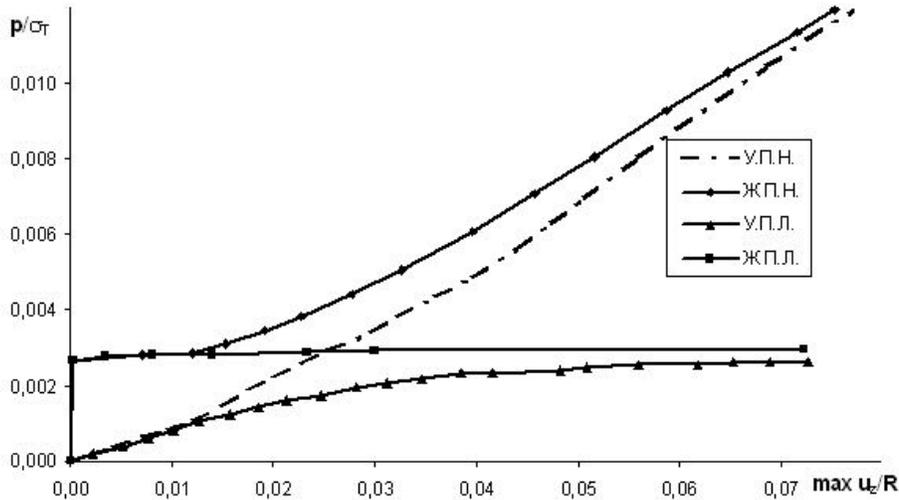


Рис. 1.

Для сравнительного анализа влияния различных моделей на рис. представлены относительные отличия максимальных прогибов пластины с неподвижной опорой, полученных с использованием жесткопластической модели в геометрически нелинейной постановке (на рисунках кривая обозначена – Ж.П.Н.) и упругопластической модели в геометрически линейной постановке (У.П.Л.) от прогибов полученных с использованием упругопластической модели в геометрически нелинейной постановке.

Как видно из рисунков, до прогибов, равных 0,025 радиуса пластины, решение возможно получить только с учетом упругих свойств материала, но при этом проявляются существенные различия между линейной и нелинейной постановкой – отличие становится более 10% при прогибах более 0,012 радиуса пластины. При прогибах более 0,025 радиуса пластины жесткопластическое решение в нелинейной постановке начинает сближаться с упругопластическим и отличие составляет менее 10% при прогибах более 0,05 радиуса пластины.

Аналогичные исследования проводились и для пластины толщиной $h_2 = 0,2$ м. На рис. 3 представлены результаты сравнительного анализа влияния различных моделей для пластины

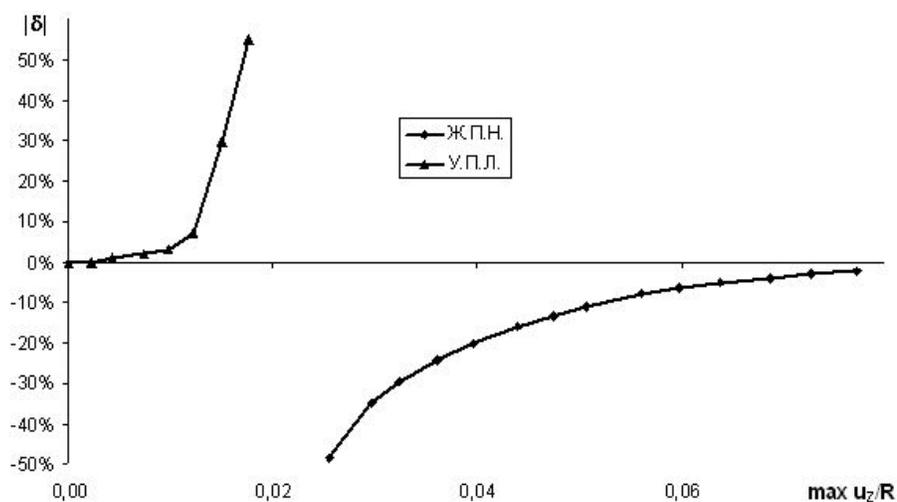


Рис. 2.

с неподвижной и подвижной опорой в обозначениях тех же, что на рис. 2. На рисунке сплошной линией показаны отличия для неподвижной опоры, пунктирной линией – для подвижной опоры.

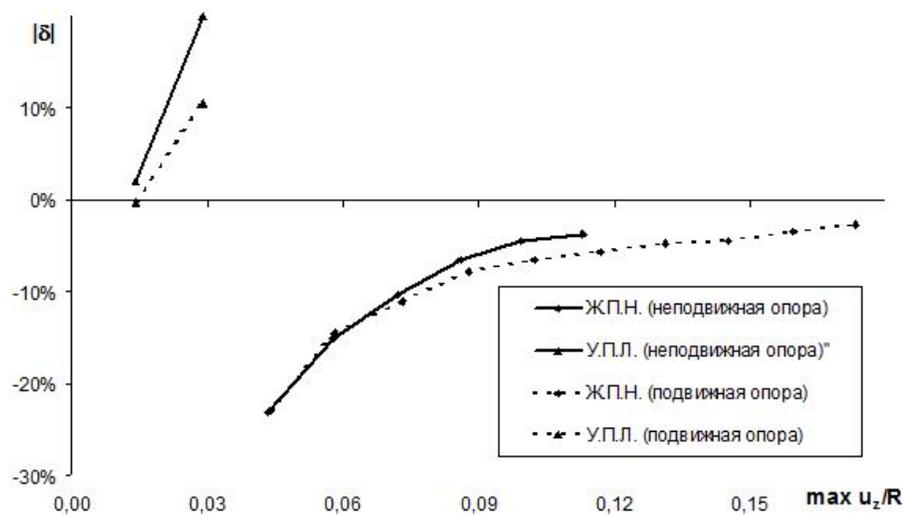


Рис. 3.

До прогибов, равных 0,03 радиуса пластины, решение возможно получить только с учетом упругих свойств материала. Различия между линейной и нелинейной постановкой становятся более 10% при прогибах более 0,02 радиуса пластины для неподвижной опоры и более 0,029 радиуса пластины для подвижной опоры. Жесткопластическое решение в нелинейной постановке начинает сближаться с упругопластическим при прогибах более 0,03 радиуса пластины, отличие составляет менее 10% при прогибах более 0,072 радиуса пластины при неподвижной опоре и более 0,08 радиуса пластины в случае подвижной опоры.

Решения задач изгиба пластин с подвижной опорой качественно мало отличаются от решений с неподвижной опорой. При геометрически линейной постановке задачи нет различия по прогибам между решениями для пластин с подвижными и неподвижными опорами. Отличие между геометрически линейной и нелинейной постановкой в случае неподвижной опоры больше, чем для подвижной и с увеличением прогиба растет за счет большей величины мембранных усилий в случае неподвижной опоры. Следует заметить, что в геометрически нелинейной постановке, в случае неподвижной опоры, прогибы пластины существенно меньше, чем в случае подвижной опоры. Известно, что на практике реализовать шарнирно подвижную опору затруднительно, так как даже при свободном касании края пластины о жесткую поверхность проскальзывание затруднено из-за возникающих сил трения. Поэтому физически правильнее рассматривать жестко-неподвижное закрепление пластины.

Для анализа предельных состояний и закритического поведения на рис. 4 представлены результаты численного решения задачи изгиба пластины толщиной $h_1 = 0,2$ м с неподвижной и подвижной опорой в различных постановках: упругопластическая и жесткопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (на рисунке кривые обозначены «Нелинейная»); упругопластическая и жесткопластическая модель в геометрически линейной постановке (на рисунке кривые обозначены «Линейная»). На рисунке приведены зависимости внешнего давления (p/σ_T , σ_T – предел текучести) от максимального прогиба пластины ($\max u_z/R$). Сплошной линией представлено решение в случае неподвижной опоры, пунктирной – подвижной.

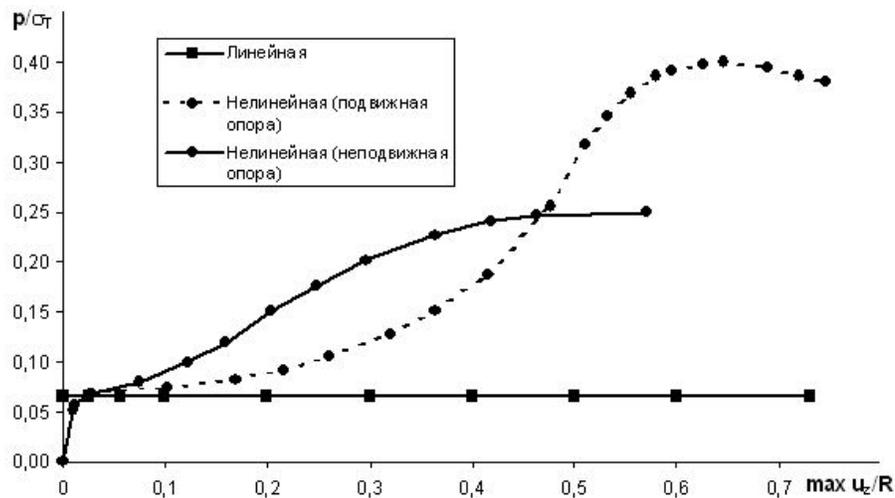


Рис. 4.

Как видно из рисунка, жесткопластическая модель в линейной постановке дает такое значение «предельной» нагрузки, при превышении которой происходит непропорционально большой рост прогибов. При решении задачи в геометрически нелинейной постановке нагрузки достигают максимального значения при прогибах 0,57 радиуса пластины с неподвижной опорой и 0,65 радиуса пластины с подвижной опорой.

3. Динамический изгиб пластины. Для моделирования динамического изгиба пластин в качестве граничных условий задавался импульс начальной скорости, равномерно распределенный по поверхности.

На рис. 5 представлены результаты численного решения задачи изгиба пластины толщиной $h_1 = 0,04$ м с неподвижной опорой в различных постановках: упругопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (на рисунках кривые обозначены – У.П.Н.); жесткопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (Ж.П.Н.); упругопластическая

модель в геометрически линейной постановке (У.П.Л.); жесткопластическая модель в геометрически линейной постановке (Ж.П.Л.). На рисунке приведены зависимости максимального безразмерного прогиба пластины ($\max u_z/R$) от начальной скорости ($\dot{u}_z(t=0) = V_0$). Следует отметить, что максимальные изгибные деформации в центре пластин при таких прогибах достигают 6%.

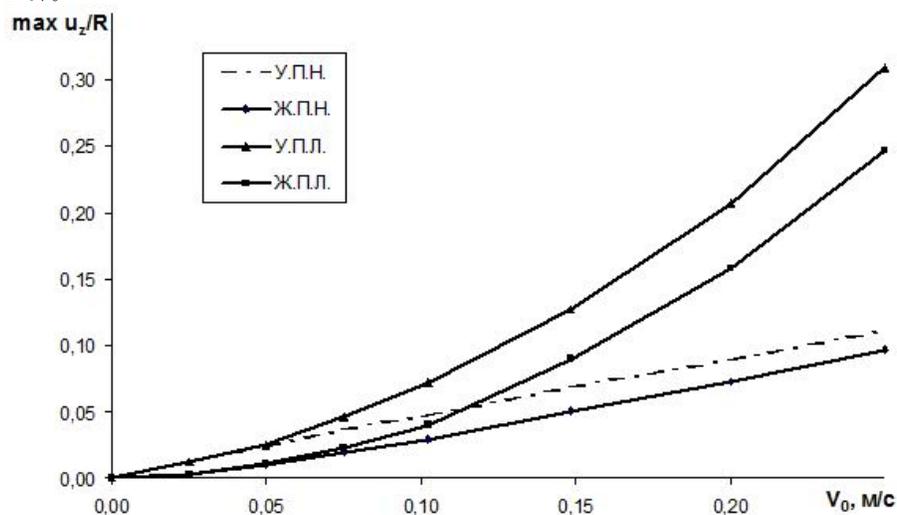


Рис. 5.

Для сравнительного анализа влияния различных моделей на рис. 6 представлены относительные отличия максимальных прогибов пластин с неподвижной опорой, полученных с использованием жесткопластической модели в геометрически нелинейной постановке (на рисунке кривая обозначена – Ж.П.Н.) и упругопластической модели в геометрически линейной постановке (У.П.Л.) от прогибов полученных с использованием упругопластической модели в геометрически нелинейной постановке.

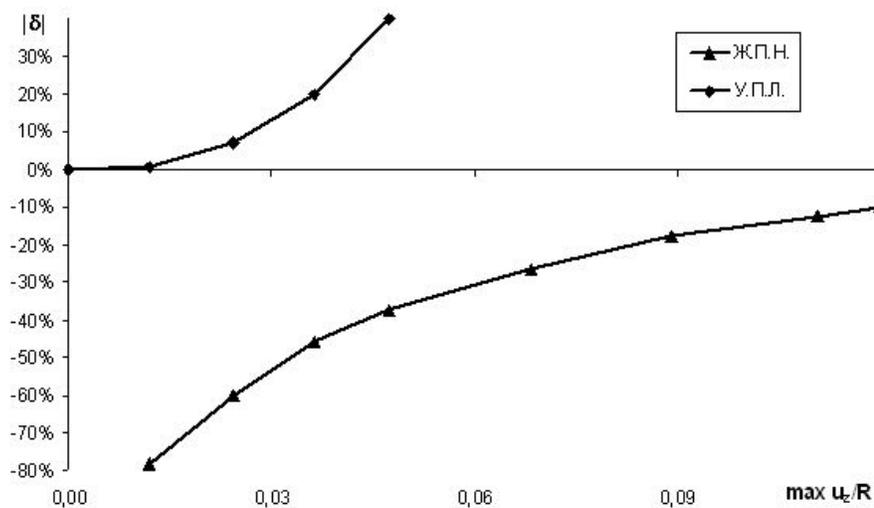


Рис. 6.

Из рисунков видно, что при малых прогибах жесткопластическое решение существенно отличается от упругопластического из-за неучета упругих свойств материала. В дальнейшем результаты начинают сближаться. Различия между жесткопластическим решением и упругопластическим становится менее 10% при прогибах более 0,12 радиуса пластины. При этом начинают проявляться существенные различия между линейной и нелинейной постановкой. Отличие составляет более 10% при прогибах более 0,03 радиуса пластины.

Аналогичные исследования проводились и для пластины толщиной $h_2 = 0,2$ м. На рис. 7 представлены результаты сравнительного анализа влияния различных моделей для пластины с неподвижной и подвижной опорой в обозначениях тех же, что на рис. 6. На рисунке сплошной линией показаны отличия для неподвижной опоры, пунктирной линией – для подвижной опоры.

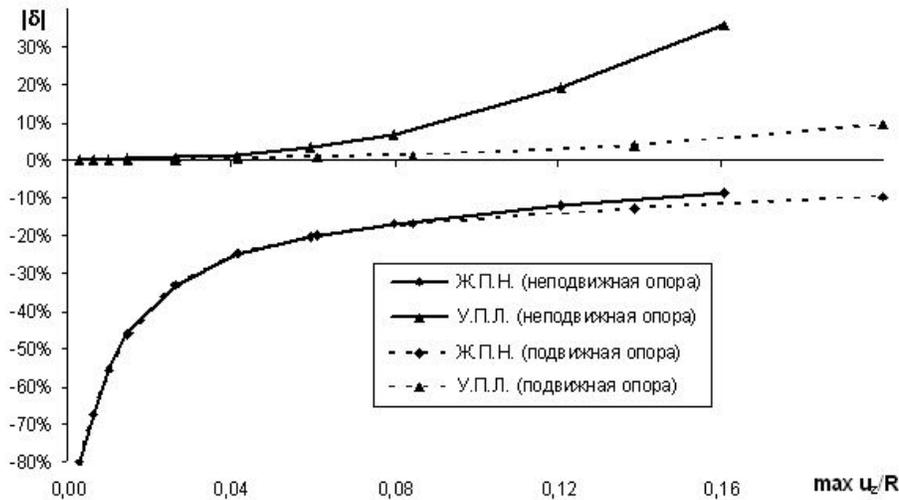


Рис. 7.

Различия между жесткопластическим решением и упругопластическим становится менее 10% при прогибах более 0,15 радиуса пластины для неподвижной опоры и более 0,2 радиуса пластины для подвижной опоры. Различия между линейной и нелинейной постановкой более 10% начинают проявляться при прогибах более 0,09 радиуса пластины для неподвижной опоры и более 0,2 радиуса пластины для подвижной опоры.

Закключение. На основе проведенных исследований можно сделать вывод, что жесткопластический анализ неприменим для оценки прогибов упругопластических пластин в рамках классической геометрически линейной теории. Применение его в геометрически нелинейной постановке обосновано только при немалых прогибах, например, в технологических операциях импульсной обработки тонкостенных заготовок давлением [11]. Погрешности жесткопластического анализа прогибов уменьшаются с увеличением толщины пластины, но модель Кирхгофа-Лява применима только для пластин, толщина которых на порядок меньше диаметра. Применение жесткопластического анализа оправдано при квазистатическом нагружении для грубой оценки величины "безопасной" нагрузки пластин, так как прогибы, соответствующие этой нагрузке, не превышают 1-2% от диаметра пластин. Действительная предельная нагрузка в разы отличается от найденной по жесткопластической линейной модели, вследствие неучета геометрически нелинейных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гопкинс*. Динамика пластической круглой пластинки / Гопкинс, Прагер // *Механика*. – 1955. – Вып. 3. – С. 112–122.
- [2] *Ерхов, М. И.* Теория идеальнопластических сред и конструкций / М. И. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
- [3] *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск. : Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 320 с.
- [4] *Немировский, Ю. В.* Вязкопластическая динамика изотропных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // *ПМТФ*. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 123–134.
- [5] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [6] *Баженов, В. Г.* Исследование упругопластического выпучивания оболочек вращения при ударном нагружении / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // *Прикладные проблемы прочности и пластичности : всесоюз. межвуз. сб.* – 1975. – Вып. 2. – С. 44–50.
- [7] *Баженов, В. Г.* Большие деформации оболочек вращения с учетом моментности напряженного состояния / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем : всесоюз. межвуз. сб.* – 1983. – С. 55–63.
- [8] *Баженов, В. Г.* Исследование применимости жесткопластической модели в задачах импульсного деформирования упругопластических пластин при малых и больших прогибах / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, С. Л. Осетров // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния*. – 2008. – № 1. – С. 64–69.
- [9] *Баженов, В. Г.* Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек / В. Г. Баженов, Д. Т. Чекмарев. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. – 159 с.
- [10] *Садовский, В. М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред / В. М. Садовский. – М. : Наука : Физматлит, 1997. – 208 с.
- [11] *Баженов, В. Г.* Исследования больших вязкопластических деформаций цилиндрических оболочек с применением магнитно-импульсного способа нагружения / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, М. В. Петров, А. Г. Угодчиков // *Машиноведение*. – 1983. – № 5. – С. 73–80.

V. G. Bazhenov, V. K. Lomunov, S. L. Osetrov

THE APPLICABILITY ANALYSIS OF THE STIFF-PLASTIC MODEL IN THE PROBLEMS OF A STATIC AND DYNAMIC BEND OF PLATES

N. Lobachevsky Scientific Research Institute of Mechanics of the Nizhniy Novgorod State University

Abstract. This work is devoted to a research of a dynamic and quasistatic bend of plates at small and big deflections using elasto-plastic and stiff-plastic deformation models in the geometrically linear and nonlinear statements. The decision of the problems of a bend was carried out by a numerical method on the basis of a model of the covers of Timoshenko's type theory. As a result of the comparative analysis it is shown that the stiff-plastic model at classical geometrically linear statement is inapplicable for an estimation of the maximum deflections of the elasto-plastic plates. The applicability borders of the stiff-plastic models are defined at the considerable deflections of the simply supported round plates.

Keywords: numerical modelling, a bend, a plate, a stiff-plastic model, applicability, an elasto-plastic model, a geometrically linear statement, a geometrically nonlinear statement, static deformation, dynamic deformation, the limiting conditions (states).

Баженов Валентин Георгиевич

заведующий отделом «Динамика конструкций», доктор физико-математических наук, профессор, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Ломунов Владимир Кириллович

старший научный сотрудник, кандидат технических наук, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород

e-mail: lomunov@mech.unn.ru

Осетров Сергей Львович

старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород

e-mail: ocetpob@mail.ru

Bazhenov Valentine Georgievich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head, Department of Dynamics of Designs, N. Lobachevsky Scientific Research Institute of Mechanics of the Nizhniy Novgorod State University, Nizhniy Novgorod

Lomunov Vladimir Kirillovich

Ph. D., Senior Research Assistant, N. Lobachevsky Scientific Research Institute of Mechanics of the Nizhniy Novgorod State University, Nizhniy Novgorod

Osetrov Sergey Lvovich

Ph. D., Senior Research Assistant, N. Lobachevsky Scientific Research Institute of Mechanics of the Nizhniy Novgorod State University, Nizhniy Novgorod