

А. А. Бажин, Е. В. Мурашкин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОЖНЕННЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Институт Автоматики и Процессов Управления ДВО РАН

Аннотация. В настоящей работе решается задача о гидростатическом сжатии одиночного сферического дефекта сплошности, все необратимые деформации относятся на счет явления ползучести. Определенная сложность заключается на таком пути в том, что в окрестности микродефекта деформации всегда большие и следовательно, все рассмотрение следует провести в рамках модели неустановившейся ползучести при больших деформациях. В качестве основы для построения данной модели принимается теория больших упругопластических деформаций, построенная в [3] и степенной закон ползучести.

Ключевые слова: напряжение, большие деформации, ползучесть, релаксация, упругость, вязкоупругость.

УДК: 539.3

Введение. Металлы, как и все конструкционные материалы, обладают свойствами ползучести в определенном диапазоне напряжений и температуры. Даже при комнатной температуре обычные конструкционные стали или алюминиевые сплавы обнаруживают свойства ограниченной ползучести. Малые же размеры дефектов уже при умеренных внешних нагрузках приводят к необратимому деформированию материала в их окрестностях и к возникновению внутренних остаточных напряжений, которые также существенно влияют на длительную прочность изделий. При этом хотя бы необратимые деформации в окрестностях дефектов сплошности считать малыми нельзя.

Ранее [1] было показано, что в рамках такой теории больших упругопластических деформаций при идеальном характере пластического течения наблюдается эффект приспособляемости одиночных дефектов сплошности к циклическим нагрузкам по типу “нагрузка - разгрузка” То есть после каждой разгрузки размеры дефекта не изменяются, как и уровень и распределение деформаций и напряжений. Очевидно, что учет реологических свойств материала должен выводить из такой ситуации. Однако оказалось [2], что учет вязких свойств материалов на стадии, предвещающей пластическое течение, или на стадии разгрузки приводит к значительному, по сравнению с наблюдаемым в случае идеальной пластичности, уменьшению размера дефекта, но при использовании модели вязкоупругопластической среды релаксация напряжений не проявляет себя в процессе разгрузки. Для изучения этого явления предлагается модель среды с учетом больших деформаций, когда все необратимые деформации относятся к деформациям ползучести.

1. Основные модельные зависимости. За основу возьмем модель больших упругопластических деформаций [3], основные кинематические соотношения которой в прямоугольной

декартовой системе пространственных (эйлеровых) координат могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_m u_{i,m}, \\ r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij} (e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношениях (1), u_i, v_i - компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; e_{ij} и p_{ij} - обратимая и необратимая составляющие тензора полных деформаций Альманси d_{ij} ; $\frac{D}{Dt}$ - объективная производная тензоров по времени; источник ε_{ij}^p в уравнении изменения тензора p_{ij} - тензор скоростей необратимых деформаций, $z_{ij} = -z_{ij}$ - нелинейная часть тензора вращений, полностью выписанная в [3], определяющая его отличие от тензора жесткого вращения w_{ij} .

Следуя формализму неравновесной термодинамики, напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и для рассматриваемого случая несжимаемой среды данные зависимости записываются в виде

$$\sigma_{ij} = -p_1 \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (2)$$

В соотношениях (2) p_1 - добавочное гидростатическое давление, W - упругий потенциал, который для изотропной среды принимается в форме

$$\begin{aligned} W &= (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - kJ_1J_2 - \zeta J_1^2, \\ J_1 &= e_{jj} - \frac{1}{2} e_{ij}e_{ji}, \quad J_2 = e_{ij}e_{ji} - e_{ij}e_{jk}e_{ki} + \frac{1}{4} e_{ij}e_{jk}e_{ks}e_{si}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\lambda, \mu, a, b, \theta$ - упругие модули среды.

Принимаем, что компоненты тензора скоростей необратимых деформаций связаны с компонентами напряжений законом ползучести Нортона [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^p &= \frac{dV(\Sigma)}{d\sigma_{ij}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma (\sigma_{ij})^n, \\ \Sigma &= \sqrt{\frac{3}{2}} ((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь B и n заданные постоянные, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные значения тензора напряжений.

2. Постановка задачи. Разрешающаяся система уравнений. В рамках описанной выше модели больших деформаций были решены задачи о поведении границы сферического микродефекта (микропоры) в условиях эксплуатационных нагрузок.

Рассмотрим шар начального радиуса R_0 с одиночным сферическим дефектом сплошности (микропора) начального радиуса r_0 в центре шара. Процесс деформирования задается краевыми условиями

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0, \quad (5)$$

в которых σ_{rr} - радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат r, φ, θ , $R(t) \gg r_0$ - радиус сферической поверхности, на которой задается внешнее давление, $s(t)$ - текущий радиус границы микропоры.

Кинематика среды согласно принятому условию несжимаемости определяется с точностью до неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$u_r = r - (r^3 + \varphi(t))^{\frac{1}{3}}, \quad \varphi(t) = s_0^3 - s^3(t) = R_0^3 - R^3(t), \quad (6)$$

где $u = u_r$ - единственная не равная нулю компонента вектора перемещений.

Согласно формулам (2) и (3), компоненты напряжений с точностью до неизвестной функции добавочного гидростатического давления вычисляются зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -p_1 + g_1 e_{rr} + g_2 e_{rr}^2 - g_3 e_{rr} e_{\theta\theta} + g_4 e_{rr}^3 + g_5 e_{rr} e_{\theta\theta}^2 + g_6 e_{rr}^2 e_{\theta\theta} - g_7 e_{rr}^4 + \\ & + g_8 \left(e_{rr} e_{\theta\theta}^4 - 4e_{rr} e_{\theta\theta}^3 + 2e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^3 - \frac{1}{2} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^4 \right) - g_9 e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^2 + g_{10} \left(3e_{rr}^5 - \frac{1}{2} e_{rr}^6 \right) + \\ & + 2g_{11} \left(e_{rr}^4 e_{\theta\theta} + 2e_{rr}^3 e_{\theta\theta}^2 - 4e_{rr}^3 e_{\theta\theta} - \frac{1}{2} e_{rr}^4 e_{\theta\theta}^2 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & -p_1 + g_1 e_{\theta\theta} + g_{12} e_{\theta\theta}^2 - \frac{1}{2} g_3 e_{rr} e_{\theta\theta}^2 + g_{13} e_{\theta\theta}^3 + g_{18} \left(e_{\theta\theta}^5 - \frac{1}{6} e_{\theta\theta}^6 \right) + \\ & + g_{11} \left(\frac{1}{4} e_{rr}^4 e_{\theta\theta}^2 - 2e_{rr}^3 e_{\theta\theta} + \frac{1}{2} e_{rr}^4 e_{\theta\theta} - e_{rr}^3 e_{\theta\theta}^2 \right) + g_{15} e_{rr} e_{\theta\theta}^2 - g_{16} e_{\theta\theta}^4 + \\ & + g_{14} e_{rr}^2 e_{\theta\theta} - g_{17} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^2 + g_8 \left(2e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^3 + e_{rr} e_{\theta\theta}^4 - \frac{1}{2} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^4 - 4e_{rr} e_{\theta\theta}^3 \right), \end{aligned}$$

$$g_1 = 2\mu, \quad g_2 = \mu + 4a + 4b + 2k, \quad g_3 = 4(2b + k),$$

$$g_4 = 4 \left(a + b + 2k + \frac{3}{2}\zeta \right), \quad g_5 = 2(2b + 3k + 12\zeta), \quad g_6 = g_5 + 4k,$$

$$g_7 = a + b + \frac{19}{2}k + 9\zeta, \quad g_8 = k + 6\zeta, \quad g_9 = 2b + 7k + 24\zeta, \quad g_{10} = \frac{3}{2}(k + \zeta),$$

$$g_{11} = k + 3\zeta, \quad g_{12} = \mu + 4a + 8b + 4k, \quad g_{18} = 9(k + 2\zeta),$$

$$g_{13} = 4(a + 2b + 4k + 6\zeta), \quad g_{14} = \frac{1}{2}g_5 - 6\zeta, \quad g_{15} = \frac{1}{2}g_6 + 12\zeta,$$

$$g_{16} = a + 2b + 19k + 36\zeta, \quad g_{17} = b + \frac{7}{2} + 15\zeta, \quad p_1 = P - \frac{\partial W}{\partial J_1}.$$

Компоненты полных деформаций по известному полю перемещений (6) находятся соотношениями

$$\begin{aligned} d_{rr} = & \frac{1}{2} \left(1 - H^{-4/3} \right), \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - H^{2/3} \right), \quad H = 1 + \frac{\varphi(t)}{r^3}, \\ & d_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2d_{rr}}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно кинематическим зависимостям (1) имеем

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}, \quad (9)$$

$$e_{rr} = 1 - x^{-2/3}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - x^{1/3}, \quad x = \left(\frac{1 - 2p_{rr}}{1 - 2d_{rr}} \right)^3 = H^4 (1 - 2p_{rr})^3.$$

Подстановка (8) и (9) в определяющие соотношения (4) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1} = & Bn \Sigma^{n-1} \left(1 - H^{-8/3} (1 - 2p_{rr})^{-2}, 1 - H^{1/3} (1 - 2p_{rr}) \right), \\ \Sigma(a, b) = & g_1(a - b) - g_2 a^2 + g_{12} b^2 + g_4 a^3 - g_{13} b^3 + \frac{1}{2} g_3 \left(\frac{1}{2} ab^2 - ab \right) + \\ & + g_{19} \left(a^2 b - \frac{1}{2} a^2 b^2 \right) + g_{10} \left(3b^5 - \frac{1}{2} a^6 \right) + \frac{1}{3} g_{18} \left(\frac{1}{2} a^6 - 3b^5 \right) - g_7 a^4 + \\ & + \frac{3}{4} g_{11} \left(a^4 b + 2a^3 b^2 - \frac{1}{2} a^4 b^2 - 4a^3 b \right) + g_{16} b^4, \\ & g_{19} = 2b + 7k + 18\zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) в каждой точке среды $s(t) \leq r \leq R(t)$ является обыкновенным дифференциальным уравнением для вычисления компоненты необратимых деформаций p_{rr} (или $p_{\theta\theta}$). С другой стороны компоненты напряжений находятся интегрированием уравнения движения

$$\sigma_{rr,r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho_0 \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{3r^2} + \frac{2}{9} \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{r^5} \right),$$

используя второе граничное условие (5). Вычислив напряжения на внешней границе согласно первому граничному условию (5) получаем интегро-дифференциальную связь между нагружающим давлением $P(t)$ и функцией $\varphi(t)$

$$P(t) = 2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{N(e_{rr}, e_{\theta\theta})}{r} dr - \rho_0 \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{3} \left(\frac{1}{R(t)} - \frac{1}{s(t)} \right) + \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{18} \left(\frac{1}{R(t)^4} - \frac{1}{s(t)^4} \right) \right). \quad (11)$$

3. Анализ численных экспериментов. Приведем численные результаты расчетов. На рисунках 1 и 2 проиллюстрированы изменения нагружающего усилия и границы микропоры соответственно. До момента времени $\tau_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \frac{1}{R_0} t$ происходит активное нагружение образца, при котором по заданному увеличивающемуся нагружающему усилию $P(t)$, решая интегро-дифференциальную систему уравнений (10 - 11), находим неизвестную функцию $\varphi(t)$ и распределение необратимых деформаций p_{rr} . Начиная с момента $\tau_1 = 15$ рассмотрим несколько вариантов развития процесса деформирования материала среды. Тогда начальными условиями для уравнений (10 - 11) станут параметры напряженно-деформированного состояния при $\tau = \tau_1$.

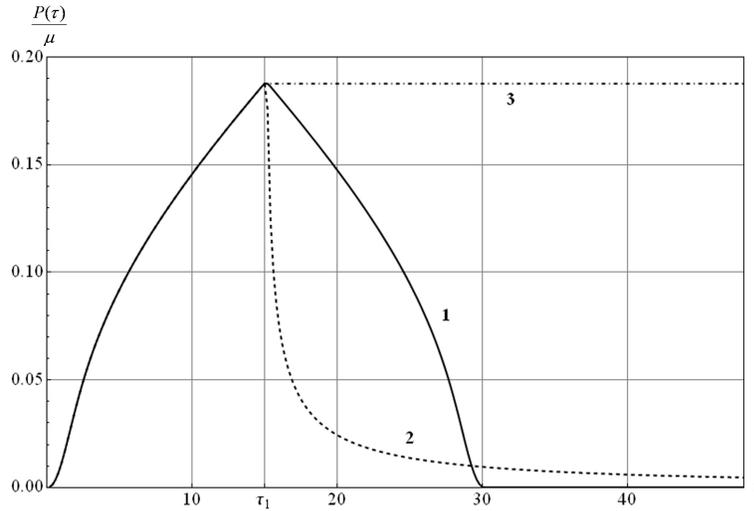
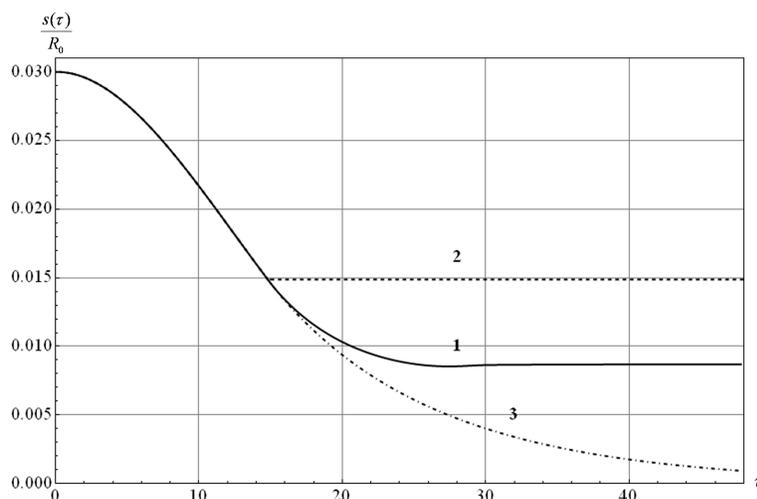


Рис. 1. Изменение нагружающего усилия $\frac{P(\tau)}{\mu}$

Под цифрой 1 (сплошная линия) на рис. 1, 2 изображен процесс разгрузки материала образца, когда нагружающее усилие сначала уменьшается и становится равным 0 в момент $\tau = 30$, а после этого остается некоторое время свободным от внешнего давления. Процесс релаксации напряжений (2, пунктирная линия) соответствует неизменному полю полных деформаций, а перераспределение обратимых и необратимых составляющих необходимо вызывает уменьшение уровня напряжений в теле. Если зафиксировать нагружающее усилие и на таком пути проследить за поведением границы микродефекта (3, штрихпунктирная линия),

Рис. 2. Изменение радиуса полости $\frac{s(\tau)}{R_0}$

оказывается, радиус полости постепенно уменьшается, т.е. в окрестности дефекта начинается процесс ползучести материала.

Заключение. Предложенная модель процесса нелинейной ползучести при больших деформациях основана на модели больших упругоэластических деформаций, в которой разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие является следствием понятных термодинамических принципов, что является существенным преимуществом примененного подхода. Решенные задачи о ползучести, релаксации напряжений и разгрузке в шаре с одиночным сферическим дефектом сплошности имеют своей целью описание экспериментально известного процесса залечивания микропор. Показано, что построенная модель больших упруго-ползучих деформаций удовлетворительно описывает процессы ползучести материала при активном нагружении и последующем процессе релаксации остаточных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буренин, А. А. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругоэластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // ДАН. – 2000. – Т. 375, № 6. – С. 767–769.
- [2] Буренин, А. А. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругоэластического материала / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Е. В. Мурашкин // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 110–119.
- [3] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругоэластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады АН СССР. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 199–201.
- [4] Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752с.

A. A. Bazhin, E. V. Murashkin

**THE MATHEMATICAL MODELLING OF THE COMPLICATED
RHEOLOGICAL PROPERTIES OF THE MATERIALS IN THE CONDITIONS
OF THE BIG DEFORMATIONS**

*Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of
Sciences*

Abstract. In the present work the problem about hydrostatic compression of a single spherical entirety defect solves, all irreversible deformations are charged to the creep phenomenon. The certain complexity consists on such way that in the vicinities of an microdefect the deformations are always big and, hence, all consideration should be spent within the limits of a model of unsteady creep at the big deformations. The theory of the big elasto-plastic deformations, build on [3] and the power creep law is accepted as a basis for the construction of the given model.

Keywords: the pressure, the big deformations, creep, relaxation, elasticity, viscoelasticity.

Бажин Александр Александрович

аспирант, инженер-математик Института Автоматики и Процессов Управления ДВО РАН

e-mail: aleksandrbazhin@yandex.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института Автоматики и Процессов Управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: murashkin@iacp.dvo.ru

Bazhin Alexander Alexandrovich

Postgraduate Student, Engineer-Mathematician, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia

Murashkin Evgeniy Valerievich

Ph.D. Phys. & Math., Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia