Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 77–82

М. В. Богданов, А. В. Ковалев, А. Ю. Яковлев

О МЕХАНИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕМЕНТОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ ТРАНСЛЯЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе методом [3] проводится определение напряженного состояния в составной упругопластической конструкции, состоящей из толстой плиты, ослабленной эллиптическим отверстием, в которое с натягом запрессовано эллиптическое включение. Материал плиты и включения описываются соотношением модели Ишлинского – Прагера [2, 4].

Ключевые слова: упругопластическая конструкция, запрессовка, плита с включением, напряженное состояние, модель Ишлинского – Прагера, трансляционное упрочнение.

УДК: 539.374

Задача об определении напряженного и деформированного состояния в составных упругих и упругопластических конструкциях рассматривалась многими авторами, в том числе в [5–8].

В настоящей работе определяется напряженное состояние в толстой плите с эллиптическим отверстием, в которую с натягом запрессовано несколько большее по размеру эллиптическое цилиндрическое включение. На бесконечности плита растягивается взаимно перпендикулярными усилиями P_1 и P_2, по контуру внутреннего отверстия во включении приложено внутреннее давление P_0.

Примем, что под влиянием внешних нагрузок включение переходит полностью в пластическое состояние, а в плите возникает пластическая зона, целиком охватывающая контур эллиптического отверстия.

Материал плиты и включения в пластическом состоянии описывается соотношениями модели Ишлинского – Прагера [2, 4] с поверхностями нагружения

$$F_n = \left(S_{ij_n} - c_n e^p_{ij_n}\right) \cdot \left(S_{ij_n} - c_n e^p_{ij_n}\right) - 2k_n^2, \tag{1}$$

где S_{ij_n} – компоненты девиатора тензора напряжений, c_n – коэффициент упрочнения, $e^p_{ij_n}$ – компоненты тензора пластических деформаций, k_n – предел текучести материала на сдвиг, индекс n имеет значение 1 для плиты и 2 для включения.

Задача решается методом возмущений [3] в цилиндрической системе координат ρ, θ, z для случая плоской деформации. Ось $0z$ направлена вдоль оси цилиндра, а начало координат выбираем в центре последнего. В плоскости, перпендикулярной оси $0z$, согласно [6, 8] имеем уравнение контура, ограничивающего включение до деформации

$$\rho = \alpha_1(1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \ldots), \tag{2}$$

уравнение контура, ограничивающего отверстие в плите до деформации

$$\rho = \alpha(1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \ldots), \tag{3}$$

Поступила 24.05.2010

уравнение контура, ограничивающего внутреннее отверстие во включении до деформации

$$\rho = \beta(1 + \delta d_2 \cos 2\theta - \ldots), \tag{4}$$

где $\alpha_1 > \alpha$, введем $\varepsilon = \alpha_1 - \alpha$ – малое по сравнению с единицей, α, α_1, β – радиусы круговых контуров в нулевом приближении соответственно: отверстия в плите, внешности включения, внутреннего отверстия во включении, δ – малый параметр, характеризующий отклонение контура от окружности, возмущение статических граничных условий $\left(\delta d_3 = \dfrac{P_1 - P_2}{2k_1}\right)$, d_1, d_2, d_3 – безразмерные константы.

Решение задачи ищем в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_{\rho_n} = \sigma_{\rho_n}^{(0)} + \delta\sigma_{\rho_n}^{(1)}, \qquad \sigma_{\theta_n} = \sigma_{\theta_n}^{(0)} + \delta\sigma_{\theta_n}^{(1)}, \\
\tau_{\rho\theta_n} = \tau_{\rho\theta_n}^{(0)} + \tau_{\rho\theta_n}^{(1)}, \qquad \sigma_{zn} = \frac{1}{2}(\sigma_{\rho_n} + \sigma_{\theta_n}), \\
\rho_{\text{кон}} = R_0 + \delta R_1, \qquad r_s = 1 + \delta r_s^{(1)}, \qquad c_n = c_n^{(0)} + \delta c_n^{(1)},
\end{gathered} \tag{5}$$

где верхний индекс указывает на номер приближения, $n = 1, 2, \delta$ – малый параметр, σ_{ρ_n}, σ_{θ_n}, σ_{z_n}, $\tau_{\rho\theta_n}$ – компоненты тензора напряжений, r_s – радиус упругопластической границы в плите, $\rho_{\text{кон}}$ – линия контакта включения и плиты.

Ввиду малости величины ε, примем за линию контакта плиты и включения внешнюю границу включения, которая при разложении по малому параметру представляется в форме

$$\rho_{\text{кон}} = R^{(0)} + \delta R^{(1)}, \tag{6}$$

где $R^{(0)} = \alpha_1$, $R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos 2\theta$.

Все соотношения записаны в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к k_1 – пределу текучести на сдвиг материала плиты. Величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу упругопластической границы в плите r_{s0}. Для обозначения безразмерных величин используем прежние обозначения.

За нулевое приближение выберем осесимметричное состояние толстой плиты с круговым отверстием радиуса α, содержащим с натягом круглый цилиндр с внешним радиусом α_1 и внутренним β. На бесконечности конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями интенсивностями $P = \dfrac{P_1 + P_2}{2k_1}$. Внутренний контур включения нагружен усилиями интенсивностью P_0. Материал плиты и включения в пластической зоне описывается условием пластичности Мизеса для идеально упругопластического материала ($c_n = 0$).

Следуя [3], для пластины в упругой области имеем

$$\begin{gathered}
\sigma_{\rho_1}^{(0)} = P - \frac{\chi_1}{\rho^2}, \qquad \sigma_{\theta_1}^{(0)} = P + \frac{\chi_1}{\rho^2}, \qquad u_{\rho_1}^{(0)} = \frac{\chi_1}{2G\rho}, \\
e_{\rho_1}^{(0)} = -\frac{\chi_1}{2G\rho}, \qquad e_{\theta_1}^{(0)} = \frac{\chi_1}{2G\rho},
\end{gathered} \tag{7}$$

где $\chi_1 = \operatorname{sign}(P + q)$, $q = \sigma_{\rho_1}^{(0)}\Big|_{\rho=\alpha_1}$.

В пластической зоне пластины имеем

$$\begin{gathered}
\sigma_{\rho_1}^{(0)} = 2\chi_1 \ln\frac{\rho}{\alpha_1} + 2k\chi_2 \ln\frac{\alpha_1}{\beta} - P_0, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)} = 2\chi_1\left(1 + \ln\frac{\rho}{\alpha_1}\right) + 2k\chi_2 \ln\frac{\alpha_1}{\beta} - P_0, \\
u_{\rho_1}^{(0)} = \frac{\chi_1}{2G_1\rho}, \quad e_{\theta_1}^{p^{(0)}} = \frac{\chi_1}{2G_1}\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right), \quad e_{p_1}^{p^{(0)}} = -\frac{\chi_1}{2G_1}\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right),
\end{gathered} \tag{8}$$

где G_1 – модуль сдвига материала плиты, $\chi_2 = \pm 1$, $k = \dfrac{k_2}{k_1}$.

Во включении распределение поля напряжений и перемещений имеет вид

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)} = 2k\chi_2 \ln\frac{\rho}{\beta} - P_0, \qquad \sigma_{\theta_2}^{(0)} = 2k\chi_1\left(1 + \ln\frac{\rho}{\beta}\right) - P_0,$$
$$e_{\theta_2}^{p(0)} = \left(\frac{\chi_1}{2G_1} - (\alpha_1 - \alpha)\alpha_1\right)\frac{1}{\rho^2} - \frac{k\chi_2}{2G_2}, \tag{9}$$

где G_2 – модуль сдвига материала включения. Из условий сопряжения на упругопластической границе в плите определяем радиус упругопластической границы в плите

$$r_{s0} = \frac{1}{2\chi_1}\exp\left(2\chi_1 \ln\alpha_1 - 2k\chi_2 \ln\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right) + P_0 + P - \chi_1\right). \tag{10}$$

Рассмотрим первое приближение.

Граничные условия на бесконечности запишутся следующим образом

$$\sigma_{\rho_1}^{\infty} = P - \delta d_3 \cos 2\theta, \qquad \tau_{\rho\theta_1}^{\infty} = \delta d_3 \sin 2\theta, \tag{11}$$

где $P = \dfrac{P_1 + P_2}{2k}$, $\delta d_3 = \dfrac{P_1 - P_2}{2k}$, d_3 – безразмерная постоянная.

На внутреннем контуре включения граничные условия для первого приближения имеют вид [3]

$$\left(\sigma_{\rho_2}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_2}^{(0)}}{d\rho}\beta d_2 \cos 2\theta\right)\Big|_{\rho=\beta} = 0;$$
$$\left(\tau_{\rho\theta_2}^{(1)} + 2\left(\sigma_{\theta_2}^{(0)} - \sigma_{\rho_2}^{(0)}\right) d_2 \sin 2\theta\right)\Big|_{\rho=\beta} = 0. \tag{12}$$

На упругопластической границе в плите линеаризированные условия сопряжения также имеют вид [3]

$$\left[\sigma_{ij_1}^{(1)} + \frac{\partial\sigma_{ij_1}^{(0)}}{\partial\rho} r_s^{(1)}\right]\Big|_{\rho=1} = 0, \tag{13}$$

где $\sigma_{ij_1}^{(0)}$, $\sigma_{ij_1}^{(1)}$ – компоненты тензора напряжений для нулевого и первого приближения.

Вдоль линии контакта плиты и включения, имеем

$$\sigma_{\rho_1}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_1}^{(0)}}{d\rho}R^{(1)} = \sigma_{\rho_2}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_2}^{(0)}}{d\rho}R^{(1)},$$
$$\tau_{\rho\theta_2}^{(1)} - \left(\sigma_{\theta_2}^{(0)} - \sigma_{\rho_2}^{(0)}\right)\dot{s}_1 = \tau_{\rho\theta_1}^{(1)} - \left(\sigma_{\theta_1}^{(0)} - \sigma_{\rho_1}^{(0)}\right)\dot{s}_1 = 0, \quad \text{при } \rho = R^{(0)}, \tag{14}$$

где $s_1 = R^{(1)}/R^{(0)}$.

Рассмотрим случай малого упрочнения [1] $c_n = \delta c_n^{(1)}$, $n = 1, 2$.

Согласно алгоритму Ивлева – Ершова при учете граничных условий (11), имеем в упругой области плиты для $\infty > \rho > 1$

$$\sigma_{\rho_1}^{(1)} = \frac{A_{\text{пл}}}{\rho^2} - (d_3 + 6a_{21}\rho^{-4} + 4a_{22}\rho^{-2})\cos 2\theta,$$
$$\sigma_{\theta_1}^{(1)} = \frac{A_{\text{пл}}}{\rho^2} + (d_3 + 6a_{21}\rho^{-4})\cos 2\theta, \tag{15}$$
$$\sigma_{\rho\theta_1}^{(1)} = (d_3 - 6a_{21}\rho^{-4} - 2a_{22}\rho^{-2})\sin 2\theta,$$

где $A_{\text{пл}}$, a_{21}, a_{22} – константы, определяемые из условий сопряжения (14) на границе контакта плиты и включения.

В пластической области плиты, согласно [1, 3, 8] получим уравнение

$$\sigma_{\theta_1}^{(1)} - \sigma_{\rho_1}^{(1)} = 2c_1^{(1)} e_{\theta_1}^{p^{(0)}},$$

откуда для напряжений выводим

$$\sigma_{\rho_1}^{(1)} = A_{\text{пл}} - m_{1\text{пл}} \left(\ln \rho + \frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{\rho} \left(d_3 \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) - \right.$$
$$\left. -2\sqrt{3} a_{21} \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) + 2a_{22} \cos\gamma \right) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta_1}^{(1)} = A_{\text{пл}} - m_{1\text{пл}} \left(\ln \rho - \frac{1}{2\rho^2} + \frac{5}{4} \right) - \frac{2}{\rho} \left(d_3 \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) - \right. \tag{16}$$
$$\left. -2\sqrt{3} a_{21} \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) + 2a_{22} \cos\gamma \right) \cos 2\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta_1}^{(1)} = -\frac{2}{\rho} \left(d_3 \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3} a_{21} \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) + 2a_{22} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \right) \sin 2\theta,$$

где $\gamma = \sqrt{2} \ln \rho$, $m_{1\text{пл}} = \dfrac{2c_1^{(1)} k}{2G_1 + c_1}$.

Для пластического включения имеем

$$\sigma_{\rho_2}^{(1)} = \frac{d_2 k x_2 \beta}{\rho} \left(\left(-4\cos\left(\gamma_2 + \frac{\pi}{6}\right) - 4\sqrt{3} \sin\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{6}\right) \right) \cos\gamma + \right.$$
$$\left. + \left(-4\sin\left(\gamma_2 + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{6}\right) - 4\sqrt{3}\cos\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{6}\right) \right) \sin\gamma \right) \cos 2\theta -$$
$$-2d_2 k x_2 + \frac{m_{1\text{вкл}}}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\rho} \right) + m_{2\text{вкл}} \ln \frac{\beta}{\rho}, \tag{17}$$

$$\sigma_{\theta_2}^{(1)} = \sigma_{\rho_2}^{(1)} - 2d_2 k x_2 + \frac{m_{1\text{вкл}}}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\rho^2} \right) + m_{2\text{вкл}} \ln \frac{\beta}{\rho},$$

$$\tau_{\rho\theta_2}^{(1)} = \frac{4 d_2 \beta k x_2}{\rho} \left(2\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\beta}{\rho} - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\beta}{\rho}\right) \right) \sin 2\theta,$$

где $\gamma_2 = \sqrt{3} \ln \beta$, $m_{1\text{пл}} = 2c_2 \left(\dfrac{\chi_1}{2G_1} - (\alpha_1 - \alpha)\alpha_1 \right)$, $m_{2\text{пл}} = \dfrac{2c_2^{(1)} k \chi_2}{2G_2}$.

Используя соотношения на границе контакта плиты и включения (14), окончательно определяем вид констант $A_{\text{пл}}$, a_{21}, a_{22}.

Полученные соотношения (15)–(17) определяют напряженное состояние в плите для первого приближения. Для определения вида упругопластической границы первого приближения $r_s^{(1)}$ воспользуемся линеаризированными условиями сопряжения [3], из которых следует

$$r_s^{(1)} = -\left[\sigma_\theta^{(1)}\right] \cdot \left[\frac{\partial \sigma_\theta^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \Bigg|_{\rho=1}. \tag{18}$$

Из соотношения (18), используя (15) и (16), находим выражение, определяющее радиус упругопластической границы в плите

$$r_s^{(1)} = \frac{1}{4}(2d_3 + 9a_{21} + 2a_{22}) \cos 2\theta - 2c_{\text{пл}} + \frac{m_{1\text{пл}}}{4}. \tag{19}$$

При $d_3 = 0$ имеем случай равномерного растяжения конструкции на бесконечности, при $d_1 = d_2 = 0$ круговое отверстие в плите и круговое включение, при $c_n = 0$, $n = 1, 2$ – случай конструкции из идеально пластического материала [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Артемов, М. А.* О двуосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала / М. А. Артемов // ПМТФ. – 1985. – № 6. – С. 158–163.

[2] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.

[3] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

[4] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 701 с.

[5] *Кузнецов, П. Н.* Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эксцентрическим эллиптическим включением, при двухосном растяжении / П. Н. Кузнецов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – Т. 67, № 8/2. – С. 90–97.

[6] *Марушкей, Ю. М.* Двуосное растяжение упругопластического пространства с включением / Ю. М. Марушкей // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1975. – № 12. – С. 25–30.

[7] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

[8] *Спорыхин, А. Н.* Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2004. – 219 с.

M. V. Bogdanov, A. V. Kovalev, A. Y. Yakovlev

ABOUT MECHANICAL INTERACTION OF THE ELASTO-PLASTIC DESIGN'S ELEMENTS TAKING INTO ACCOUNT WITH A TRANSMITTING HARDENING

Voronezh State University

Abstract. In this work by a method [3] a tension definition in a compound elasto-plastic design consisting of a thick plate, weakened by an elliptic aperture, in which an elliptic inclusion is molded with a tightness is carried out. Plate and inclusion material are described by a correlation of Ishlinsky - Pragera [2, 4].

Keywords: an elasto-plastic design, pressing, a plate with inclusion, a tension (stress), a model of Ishlinsky - Pragera, a transmitting hardening.

Богданов Михаил Владимирович

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

`e-mail:` yakovlev@amm.vsu.ru

Ковалев Алексей Викторович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

`e-mail:` kav-mail@mail.ru

Яковлев Александр Юрьевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

`e-mail:` yakovlev@amm.vsu.ru

Bogdanov Michael Vladimirovich

Postgraduate student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Kovalev Aleksey Viktorovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Yakovlev Alexander Yuryevich

Ph.D., Assoc. Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh