

Н. Д. Вервейко, Е. Н. Ерохина, А. В. Ковалев

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ПЛОСКАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ СВЯЗНЫХ СЫПУЧИХ СРЕД

Воронежский государственный университет

Аннотация. В рамках плосконапряженного состояния решается осесимметричная задача нагружения внутренним и внешним давлением тонкой пластины с круговым отверстием или кольца из связного упругопластического сыпучего материала. Предполагается, что материал вне зоны пластического деформирования ведет себя упруго. Построена замкнутая система уравнений для определения границы пластической зоны в зависимости от параметров материала и внешних нагрузок.

Ключевые слова: пластичность, упругопластическая граница, пластический сжимаемый сыпучий материал.

УДК: 539.374

Введение. Фундаментальные математические модели условий пластичности сыпучих материалов представляют собой цилиндр или конус в пространстве главных напряжений. При этом ось цилиндра или конуса совпадает с осью первого инварианта тензора напряжений (см. [1], [2], [3]). Многочисленные эксперименты с глинами и песками показали наличие объемного деформирования реальных материалов при сдвиге, которое известно как эффект дилатансии грунтов. При этом объемное деформирование грунтов возможно и при отсутствии деформации сдвига, что говорит о замкнутости условия пластичности для связных сыпучих материалов (см. [4]). Введение гипотезы о вращении микрочастиц сыпучего материала и коэффициента трения качения таких частиц позволило представить условие пластичности (см. [5]):

$$\Phi = I_{2\sigma'}^2 - (Y + \alpha I_{1\sigma})^2 + f^2 I_{1\sigma}^2 = 0, \quad (1)$$

где $I_{2\sigma'}^2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$ - второй инвариант девиатора тензора напряжений, Y - предел текучести, α - коэффициент внутреннего трения, f - коэффициент трения качения, $I_{1\sigma}$ - первый инвариант тензора напряжений в форме эллипсоида вращения в пространстве главных напряжений, что является обобщением моделей статики сыпучих сред (см. [2], [4]).

С теоретической и практической точек зрения большой интерес представляет расчет зоны пластического деформирования сыпучей среды при ее осесимметричном нагружении давлением по круговому вырезу.

Осесимметричное деформирование связной сыпучей среды с наличием жесткопластической зоны и области упругого деформирования.

Рассмотрим плоское кольцо внешнего радиуса a и внутреннего радиуса b (рис.1) из связной сыпучей среды, нагруженное равномерно распределенным давлением P_a по внутренней и P_b по внешней окружностям кольца. Предположим (см. [6]), что при определенных значениях

внешних нагрузок в среде возникают области пластического и упругого деформирования, граница между которыми заранее неизвестна.

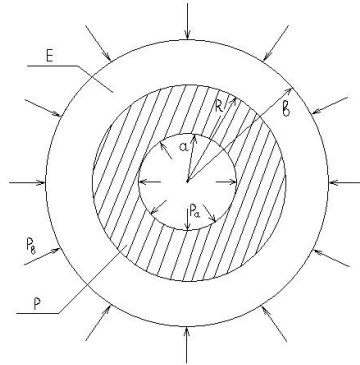


Рис. 1. Схематичное изображение области пластического и упругого деформирования материала под действием внутреннего и внешнего нагружений.

При описании механического поведения связной сыпучей среды в осесимметричном случае в цилиндрической системе координат (r, θ, z) будем использовать в пластической зоне уравнение равновесия в напряжениях:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (2)$$

где σ_r, σ_θ - компоненты тензора напряжений.

Условие пластичности для связного сжимаемого сыпучего материала представим в форме:

$$(1 - 3\alpha^2 + 3f^2)(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2) - (1 + 6\alpha^2 - 6f^2)\sigma_r\sigma_\theta - 6\alpha Y(\sigma_r + \sigma_\theta) - 3Y^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) получено в предположении плосконапряженного состояния ($\sigma_z = 0$). При соединяя к соотношениям (2), (3) граничное условие:

$$\sigma_r|_{r=a} = -P_a, \quad (4)$$

получаем замкнутую статически определимую систему уравнений для определения напряжений в пластической зоне.

Определение напряжений в упругой зоне, согласно [7], сводится в осесимметричном случае к решению уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0, \quad (5)$$

где $\varphi(r)$ - функция напряжений Эри и

$$\sigma_r^e = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \sigma_\theta^e = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}. \quad (6)$$

Граничное условие для напряжений в упругой зоне имеет вид:

$$\sigma_r^e|_{r=b} = -P_b. \quad (7)$$

К уравнениям (2)-(3) с граничным условием (4) и к уравнению (5) с условиями (6), (7) следует присоединить условия сопряжения решений. На границе раздела зон упругого и пластического деформирования они таковы:

$$\sigma_r|_{r=R} = \sigma_r^e|_{r=R}, \quad (8)$$

$$\sigma_\theta|_{r=R} = \sigma_\theta^e|_{r=R}, \quad (9)$$

где R - радиус границы зон пластического и упругого деформирования. Соотношение (8) при этом является граничным условием для напряжений в упругой зоне, а (9) - уравнением для определения R .

Система уравнений (2)-(3) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для σ_r :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E\sigma_r + F \pm \sqrt{K\sigma_r^2 + L\sigma_r + M}}{N \cdot r}, \quad (10)$$

где $E = -1 - 12f^2 + 12\alpha^2$, $F = 6\alpha Y$, $K = 3(-1 - 12f^2 + 12\alpha^2)$, $L = 36\alpha Y$, $M = 12(1 + 3f^2)Y^2$, $N = 2(1 + 3f^2 - 3\alpha^2)$.

Окружные напряжения σ_θ определяются из условия пластичности следующим образом:

$$\sigma_\theta = \frac{P\sigma_r + F \pm \sqrt{K\sigma_r^2 + L\sigma_r + M}}{N}, \quad (11)$$

где $P = 1 - 6f^2 + 6\alpha^2$.

Разрешая (10) с условием (4) относительно σ_r и определяя σ_θ из (11), получим напряженное состояние связанного сжимаемого сыпучего материала в пластической зоне.

Решение уравнения (5) имеет вид:

$$\varphi = A \cdot \ln r + B \cdot r^2 \cdot \ln r + C \cdot r^2 + D. \quad (12)$$

Откуда, согласно (6), принимая $B = 0$, получим

$$\sigma_r^e = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad (13)$$

$$\sigma_\theta^e = -\frac{A}{r^2} + 2C, \quad (14)$$

где A, C - константы, определяемые из условий (7), (8). Тогда

$$A = \frac{R^2 b^2 (P_b - P_i)}{b^2 - R^2}, \quad 2C = \frac{P_i R^2 - P_b b^2}{b^2 - R^2}, \quad (15)$$

где $P_i = -\sigma_r|_{r=R}$.

Подставляя (15) в (13)-(14), получим распределение напряжений в упругой зоне связанного сыпучего материала в форме:

$$\sigma_r^e = \frac{R^2 b^2 (P_b - P_i)}{b^2 - R^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i R^2 - P_b b^2}{b^2 - R^2}, \quad (16)$$

$$\sigma_\theta^e = -\frac{R^2 b^2 (P_b - P_i)}{b^2 - R^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i R^2 - P_b b^2}{b^2 - R^2}. \quad (17)$$

В случае бесконечной пластинки следует в (16), (17) положить $b \rightarrow \infty$.

Нахождение границы пластического деформирования связанной сыпучей среды.

Граница раздела зон упругого и пластического деформирования $r = R$ в сжимаемом связанном сыпучем материале определяется из (9). При этом напряжение в упругой зоне σ_θ^e вычисляется из (17), а напряжение в пластической зоне σ_θ вычисляется из (11) после решения

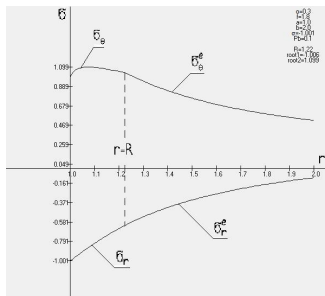
задачи Коши пошаговым алгоритмом Рунге-Кутты или Эйлера для обыкновенного дифференциального уравнения (10). Алгоритм определения граничной зоны пластического деформирования был реализован следующим образом. Начиная с внутренней границы $r = a$ с шагом h производился расчет радиального напряжения σ_r и окружного напряжения σ_θ в пластической зоне, и на каждом i -ом шаге $r_i = a + h \cdot i$ вычислялось упругое напряжение σ_θ^e по формуле (17), где в качестве давления на внутренней границе r_i использовалось пластическое радиальное напряжение. В случае совпадения вычисленного окружного упругого напряжения σ_θ^e с окружным пластическим напряжением σ_θ с погрешностью ε значение r_i принималось за границу пластической зоны:

$$|\sigma_\theta^e - \sigma_\theta| |_{r=R} \leq \varepsilon. \quad (16)$$

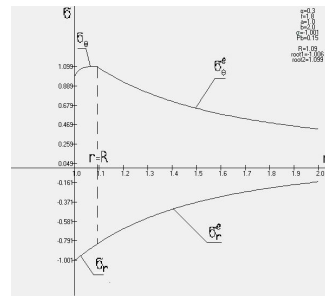
Численный эксперимент.

На рисунке 2 (а, б) представлены графики окружного и радиального напряжений в случае изменения внешнего давления, из которых следует, что увеличение внешнего давления при неизменном внутреннем давлении ведет к уменьшению зоны пластического деформирования. Этот факт объясняется тем, что увеличение внешнего давления P_b ведет к сжимающим σ_θ^e , что компенсирует растягивающие σ_θ , возникающие за счет давления P_a на внутреннем контуре.

На рисунке 3 (а, б) представлены графики окружного и радиального напряжений в случае изменения внутреннего давления, из которых следует, что увеличение внутреннего давления при неизменном внешнем давлении ведет к увеличению зоны пластического деформирования.



а) $P_b = 0.1, R = 1.22$



б) $P_b = 0.15, R = 1.09$

Рис. 2. Графики поведения окружного и радиального напряжений в пластической и упругой зонах при различных значениях внешнего давления.

На рисунке 4 (а, б) рассмотрены графики определения границы пластического деформирования в случае изменения коэффициента f , из которых следует, что увеличение коэффициента f ведет к увеличению зоны пластического деформирования.

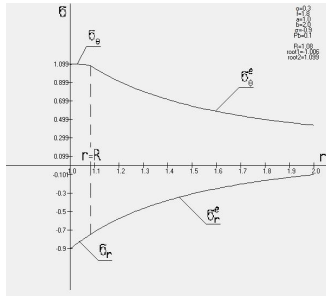
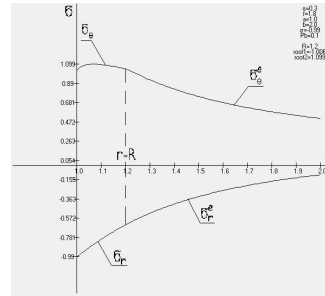
а) $P_a = 0.9, R = 1.08$ б) $P_a = 0.99, R = 1.2$

Рис. 3. Графики поведения окружного и радиального напряжений в пластической и упругой зонах при различных значениях внутреннего давления.

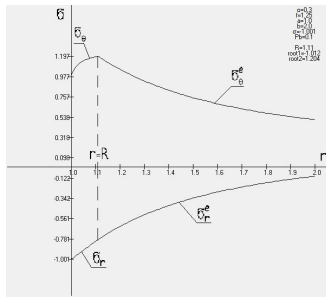
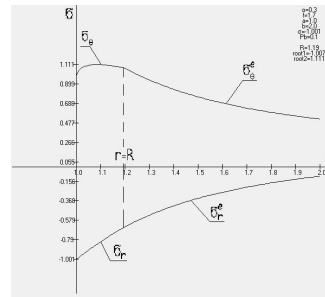
а) $f = 1.25, R = 1.11$ б) $f = 1.7, R = 1.19$

Рис. 4. Графики поведения окружного и радиального напряжений в пластической и упругой зонах при различных значениях коэффициента трения качения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 1 : Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 2 : Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
- [3] *Соколовский, В. В.* Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М. : Наука, 1990. – 272 с.
- [4] *Echlers, W.* A general approach to porous media elasto-plasticity / W. Echlers // MECH-Ber. / Univ. Essen. – 1989. – № 6. – P. 1–61.
- [5] *Валюхов, С. Г.* Микрополярная модель связанных сыпучих материалов / С. Г. Валюхов, Н. Д. Вервейко, О. А. Смотров. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1999. – 87 с.
- [6] *Спорыхин, А. Н.* Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2004. – 129 с.

[7] Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.

N. D. Verveyko, E. N. Erohina, A. V. Kovalev

**AXIALLY SYMMETRIC PLANE PROBLEM OF MECHANICS OF
GRANULATED SOLIDS**

Voronezh State University

Abstract. Axially symmetric problem of loading soil plate with circular aperture or soil ring is solved. It is assumed, material is elastic out of plastic strain range. Closed system of equations is constructed to detect plastic strain range boundary for different material parameters and external loads.

Keywords: plasticity, elastic-plastic boundary, plastic compressible material, soil.

Вервейко Николай Дмитриевич

доктор технических наук, профессор Воронежского государственного университета, г. Воронеж

e-mail: ver38@mail.ru

Ерохина Евгения Николаевна

аспирант Воронежского государственного университета, г. Воронеж

e-mail: erokhina1985@mail.ru

Ковалев Алексей Викторович

доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного университета, г. Воронеж

e-mail: kav-mail@mail.ru

Verveyko Nikolay Dmitrievich

Dr. Eng. Sci., Professor, Voronezh State University, Voronezh

Erohina Evgeniya Nicolaevna

Postgraduate Student, Voronezh State University, Voronezh

Kovalev Aleksey Viktorovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh