

В. В. Глаголев, А. А. Маркин

## О ВЛИЯНИИ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА НА ФОРМИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТУПИКОВОЙ ОБЛАСТИ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается возможность описания упругой и упругопластической стадий процесса деформирования вплоть до начала разделения тела, ослабленного трещиной в виде физического разреза. В модель трещины включен и слой материала, лежащий на мысленном продолжении физического разреза в сплошной среде. В процессе нагружения тела предполагается возможным существование пластической области в рамках данного слоя. Для описания поведения материала при переходе в пластическую область используется вариант деформационной теории, при этом изменение объема остается линейно упругим. Процесс упругопластического деформирования полагается лучевым, направляющий тензор девиатора напряжений в каждой точке слоя фиксируется его значением, достигнутом в момент перехода из упругой стадии в упругопластическую. Данное допущение позволило свести задачу к статически определимой. Получены зависимости компонент напряжений слоя и внешней расклинивающей силы от длины пластической области слоя.

**Ключевые слова:** трещина, разрушение, упругопластическая модель, упрочнение.

УДК: 539.375

Механика разрушения к настоящему времени имеет множество подходов к описанию НДС тел, ослабленных трещиной. Каждый из подходов включает в себя как модель трещины, так и соответствующий критерий ее продвижения. Наиболее распространенной моделью трещины в сплошной среде является представление в виде математического разреза [1-3]. Используя критерий Гриффитса в энергетическом или силовом варианте, удается прогнозировать трещиностойкость материалов, поведение которых, описывается моделью линейно упругого тела. Если же материал проявляет пластические свойства, то модель математического разреза исследует поведение поврежденных тел в рамках различных критериев образования новых материальных поверхностей [4,5] в зависимости от вида нагружения и степени пластической деформации. Отметим, что в этом случае ни одно из представлений в частности не дает ответа на вопрос о начале пластического деформирования в концевой области трещины Гриффитса. А наиболее известная и используемая модель Леонова - Панасюка - Дагдейла [6,7] предполагает наличие пластической зоны при сколь угодно малой внешней нагрузке.

Отсутствие общего подхода к описанию поведения упругопластических тел, ослабленных трещиной, моделируемой математическим разрезом приводит к рассмотрению альтернативных модельных представлений и вариантам постановок задач механики разрушения на их

---

Поступила 27.04.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-97500) и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракт П1125).

основе. Одним из подходов, позволяющих строить решения в рамках гипотез сплошной среды, является представление Макклиттока [8]. Следуя [8] в окрестности прохождения трещины выделяется слой некоторой толщины  $\delta_0$  механические свойства которого не отличаются от окружающего материала вплоть до начала разрушения, локализирующегося в слое. Разрушение в данном случае трактуется как эволюция слоя в сплошной среде. Согласно данному представлению трещину будем рассматривать как физический разрез. Толщину разреза выбираем как минимально допустимую с точки зрения выполнения гипотез механики сплошной среды. В совокупности с данным представлением в модель трещины включаем и материал среды, лежащий на мысленном продолжении физического разреза. Деформация слоя формирует граничные условия для сопряженной с ним среды. В работах [9-11] соответствующий материал определен как слой взаимодействия. Основными задачами при данном подходе являются определение численного значения толщины слоя, включая постановку возможных натуральных экспериментов по его нахождению, а также исследование конкретных краевых задач механики разрушения.

В рамках данного подхода исследован стандартный эксперимент на трещиностойкость для образца в виде двухконсольной балки [10]. В этой модели не учитывается влияние касательной нагрузки со стороны слоя на консоль по сравнению с нормальной. Это допущение приводит к тому, что в слое напряжение отрыва не превышает предел текучести, что характерно только для плоского напряженного состояния. В статье [11] предлагается возможная постановка задачи разрушения типа нормального отрыва для плоскости с полубесконечной трещиной при учете касательной составляющей нагрузки по границе слоя и смежной с ним среды. При постановке задач полагалось, что материал слоя подчиняется законам идеально упругопластического тела [12], а вне слоя среда описывается уравнениями линейной упругости. В представленной работе, в развитии [13], изучается: а) влияние упрочнения материала слоя на характер НДС окрестности трещины, б) развитие длины пластической зоны от внешней нагрузки для плоского напряженного и деформированного состояний, в) сравнение результатов решения задачи в рамках предложенной модели и модели полученной на основе гипотез Леонова - Панасюка - Дагдейла (ЛПД). Из полученного решения дается обоснование одному из возможных критериев начала образования новых материальных поверхностей для неделимого элементарного объема упругопластического материала.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим нагружение берегов трещины, моделируемой физическим разрезом в линейно упругой плоскости согласно схеме, показанной на Рис.1(а), соответствующей разрушению типа нормального отрыва. Предполагается возможным существование пластической области ( $OSS'O'$ ) в пределах слоя, лежащем на мысленном продолжении физического разреза в сплошной среде.

Наряду с напряжением  $\sigma_{11}(x_2)$  в слое учитываем напряжение  $\sigma_{22}(x_2)$ , обусловленное наличием касательных напряжений  $\sigma_{21}(x_2)$  вдоль границы с полуплоскостью.

Считаем, что связь между напряжениями и деформациями вне слоя взаимодействия описывается в рамках линейной теории упругости для случая плоского деформирования. Поведение материала слоя при активном нагружении определим следующими физическими соотношениями, являющимися следствием варианта теории пластичности Ильюшина - Ленского:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\sigma} = 2G(\varepsilon)\Delta \tilde{\varepsilon}; \\ \Delta p = K\Delta \theta, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\tilde{\sigma}$  – девиатор тензора истинных напряжений;  $\tilde{\varepsilon}$  – девиаторная составляющая тензора деформаций;  $\theta = \varepsilon \cdot E$ ,  $K$  – модуль объемного сжатия;  $p = \frac{1}{3}\sigma \cdot E$  – гидростатическая составляющая тензора напряжений;  $\varepsilon$  – параметр упрочнения;  $G(\varepsilon)$  – сдвиговой модуль;  $G(\varepsilon) = G_y$  при  $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} \leq \tau_m^2$ ;  $G(\varepsilon) = G_p$  при  $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} > \tau_m^2$ ;  $\tau_m$  – предел текучести.

В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость ( $x_1 \geq \delta_0/2$ ) (Рис.1(б)), а действие слоя заменим нагрузкой  $\vec{q}(x) = -(\hat{\sigma}_{11}\vec{e}_1 + \hat{\sigma}_{21}\vec{e}_2)$ . Здесь и далее

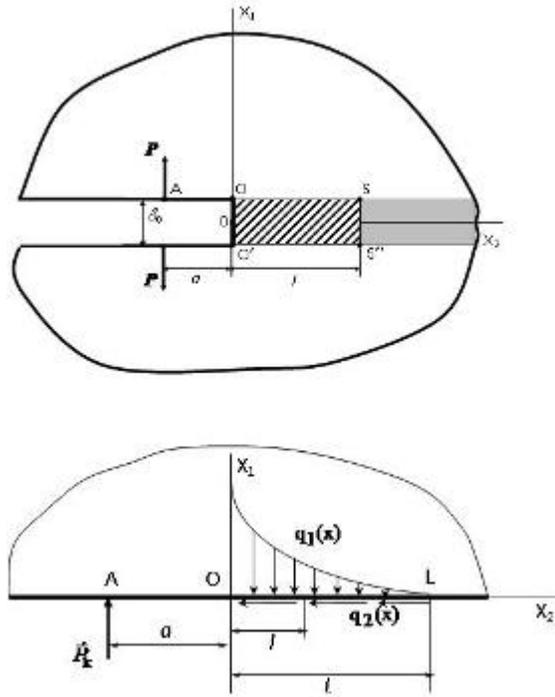


Рис. 1.

$x \equiv x_2/\delta_0$ ,  $\delta_0$  – безразмерная координата;  $\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\beta$   $i, j = 1, 2$  – безразмерные напряжения;  $\beta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$  – параметр материала для случая плоского деформирования,  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Следуя [11], основными неизвестными компонентами слоя считаем средние напряжения, определяемые следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{ij}(x) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \hat{\sigma}_{ij}(x_1, x) dx_1. \quad (2)$$

В силу антисимметрии касательных компонент тензора напряжений относительно оси  $Ox_2$  имеем  $\bar{\sigma}_{12}(x) = \bar{\sigma}_{21}(x) = 0$ . Среднее напряжение  $\bar{\sigma}_{22}(x)$  слоя будет связано с касательными напряжениями, действующими вдоль границы слоя соотношением

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(x)}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}\left(\frac{\delta_0}{2}, x\right). \quad (3)$$

Соотношения Фламана [14] связывают внешние нагрузки  $\bar{\sigma}_{11}$  и  $\hat{\sigma}_{12}$  с перемещениями границы безразмерными выражениями

$$\hat{u}_1(x) = -\hat{P} \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln\left|\frac{x-\xi}{L-\xi}\right| d\xi, \quad (4)$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x - \xi|}{L - \xi} d\xi, \quad (5)$$

здесь  $\hat{u}_i = u_i/\delta_0$ ,  $i = 1, 2$  – безразмерные перемещения;  $\hat{P} = P\beta/\delta_0$  – безразмерная сила на единицу толщины;  $L$  – удаленная точка с нулевым перемещением;  $L$  – расстояние от начала координат до  $L$ .

Перемещения границ слоя определяются в следующем виде:

$$\hat{u}_1(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{11}(x), \quad (6)$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_L^x \varepsilon_{22}(x) dx. \quad (7)$$

Напряжения, до достижения предела текучести  $\tau_m$ , связаны с деформациями законом Гука:

$$\varepsilon_{11} = \hat{A} \bar{\sigma}_{11} - \hat{B} \bar{\sigma}_{22}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{22} = \hat{A} \bar{\sigma}_{22} - \hat{B} \bar{\sigma}_{11}, \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \nu (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}), \quad (10)$$

где  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\hat{B} = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$  – безразмерные постоянные.

При решении упругопластической задачи полагаем, что процесс деформирования лучевой. В этом случае поведение материала слоя на стадии пластического деформирования, согласно (1), определяется следующими выражениями:

$$\varepsilon_{11} = \hat{C} + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{11} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{22}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{22} = \hat{C}_1 + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{22} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{11}, \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{33}^k + \nu_p (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{11}^k + \bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{22}^k), \quad (13)$$

где  $\hat{A}_p = \frac{(1-\nu_p^2)/E_p}{\beta}$ ;  $\hat{B}_p = \frac{\nu_p(1+\nu_p)/E_p}{\beta}$ ;  $\nu_p = \frac{3K-2G_p}{6K+2G_p}$ ;  $E_p = \frac{9KG_p}{3K+G_p}$ ;

$\hat{C} = \left(\hat{A} - \hat{A}_p\right) \bar{\sigma}_{11}^k - \left(\hat{B} - \hat{B}_p\right) \bar{\sigma}_{22}^k$ ;  $\hat{C}_1 = \left(\hat{A} - \hat{A}_p\right) \bar{\sigma}_{22}^k - \left(\hat{B} - \hat{B}_p\right) \bar{\sigma}_{11}^k$ ;

$\bar{\sigma}_{11}^k, \bar{\sigma}_{22}^k, \bar{\sigma}_{33}^k$  – напряжения, удовлетворяющие условию  $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} = \tau_m^2$ .

Используется кусочно-постоянная аппроксимация зависимости  $G(\varepsilon)$ . Символ  $p$  приписывается касательному модулю в пластическом состоянии.

Подставим в формулу (4) выражения (6), (8) и (11). В результате получим уравнение относительно  $\bar{\sigma}_{11}$  и  $\bar{\sigma}_{22}$  для области пластического деформирования:

$$\frac{1}{2} (\hat{C} + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{11} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad x \in [0, l]; \quad (14)$$

и для области обратимого деформирования:

$$\frac{1}{2}(\hat{A}\bar{\sigma}_{11} - \hat{B}\bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad x \in (l, L]. \quad (15)$$

Продифференцируем по  $x$  выражение (5)

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi. \quad (16)$$

Подставим в левую часть (16) выражения (9), (12) и получим следующие уравнения относительно  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$  и  $\hat{\sigma}_{21}$  для области пластического деформирования материала слоя:

$$\hat{C}_1 + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{22} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad x \in [0, l]; \quad (17)$$

и зоны упругого поведения:

$$\hat{A}\bar{\sigma}_{22} - \hat{B}\bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad x \in (l, L]. \quad (18)$$

Таким образом, имеем систему интегральных уравнений относительно компонент напряжений для описания пластического деформирования слоя (14), (17) и систему (15), (18) для моделирования упругого поведения слоя, дополненные связью (3).

Условие перехода из упругого состояния в пластическое, запишем в безразмерном виде:

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\tau}_m^2, \quad (19)$$

где  $\hat{\sigma} = \beta \tilde{\sigma}$  – безразмерный девиатор тензора напряжений,  $\hat{\tau}_m$  – безразмерный предел текучести.

Пусть  $\hat{\sigma}_T = \beta \sigma_T$  – безразмерный предел текучести при одноосном растяжении. Перепишем выражение (19) исключая  $\bar{\sigma}_{33}$  с помощью связи (10)

$$\sqrt{\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2 - \bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22} + C(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22})^2} = \hat{\sigma}_T, \quad (20)$$

где  $C = \nu(\nu - 1)$ .

Используя условие (20), соотношения (14), (18), (15), (17), (3), запишем соответствующие системы уравнений для пластической области, области переходящей из упругого состояния в пластическое и упругой области.

Система уравнений, описывающая поведение пластической области слоя взаимодействия, где  $\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} > \hat{\tau}_m^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{11} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \\ \hat{C}_1 + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{22} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}. \end{array} \right. \quad (21)$$

Уравнения для области перехода из упругого состояния в пластическое, где  $\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\tau}_m^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{A}\bar{\sigma}_{11} - \hat{B}\bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \\ \hat{A}\bar{\sigma}_{22} - \hat{B}\bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}, \\ \sqrt{\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2 - \bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22} + C(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22})^2} = \hat{\sigma}_T. \end{array} \right. \quad (22)$$

Система уравнений для упругой области слоя, где  $\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} \leq \tau_m^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{A}\bar{\sigma}_{11} - \hat{B}\bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \\ \hat{A}\bar{\sigma}_{22} - \hat{B}\bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}. \end{array} \right. \quad (23)$$

Система уравнений (21) – (23) с граничным условием  $\hat{\sigma}_{22}|_{x=0} = 0$  позволяет установить связь между распределением напряжений вдоль слоя взаимодействия на упругой и упруго-пластической стадиях процесса и внешнего усилия  $\hat{P}$ . Задавая длину пластической зоны слоя взаимодействия  $\ell_p$  можно определить соответствующее распределение напряжений и значения внешней нагрузки  $\hat{P}(\ell_p)$ .

**2. Решение задачи.** Исследовать полученные системы интегральных и дифференциальных уравнений будем в рамках дискретной модели, представляя слой взаимодействия набором квадратных в плане  $\delta_0$ -элементов. Основным постулатом данной модели является положение об однородности НДС в каждом из элементов.

Для решения задачи разобьем границу полуплоскости OL на N граничных элементов [15]. Считаем, что каждый граничный элемент характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжения  $\hat{\sigma}_{ij}^{(k)}$ , где  $k = \overline{1 \dots N}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Построим дискретные выражения интегральных операторов:

$$\int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \left( \frac{|x-\xi|}{L-\xi} \right) d\xi = \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_{11}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \left( \frac{|x_j-\xi|}{L-\xi} \right) d\xi, \quad (24)$$

$$\int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{21}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j-\xi} d\xi. \quad (25)$$

Проинтегрируем соотношение (3) по j элементу:

$$\hat{\sigma}_{21}^{(j)} = -\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \bar{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}. \quad (26)$$

Подставив (24)-(26) в (21)-(23), получим дискретную модель упругопластического поведения материала слоя взаимодействия.

Для элементов слоя, находящихся в пластическом состоянии:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{11}^{(j)} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{22}^{(j)}) = -\hat{P} \ln \frac{x_j + a}{L + a} + \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_{11}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \left( \frac{|x_j - \xi|}{L - \xi} \right) d\xi, \\ \hat{C}_1 + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{11}^{(j)} = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{21}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j - \xi} d\xi, \\ \hat{\sigma}_{21}^{(j)} = -\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \bar{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}. \end{array} \right. \quad (27)$$

Для элемента, переходящего из упругого состояния в пластическое:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{A} \bar{\sigma}_{11}^{(j)} - \hat{B} \bar{\sigma}_{22}^{(j)}) = -\hat{P} \ln \frac{x_j + a}{L + a} + \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_{11}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \left( \frac{|x_j - \xi|}{L - \xi} \right) d\xi, \\ \hat{A} \bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \hat{B} \bar{\sigma}_{11}^{(j)} = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{21}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j - \xi} d\xi, \\ \hat{\sigma}_{21}^{(j)} = -\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \bar{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}, \\ \sqrt{\bar{\sigma}_{11}^{(j)2} + \bar{\sigma}_{22}^{(j)2} - \bar{\sigma}_{11}^{(j)} \bar{\sigma}_{22}^{(j)}} + C \left( \bar{\sigma}_{11}^{(j)} + \bar{\sigma}_{22}^{(j)} \right)^2 = \hat{\sigma}_T. \end{array} \right. \quad (28)$$

Система уравнений для элементов слоя, деформируемых упруго:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{A} \bar{\sigma}_{11}^{(j)} - \hat{B} \bar{\sigma}_{22}^{(j)}) = -\hat{P} \ln \frac{x_j + a}{L + a} + \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_{11}^{(j)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \frac{x_j - \xi}{L - \xi} d\xi, \\ \hat{A} \bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \hat{B} \bar{\sigma}_{11}^{(j)} = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{21}^{(j)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j - \xi} d\xi, \\ \hat{\sigma}_{21}^{(j)} = -\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \bar{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}. \end{array} \right. \quad (29)$$

Система уравнений содержит  $3n + 1$  уравнения от  $3n + 1$  неизвестного. Неизвестными являются  $3n$  обобщенных напряжений и сила  $\hat{P}$ , обеспечивающая соответствующее напряженное состояние при заданном количестве элементов, находящихся в состоянии пластичности. Процесс решения рассмотренной задачи сводится к пошаговому отысканию компонент напряжений и усилия  $\hat{P}$  при добавлении на каждом шаге в зону пластического деформирования одного элемента.

Из решения упругой задачи (системы (29), являющейся линейной) имеем:  $\bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{33} \geq \bar{\sigma}_{22}$ , следовательно, критерий Треска - Сен-Венана имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22} = \hat{\sigma}_T. \quad (30)$$

Образование пластической зоны рассматривается как последовательный переход элементов слоя в пластическое состояние. На каждом этапе решения упругопластической задачи учитывалось перераспределение напряжений, вызываемое переходом нового элемента в состояние пластического деформирования. Если в переходном элементе напряжения удовлетворяли неравенству:  $\bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{22} \geq \bar{\sigma}_{33}$ , то в этом случае в качестве приближения к критерию (20) использовалось условие:

$$\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{33} = \hat{\sigma}_T. \quad (31)$$

Отметим, что если изначально вместо критерия Губера - Мизеса, использовать критерий Треска - Сен-Венана, то дискретное решение будет сведено к анализу линейных систем уравнений. Соответствующее представление в рамках идеально упругопластической модели [11] рассмотрено в [10].

Полученная система уравнений трансформируется для описания плоского напряженного состояния, если в законе Гука (8), (9) принять  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\hat{B} = \frac{\pi\nu}{2}$ , в условии (20) положить  $C = 0$ , а компоненты напряжения отнести к параметру  $\beta = \frac{2}{\pi E}$ .

**3. Анализ полученного решения.** Было проведено исследование влияния числа граничных элементов на результаты расчетов. Установлено, что при  $N > 1000$  расчетные значения полей напряжений практически не меняются, также  $N$  не влияет на скорость сходимости итерационного процесса.

На Рис.2(а) построены эпюры распределения напряжений в слое взаимодействия на первых 6 элементах при следующих расчетных характеристиках:  $N = 1000$ ;  $a = 10$ ;  $G_p = 0,1G_y$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_T = 600$  МПа;  $\nu = 0,25$  для случая пластического деформирования первого элемента и перехода второго в состояние текучести. Непрерывные линии соответствуют решению нелинейной системы (27)-(29), а штриховые – начальному приближению. Кривые 1 и 4 определяют напряжение  $\bar{\sigma}_{11}$ , 2 и 5 -  $\bar{\sigma}_{22}$ , 3 и 6 -  $\bar{\sigma}_{33}$ .

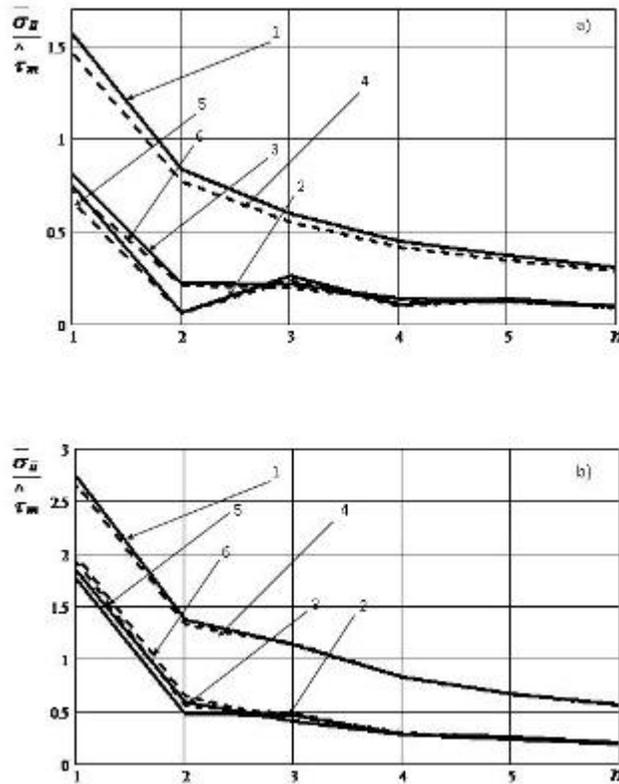


Рис. 2.

Проведено исследование влияния параметра упрочнения на распределение напряжений в зоне предразрушения. На Рис.2(b) построены эпюры распределения напряжений в слое взаимодействия на первых 6 элементах для случая перехода третьего элемента в состояние пластичности при пластическом течении на первых двух. Непрерывные линии соответствуют  $G_p = 0,1G_y$ , а штриховые –  $G_p = 0,001G_y$ . Кривые 1 и 4 определяют напряжение  $\bar{\sigma}_{11}$ , 2 и 5 –  $\bar{\sigma}_{22}$ , 3 и 6 –  $\bar{\sigma}_{33}$ .

В случае плоского напряженного состояния можно сравнить получаемый результат данной модельной задачи с результатом, решения той же самой задачи, но в рамках модели Леонова - Панасюка - Дагдейла.

На Рис. 3 отображены зависимости безразмерного расклинивающего усилия и соответствующая ему длина тонкой пластической зоны от выбранной расчетной модели для первых 5 элементов при следующих расчетных характеристиках:  $N = 1000$ ;  $a = 10$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_T = 600$  МПа;  $\nu = 0,25$ . Для модели трещины в виде физического разреза рассмотрено как плоское напряженное, так и плоское деформированное состояние. Непрерывная линия 1 соответствует решению Леонова-Панасюка-Дагдейла штриховые –  $G_p = 0,01G_y$ , штрихпунктирные –  $G_p = 0,1G_y$ . Графики 2, 4 построены для случая плоского напряженного состояния, 3, 5 – для плоского деформированного состояния.  $P_l$ - нагрузка, обеспечивающая пластическое течение на  $l$  элементах.  $P_H$  - нагрузка, необходимая для выхода первого элемента в пластическое состояние для случая плоского напряженного состояния.

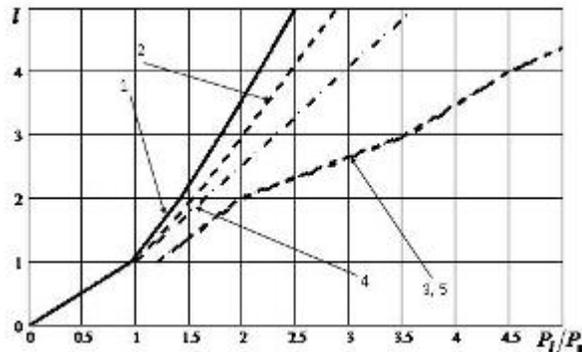


Рис. 3.

Из результатов расчета видно, что предложенная модель хорошо согласуется с ЛПД подходом для плоского напряженного состояния при малом упрочнении материала. Кроме того, удастся смоделировать известный экспериментальный факт о различии (примерно в три раза) тонкой пластической зоны в плоском напряженном состоянии от плоского деформированного состояния [16].

В рамках представленного подхода возникает вопрос о выборе критерия начала образования новых материальных поверхностей. Считая поверхностную энергию постоянной величиной конкретного материала из результатов работы [8] следует, что источник ее возникновения заключен в свободной энергии материала слоя взаимодействия. В этом случае, по аналогии с энергетическим критерием Гриффитса, разрушение элемента слоя начинается при достижении удельной свободной энергией элемента слоя критического значения.

В безразмерном виде представление свободной энергии в случае плоской деформации принимает вид:

$$\psi = 0,25\pi(\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2) - 0,5\nu\pi\bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22}/(1 - \nu),$$

а при плоском напряженном состоянии:

$$\psi = 0,25\pi(\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2) - 0,5\nu\pi\bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22}.$$

На Рис.4 построены зависимости удельной свободной энергии первого элемента слоя  $\psi$  от длины пластической области (количества пластических элементов). Штриховая линия соответствует  $G_p = 0,1G_y$ , штрихпунктирная –  $G_p = 0,01G_y$ .

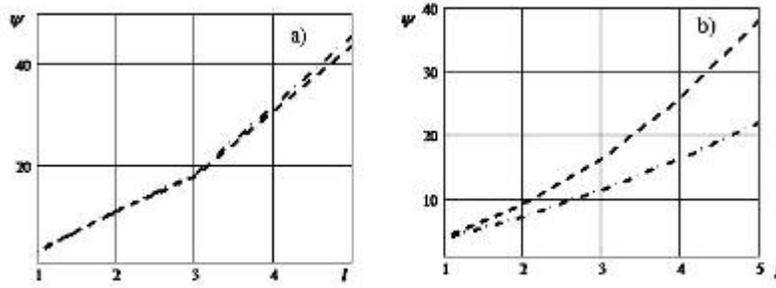


Рис. 4.

На Рис. 4а рассмотрена плоская деформация, а на Рис. 4б – плоское напряженное состояние. Результаты расчета показывают (Рис.3 и Рис.4), что в случае плоской деформации в окрестности вершины трещины реализуется существенная гидростатика и упрочнение материала не существенно при расчете на прочность, а для плоского напряженного состояния упрочнение необходимо учитывать.

Сформулируем основные выводы по работе:

1. Дана постановка задачи о развитии тонкой пластической зоны с условием текучести Губера-Мизеса. Решение задачи сведено к системе нелинейных алгебраических уравнений. Предложен итерационный метод решения данной системы, где в качестве начального приближения используется решение линейной системы уравнений с условием текучести Треска - Сен-Венана.

2. Предположение о лучевом характере процесса упругопластического деформирования позволило свести задачу к статически определимой.

3. Учет упрочнения материала в рассмотренной задаче существенен только для плоского напряженного состояния.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения / Д. Д. Ивлев // Прикладная механика и техническая физика. – 1967. – № 6. – С. 88–128.
- [3] *Черных, К. Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин / К. Ф. Черных. – М. : Наука, 1996. – 288 с.
- [4] *Партон, В. З.* Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1985. – 504 с.
- [5] *Астафьев, В. И.* Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2001. – 632 с.
- [6] *Dugdale, D. S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // Journ. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8. – № 2. – P. 100–108.
- [7] *Леонов, М. Я.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5. – № 4. – С. 391–401.
- [8] *Макклиток, Ф.* Пластические аспекты разрушения / Ф. Макклиток // Разрушение. – М., 1975. – Т. 3. – С. 67–262.
- [9] *Глаголев, В. В.* Определение термомеханических характеристик процесса разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – № 6. – 2007. – С. 101–112.
- [10] *Гаврилкина, М. В.* К решению одной задачи механики разрушения / М. В. Гаврилкина, В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика. – Т. 48 – № 4. – 2007. – С. 121–127.
- [11] *Глаголев, В. В.* Об одной постановке задачи упругопластического разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50 – № 4. – С. 187–195.
- [12] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 701 с.
- [13] *Новожилов, В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212–222.
- [14] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.
- [15] *Крауч, С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела : пер. с. англ. / С. Крауч, А. Старфилд. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
- [16] *Irvin, G. R.* Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control / G. R. Irvin // Engn. Fracture Mechanics. – 1968. – Vol.1. – P. 241–257.

V. V. Glagolev, A. A. Markin

**ABOUT INFLUENCE OF HARDENING OF A MATERIAL ON THE  
FORMATION OF A TENSION OF DEADLOCK AREA OF A CRACK OF A  
NORMAL FRACTURE**

*Tula State University*

**Abstract.** The possibility of the description elastic and elasto-plastic stages of a formation process is considered up to the beginning of division of a body weakened by a crack in the form of a physical cut. The layer of the material lying on mental continuation of a physical cut in the continuous environment is included in a crack model also. In a loading process of the bodies the existence of a plastic area within the limits of the given layer is supposed possible. For the description of a material behaviour at transition in the plastic area the variant of the deformation theory is used, thus volume change remains linearly elastic. The process of the elasto-plastic deformations is necessary beam, the directing tensor of the stress deviator in each point of a layer is fixed by its value, reached at the moment of transition from an elastic stage in elasto-plastic one. The given assumption has allowed to reduce a problem to. Dependences of a component of the pressure of a layer and external disjoining forces from the length of a plastic area of a layer are received.

**Keywords:** a crack, a destruction, an elasto-plastic model, a hardening.

*Глаголев Вадим Вадимович*

*доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования Тульского государственного университета, г. Тула*

**e-mail:** vadim@tsu.tula.ru

*Маркин Алексей Александрович*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования Тульского государственного университета, г. Тула*

**e-mail:** markin@tsu.tula.ru

*Glagolev Vadim Vadimovich*

*Dr. Sci. Phys.&Math., Professor of Mathematical Modelling, Tula State University, Tula*

*Markin Alexey Aleksandrovich*

*Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Head, Department of Mathematical Modelling, Tula State University, Tula*