

Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин

УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК В ПОРИСТЫХ МАССИВАХ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ СЖАТОГО СКЕЛЕТА

Военный авиационный инженерный университет

Воронежский государственный университет

Аннотация. В рамках общей трехмерной линеаризированной теории устойчивости малых деформаций разработан общий подход решения задач устойчивости цилиндрических и сферических горных выработок на основе предложенной модели сплошной среды, учитывающей пористую структуру материала и сложные реологические свойства сжатого скелета.

Ключевые слова: пористые среды со сложной реологией сжатого скелета, напряженно-деформированное состояние, точные трехмерные уравнения, устойчивость горных выработок.

УДК: 539.374

Введение. Одним из важнейших приложений трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел являются задачи механики горных пород, а именно горные выработки и подземные полости. Анализ возможности разрушения массива возле них с учетом его последствий, а также разработка конструктивно-технологических мероприятий, обеспечивающих безаварийное функционирование выработок, являются одной из основных и актуальных проблем этой отрасли науки.

Решение вопроса устойчивости состояния равновесия массива горных пород возле выработок остается актуальной задачей в течение последних 40 лет. Основоположником этого направления является Л. В. Ершов, первая статья [1] которого в этом направлении была опубликована в 1962 г. В ней рассмотрена осесимметричная задача об устойчивости вертикальной горной выработки кругового поперечного сечения при моделировании горной породы упругим изотропным сжимаемым телом.

Однако, теоретический анализ и практика эксплуатации горных выработок, как отмечено в работах [2, 3] показывают, что применение упругого (как изотропного, так и анизотропного) тела в качестве модели массива горных пород не отражает реальную картину процессов проходящих вблизи глубоких выработок. Это обусловлено тем, что напряжения, соответствующие критическому состоянию породы вокруг выработки во много раз превышают предел прочности горной породы. В связи с этим материал массива в приконтурной области перейдет в неупругое состояние раньше, чем произойдет его локальная потеря устойчивости. В работах [2, 3] отмечается, что наиболее достоверные результаты исследования устойчивости горных выработок получаются при привлечении более сложных моделей, как наиболее полно отражающих реальное поведение горных пород. С этой точки зрения использование моделей сложных сред, в которых учитываются такие свойства, как пористость, пластичность, вязкость, упрочнение, обнаруживаемые у реальных материалов, не могут не представлять существенный научный и практический интерес.

1. Модель пористого упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела.

В качестве модели среды, учитывающей пористую структуру материала и упруго-вязко-пластические свойства сжатого скелета бралась модель, механическая схема которой показана на рисунке 1.

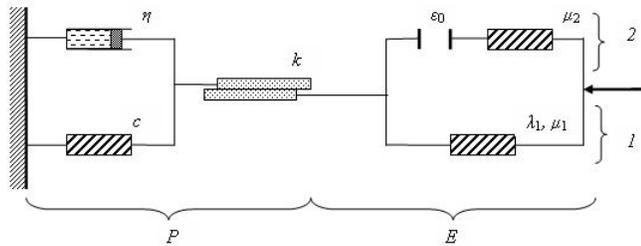


Рис. 1. Реологическая схема пористой упруго-вязко-пластической среды.

Модель состоит из двух последовательно соединенных составных частей: пластической – P и упругой – E . Пластическая часть состоит из пластического элемента (предел текучести k), последовательно соединенного с параллельной связкой вязкого элемента (коэффициент вязкости η) и упругого элемента (коэффициент упрочнения c). Упругая часть состоит из упругого сжимаемого элемента 1 (коэффициенты Ляме λ_1, μ_1) и параллельно подсоединенной к нему последовательной связки 2 жесткого контакта (начальный раствор пор ε_0) и упругого несжимаемого элемента (коэффициент упругости μ_2).

Горную породу, в рамках предложенной реологической модели, будем считать сплошной средой, напряженное состояние которой характеризуется симметричным тензором напряжений σ_j^β . Поля напряжений и деформаций такой среды будут определяться соотношениями геометрически линейной теории, что вполне оправдано для достаточно жестких сред.

Основные соотношения теории пористой упруго-вязко-пластической среды для рассматриваемой реологической модели в произвольной криволинейной системе координат будут следующие:

- уравнения равновесия в напряжениях

$$\nabla_\beta \sigma_j^\beta + X_j = 0, \quad (1)$$

где символ ∇_β обозначает ковариантную производную по β -ой компоненте; X_j – массовые силы;

- граничные условия

а) в усилиях на части поверхности S_1 тела

$$N_\beta \sigma_j^\beta = P_j, \quad (2)$$

где N_β – орты нормали к поверхности S_1 тела, P_j – составляющие вектора поверхностных сил;

б) в перемещениях на части поверхности S_2 тела

$$u_\beta = U_\beta, \quad (3)$$

где u_β – компоненты вектора перемещений;

- соотношения Коши, связывающие компоненты малых деформаций ε_j^β с компонентами вектора перемещений u_β

$$2\varepsilon_\beta^j = \nabla_\beta u^j + \nabla^j u_\beta; \quad (4)$$

- условия непрерывности перемещений и поверхностных сил на границе S раздела областей упругого и пластического деформирования

$$[u_j]|_S = 0, \quad [N_j \sigma_\beta^j]|_S = 0. \quad (5)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на границе S . По повторяющимся индексам, если особо не оговорено, производится суммирование от 1 до 3.

Напряжения параллельной связки “1 – 2” находятся как сумма напряжений элемента “1” и последовательной связки “2”.

$$\sigma_j^\beta = (\sigma_j^\beta)_1 + (\sigma_j^\beta)_2. \quad (6)$$

Связь между напряжениями и деформациями в упругом элементе “1” определим законом Гука для сжимаемого тела

$$(\sigma_j^\beta)_1 = \lambda_1 \varepsilon_\alpha^\alpha g_j^\beta + 2\mu_1 \varepsilon_j^\beta, \quad (7)$$

где λ_1 и μ_1 – параметры Ламе, g_j^β – смешанные компоненты метрического тензора.

Уравнение жесткого контакта, входящего в последовательное соединение “2” согласно [4] имеет вид

$$\sigma_j^\beta (\varepsilon_\alpha^\alpha + \varepsilon_0) = 0, \quad (8)$$

причем $\sigma_j^\beta = 0$ до схлопывания пор, и $\varepsilon_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0$ после.

Связь между напряжениями и деформациями в упругом элементе, входящем в “2”, определим законом Гука для несжимаемого тела

$$(s_j^\beta)_2 = 2\mu_2 (\varepsilon_j^\beta)_2, \quad (9)$$

где $(s_j^\beta)_2 = (\sigma_j^\beta)_2 - \frac{1}{3} (\sigma_\alpha^\alpha)_2 g_j^\beta$ – компоненты девиатора тензора напряжений.

Зависимость напряжений в последовательном соединении “2” от деформаций определяется соотношением

$$(\sigma_j^\beta)_2 = \begin{cases} 0, & -\varepsilon_\alpha^\alpha < \varepsilon_0 \\ 2\mu_2 \left((\varepsilon_j^\beta)_2 - (\varepsilon_j^\beta)_2^0 \right) + \frac{1}{3} (\sigma_\alpha^\alpha)_2 g_j^\beta, & -\varepsilon_\alpha^\alpha \geq \varepsilon_0, \end{cases} \quad (10)$$

где $(\varepsilon_j^\beta)_2^0$ – деформации компонента “2” до момента схлопывания пор, причем $\varepsilon_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0$.

Полагалось, что полное схлопывание пор происходит в фазе упругого деформирования среды, а сжатый скелет ведет себя как упрочняющееся упруго-вязко-пластическое тело.

В зоне пластического деформирования сжатого скелета будем использовать модель несжимаемого упруго-вязко-пластического тела [5] с поверхностью нагружения

$$F \equiv \left(s_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta - \eta e_j^\beta \right) \left(s_\beta^j - c \varepsilon_\beta^j - \eta e_\beta^j \right) - k^2 = 0, \quad (11)$$

где e_j^β – компоненты тензора скоростей пластических деформаций.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой $\varepsilon_{\beta j}^e$ и пластической $\varepsilon_{\beta j}^p$ составляющих

$$\varepsilon_{\beta j} = \varepsilon_{\beta j}^e + \varepsilon_{\beta j}^p, \quad (12)$$

причем, упругие деформации $\varepsilon_{\beta j}^e = \left(\varepsilon_{\beta j}^e\right)_1 = \left(\varepsilon_{\beta j}^e\right)_2$ связаны с напряжениями соотношениями (7) и (10). Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^p = 0. \quad (13)$$

Тензор скоростей пластических деформаций связан тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$e_j^p = \psi \left(s_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta - \eta e_j^\beta \right), \quad (14)$$

если выполняется условие пластичности (11). Здесь ψ — положительный скалярный множитель.

Тело остается упругим пока

$$s_j^\beta s_\beta^j < k^2. \quad (15)$$

В теле остаются несхлопнутые поры пока

$$-\varepsilon_\alpha^\alpha < \varepsilon_0. \quad (16)$$

Тело остается упругим с наличием несхлопнутых пор пока

$$\left(\sigma_j^\beta + \frac{1}{3} \delta_j^\beta (3\lambda_1 + 2\mu_1) \varepsilon_0 \right) \left(\sigma_\beta^j + \frac{1}{3} \delta_\beta^j (3\lambda_1 + 2\mu_1) \varepsilon_0 \right) < k^2. \quad (17)$$

Для возможности перехода путем интегрирования от соотношений между напряжениями и скоростями деформаций для пластической среды к соотношениям между напряжениями и деформациями будем предполагать, что имеет место процесс простого нагружения или мало отличающееся от него процессы. Это предположение базируется на соображениях как теоретического, так и экспериментального характера.

Для нахождения деформаций на момент схлопывания пор в упругой фазе положим, что процесс нагружения состоит из двух этапов. На первом - часть нагрузки идет на полное схлопывание пор, на втором - нагружение происходит за счет оставшейся части нагрузки.

Система уравнений (1) - (14), относящаяся к зонам упругого ($\overset{e}{V}$) деформирования пористого тела и сжатого скелета, а также к зоне пластического ($\overset{p}{V}$) деформирования сжатого скелета, при определенной форме поверхности нагружения представляет собой замкнутую математическую задачу, которая положена в основу определения основных напряженно-деформированных состояний горного массива возле свободных или подкрепленных вертикальных, горизонтальных, сферических выработок и их многослойных крепей.

Очевидно, что если в рассматриваемой схеме (рис.1) убрать жесткий элемент (положить $\varepsilon_0 = 0$), приходим к известной модели упруго-вязко-пластического тела, предложенной А. Н. Спорыхиным [5], если же, положить, $\varepsilon_0 \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$, то приходим к модели упрочняющегося упруго-пластического тела, предложенной Д. Д. Ивлевым [6].

2. Устойчивость подкрепленных горных выработок. При изучении бифуркации состояния равновесия или бифуркации процесса деформирования трехмерных тел со сложными реологическими свойствами будем исходить из следующего основного предположения: об устойчивости основного состояния деформируемых тел с реологическими свойствами будем судить по поведению малых возмущений во времени в рамках соответствующей линеаризованной задачи. В качестве критерия устойчивости принимается следующий: состояние равновесия или процесс деформирования считается устойчивым, если возмущения во времени затухают и неустойчивым, если возрастают.

Известно, что первым этапом при решении вопроса о локальной неустойчивости в задачах геомеханики является определение основного (докритического) напряженно деформированного состояния. В случае некруговых поперечных профилей горных выработок не удается построить точных аналитических решений. Основываясь на схеме расчета Ивлева-Ершова [7], в работах [8 - 10], были найдены в первом приближении поля напряжений и перемещений для области массива, содержащего выработку с некруговой (близкой по форме к эллиптической или правильной многоугольной) формой поперечного сечения, а также определены напряженно-деформированные состояния многослойных разномодульных крепей горных выработок.

Исследование устойчивости основных состояний горизонтальных, вертикальных и сферических выработок свободных от крепей или подкрепленных многослойными крепями различной конфигурации при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения и в предположении, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия для областей пластического V_i^p и упругого V_i^e деформирования массива и крепи имеют вид

$$\nabla_\beta \left(\sigma_{ji}^\beta + \sigma_{\alpha i}^{0\beta} \nabla^\alpha u_{ji} \right) - \rho s^2 u_{ji} = 0, \quad s = i\omega. \quad (18)$$

Здесь и далее по индексу i суммирования нет (если особо не оговорено) $i=0, 1, 2, \dots, N$ – число слоев крепи, кружок вверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния.

Граничные условия на внутренней поверхности крепи и условия затухания возмущений в массиве горных пород на достаточном удалении от выработки запишем соответственно в виде

$$N_\beta \left(\sigma_{jN}^\beta + \sigma_{\alpha N}^{0\beta} \nabla^\alpha u_{jN} \right) = 0, \quad u_{j0}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (19)$$

Условия непрерывности на упругопластических границах γ_i имеют вид

$$\left[N_\beta \left(\sigma_{ji}^\beta + \sigma_{\alpha i}^{0\beta} \nabla^\alpha u_{ji} \right) \right] = 0, \quad [u_{ji}] = 0. \quad (20)$$

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для сжатого скелета, обладающего упруго-вязко-пластическими свойствами и свойством дальнейшей несжимаемости в пластических и упругих областях представима в форме

$$\left(\sigma_j^\beta \right)_i = p_i \delta_j^\beta + 2\mu_i \left(\varepsilon_j^\beta \right)_i - a_i b_i \left(f_j^\beta \right)_i, \quad (21)$$

где p_i – множитель Лагранжа, $a_i = \frac{4\mu_i^2}{k_i^2(2\mu_i + c_i + \eta_i s)}$, $\left(f_j^\beta \right)_i = \left(s_j^\beta \right)_i - c_i \left(\varepsilon_j^\beta \right)_i$, $b_i = \left(f_i^k \right)_i \left(\varepsilon_i^k \right)_i$. В упругих областях надо положить $a_i = 0$.

Если компоненты докритического состояния зависят только от одной переменной, то уравнения состояния для несжимаемых тел, согласно работе [5], можно записать в виде

$$\left(\sigma_j^\beta \right)_i = \left(a_{\beta\alpha} \right)_i g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \left(u_\alpha \right)_i + \left(p \right)_i g_j^\beta + \left(1 - g_j^\beta \right) g^{\beta\beta} \left(G_j^\beta \right)_i \left(\nabla_j \left(u^\beta \right)_i + \nabla^\beta \left(u_j \right)_i \right). \quad (22)$$

В (22) отсутствует суммирование по индексам i, β, j и производится по индексу α , величины $\left(a_{\beta\alpha} \right)_i$ и $\left(G_j^\beta \right)_i$ представлены следующим образом:

в упругих областях - $\left(V^e \right)_i$

$$\left(a_{\beta\alpha} \right)_i = 2\mu_i g_{\beta\alpha}, \quad \left(G_j^\beta \right)_i = \mu_i, \quad \mu_i = \left(\mu_1 \right)_i + \left(\mu_2 \right)_i; \quad (23)$$

в пластических областях - $\left(V^p \right)_i$ для упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела

$$\left(a_{\beta\alpha} \right)_i = 2\mu_i g_{\beta\alpha} - a_i \left(f_{\alpha\alpha} \right)_i \left(f_{\beta\beta} \right)_i, \quad \left(G_j^\beta \right)_i = \mu_i. \quad (24)$$

Уравнения (18) – (21) с учетом условий несжимаемости в пластических областях V_i^P ($i=0, 1, 2, \dots, N$) горного массива и крепи представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости горизонтальных, вертикальных и сферических выработок с многослойными крепями, когда имеются границы раздела областей упругого и пластического поведения сжатого скелета при нагружении в горном массиве и крепи.

Поскольку полученная краевая задача является задачей на собственные значения относительно параметра ω , тогда в силу принятого критерия основное состояние будет устойчивым, если

$$Im\omega_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (25)$$

где ω_α ($\alpha=1, 2, \dots$) – собственные значения приведенной краевой задачи.

Условие (25) определяет область устойчивости в пространстве параметров нагружения. Тогда граница области устойчивости и соответствующие критические значения комбинаций параметров нагружения определяются из соотношения

$$\min(Im\omega_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Таким образом, задача сводится к определению отличных от нуля возмущений перемещений и соответствующих собственных значений, а по последним определяются критические комбинации внешних сил для основного состояния равновесия.

Для нахождения собственных значений цилиндрических задач перемещения и гидростатические давления в зонах упругого и пластического деформирования для горного массива и крепи аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_n \sum_m A_i^{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), & v_i &= \sum_n \sum_m B_i^{nm}(r) \sin(m\theta) \cos(nz), \\ w_i &= \sum_n \sum_m C_i^{nm}(r) \cos(m\theta) \sin(nz), & p_i &= \sum_n \sum_m D_i^{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz). \end{aligned} \quad (27)$$

Для сферических задач решения ищем в виде двойных рядов по сферическим функциям

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} A_i^{nm}(r) Y_i^{nm}(\theta, \varphi), & v_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} B_i^{nm}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_i^{nm}(\theta, \varphi), \\ w_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} C_i^{nm}(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_i^{nm}(\theta, \varphi), & p_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} D_i^{nm}(r) Y_i^{nm}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь n, m – параметры волнообразования, $Y_i^{nm}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi)$ – сферические функции, $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода степени n и порядка m ($P_n^m = 0$ для $m > n$). Функции Y_i^{nm} являются решениями уравнения $\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + n(n+1) \right\} Y_i^{nm}(\theta, \varphi) = 0$.

Выбор решений в форме (27) или (28) допускает локальную потерю устойчивости массива и крепи по одинаковой форме.

Подставляя функции u_i, v_i, w_i, p_i в условие несжимаемости и линеаризованные уравнения устойчивости (18), граничные условия (19), условия сопряжения (20) и учитывая (21) или (22) – (24) после ряда преобразований получим краевую задачу, найти точное аналитическое решение которой не представляется возможным. Будем искать приближенное решение методом конечных разностей. В результате получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров $A_i^{nm}, B_i^{nm}, C_i^{nm}, D_i^{nm}$. Отсюда следует, что определение величины критической нагрузки q_N , равномерно распределенной по внутреннему контуру крепи и соответствующей локальной потере устойчивости массива горных пород в окрестности вертикальной, горизонтальной или сферической выработок с многослойными крепями, сводится к разрешимости матричного уравнения. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру

m и образующей n , параметрам материала и конструкции λ_j . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины q_N в зависимости от m, n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: $\det(q_N, m, n, \lambda_j) = 0$.

Необходимо отметить, что анализ такого уравнения затрудняется тем, что элементы определителя для пористой упруго-вязко-пластической среды, будут зависеть не только от приложенных нагрузок q_i , геометрических параметров рассматриваемых задач, физико-механических характеристик материалов, но и от произвольного комплексного числа ω (временного множителя). Поэтому, для упрощения вычислений при численном анализе считалось, что $\omega = \beta$ - действительное число. При этом если $-\infty < \beta < 0$, то будет происходить затухание амплитуд возмущений с течением времени, а случай $0 \leq \beta < \infty$ будет соответствовать неограниченному возрастанию возмущений перемещений и напряжений.

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости основного состояния горного массива вблизи свободной вертикальной цилиндрической выработки радиуса R_0 , реологические свойства которого определяются согласно описанной выше модели. К внутреннему контуру выработки приложена равномерно распределенная нагрузка q_0 , а на бесконечности напряжения в массиве стремятся к величине gh (g - средний объемный вес вышележащих пород, h - глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим.

В отличие от [5, 8 - 10] в рассматриваемой задаче на основе точных трехмерных уравнений [3] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны цилиндрической выработки с учетом пористой структуры материала горного массива.

Процесс деформирования пористого материала горного массива вблизи выработки можно разделить на два взаимосвязанных этапа. Первый - упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй - неупругое деформирование сжатого скелета с упруго-вязко-пластическими свойствами.

Напряженно-деформированное состояние горного массива на первом этапе, то есть, когда выполняется условие (17) в осесимметричном случае в цилиндрической системе координат (r, θ, z) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} u &= C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \varepsilon_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \\ \sigma_r &= 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где u - радиальная составляющая вектора перемещений.

Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из следующих граничных условий

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -q_\infty, \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -q_0 \quad (30)$$

и имеют вид

$$C_1 = \frac{-q_\infty}{2(\lambda_1 + \mu_1)}, \quad C_2 = \frac{q_0 - q_\infty}{2\mu_1} R_0^2. \quad (31)$$

Объемная деформация с учетом (29) и (31), определяется в форме

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 2C_1.$$

Откуда следует, что объемная деформация не зависит от радиуса, то есть, она одинакова во всем теле и поэтому схлопывание пор произойдет одновременно во всей среде при достижении объемной деформацией значения равного начальному удельному объему пор - ε_0 .

Следовательно, полное схлопывание пор при упругом деформировании массива происходит под действием нагрузки определяемой равенством

$$q_\infty = (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0. \quad (32)$$

При этом поля перемещений, деформаций и напряжений находятся по формулам

$$u = -\frac{\varepsilon_0}{2}r - \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r}, \quad \varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r^2},$$

$$\sigma_r = -(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 + (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 \frac{R_0^2}{r^2}. \quad (33)$$

Таким образом, если $gh < (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$, то полного схлопывания пор в горном массиве не происходит и материал ведет себя как сжимаемая упругая среда с параметрами $\lambda_1, \mu_1, \varepsilon_0$. При этом напряженно-деформированное состояние определяется соотношениями (29), (31).

Если $gh = (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$ произойдет схлопывание пор (сжатый скелет) и при дальнейшем сжатии возникнет и будет расти около отверстия зона пластического течения, препятствовать развитию которой будут вязкость (η) и упрочнение (c) материала, то есть сжатый скелет будет деформироваться как несжимаемая упруго-вязко-пластическая среда с параметрами $\mu = \mu_1 + \mu_2, k, c, \eta$.

В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны – упругую и пластическую, в каждой из которых значения перемещений, деформаций и напряжений в точках среды раскладываются на компоненты:

а) пористого сжатия, определяемыми соотношением (33);

б) упруго-пластического сжатия (которые для деформаций в пластической зоне в свою очередь складываются из упругих и пластических компонент), определяемыми из решения упруго-пластической задачи с вычетом из внешней нагрузки той ее части, которая идет на полное схлопывание пор, т. е. величины $(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$. Поэтому граничные условия для этих компонент запишутся в виде

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -(gh - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0), \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -q_0. \quad (34)$$

Напряженно-деформированное состояние сжатого скелета, обладающего упруго-вязко-пластическими свойствами, определяется в виде

- в упругой области ($\gamma < r < \infty$)

$$u = \frac{D}{r} - \frac{\varepsilon_0}{2}r, \quad \varepsilon_r = -\frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2},$$

$$\sigma_r = -2(\mu_1 + \mu_2) \frac{D}{r^2} - \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1 r^2} - gh, \quad \sigma_\theta = 2(\mu_1 + \mu_2) \frac{D}{r^2} + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1 r^2} - gh; \quad (35)$$

- в пластической области ($R_0 < r < \gamma$)

$$\varepsilon_r^p = \frac{\chi}{c + 2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{r^2} - 1 \right) \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right),$$

$$\sigma_r = -q_0 + 4\mu \cdot \int_{R_0}^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho + \left(2\mu D + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1} \right) \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\sigma_\theta = -q_0 + 4\mu \left(\varepsilon_r^p + \int_{R_0}^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho \right) + \left(2\mu D + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1} \right) \left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (36)$$

где $D(t) = -\frac{(\lambda_1 + \mu_1)\mu_2\varepsilon_0}{2\mu\mu_1} R_0^2 + \frac{\eta\chi}{2\mu(c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left(2\gamma\gamma \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta}\gamma^2 \right)$, $\chi = \text{sign}(q_0 - gh)$.

Условия совместности напряжений на границе γ раздела зон упругого и пластического деформирования имеют вид

$$[\sigma_r]|_{r=\gamma} = 0. \quad (37)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на границе γ .

Радиус раздела зон упругого и пластического деформирования с учетом (35)–(37) определим в виде

$$gh - q_0 - \frac{4\mu\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma^2}{R_0^2} \right) + \ln \frac{\gamma}{R_0} \right) + \frac{\eta\chi}{R_0^2(c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left(2\gamma\dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) = 0. \quad (38)$$

Для определения основного напряженно деформированного состояния этой задачи использовались уравнения равновесия (1), условие пластичности (11), соотношения ассоциированного закона пластического течения (14), соотношения, связывающие полные упругие и пластические деформации (12), связь между напряжениями и деформациями в виде (6), (7), (10), граничные условия (30), (34), а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях (37).

Исследование устойчивости основного состояния (35), (36) горного массива со сжатым скелетом вблизи круговой цилиндрической выработки при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения, как отмечалось выше, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях.

Уравнения (18), (22) – (24), где надо опустить у всех величин индекс “ i ”, (19), где надо опустить индекс “ N ”, с учетом условия несжимаемости

$$\nabla^\alpha u_\alpha = 0. \quad (39)$$

в областях V^p и V^e массива представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости основного состояния вертикальной цилиндрической выработки, когда имеется граница областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в массиве горных пород со сжатыми порами. Система уравнений (18), (22) – (24), (39) – система дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитудных значений векторов перемещений u, v, w и гидростатического давления p для пластической и упругой зон массива. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений перемещения и гидростатические давления в каждой из зон упругого и пластического деформирования горного массива аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами (27), где у величин $A^{nm}, B^{nm}, C^{nm}, D^{nm}$ надо опустить индекс “ i ”.

Тогда с учетом (22), (27) и (39), исключая функции $C^{nm}(r)$ и $D^{nm}(r)$, получим следующую систему уравнений в терминах $A^{nm}(r)$ и $B^{nm}(r)$:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \xi_1 A(r) + \xi_2 A'(r) + \xi_3 A''(r) + \xi_4 B(r) + \xi_5 B'(r) + \xi_6 B''(r) + \xi_7 B'''(r) &= 0, \\ \xi_8 A(r) + \xi_9 A'(r) + \xi_{10} A''(r) + \xi_{11} A'''(r) + \xi_{12} B(r) + \xi_{13} B'(r) + \xi_{14} B''(r) &= 0, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= - \left(-\sigma_\theta^0 + m^2 \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) + 2r \sigma_{\theta,r}^0 + \mu \left(n^2 r^2 - 1 \right) \right), \\ \xi_2 &= r \left(a_{11} - a_{22} + a_{12} - a_{21} + 2 \left(a_{23} - a_{13} \right) - \mu + \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 - 2 \sigma_\theta^0 \right), \\ \xi_3 &= r^2 \left(a_{11} - a_{13} + a_{23} - a_{21} - \mu + \sigma_r^0 \right), \\ \xi_4 &= - \left(m \left(\sigma_\theta^0 + \mu \right) - \frac{1}{m} \left(\sigma_\theta^0 + \mu \right) + \frac{r}{m} \sigma_{\theta,r}^0 \left(1 + \frac{1}{m^2} \right) + \frac{n^2 r^2 \mu}{m^3} \right), \\ \xi_5 &= r \left(m \left(a_{12} - a_{13} - a_{22} + a_{23} + \mu - \sigma_\theta^0 \right) - \frac{1}{m} \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) \right) - \frac{r^3}{m} \left(n^2 \mu - \sigma_{r,rr}^0 \right) + \frac{2r^2}{m} \sigma_{r,r}^0, \\ \xi_6 &= \frac{2r^2}{m} \left(\sigma_r^0 + \sigma_{r,r}^0 + \mu \right), \quad \xi_7 = \frac{r^3}{m} \left(\mu + \sigma_r^0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_8 &= nr^2 \left(\mu + a_{32} - a_{33} - a_{22} - 2\sigma_\theta^0 + a_{23} \right) + \frac{m^2 r}{n} \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) - \frac{r}{n} \left(\mu + \sigma_r^0 - \sigma_{r,r}^0 \right), \\
\xi_9 &= nr^3 \left(\mu + a_{31} - a_{33} + a_{23} - a_{21} \right) - \frac{m^2 r}{n} \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) - \frac{r}{n} \left(\mu + \sigma_r^0 - \sigma_{r,r}^0 \right), \\
\xi_{10} &= \frac{r^2}{n} \left(2\mu + 2\sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 \right), \quad \xi_{11} = \frac{r^3}{n} \left(\mu + \sigma_r^0 \right), \\
\xi_{12} &= r^2 \left(nm \left(a_{32} - a_{33} - a_{22} + a_{23} + 2\mu \right) - \frac{n^3 r^2 \mu}{m} - \frac{1}{m} \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) \right) - \frac{m^3}{n} \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) + \\
&\quad + \frac{m}{n} \left(\mu + \sigma_r^0 - r\sigma_{r,r}^0 \right), \\
\xi_{13} &= \frac{rm}{n} \left(r\sigma_{r,r}^0 - \mu - \sigma_r^0 \right) - \frac{r^3 n}{m} \left(\mu + \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 \right), \quad \xi_{14} = \left(\mu + \sigma_r^0 \right) \left(\frac{mr^2}{n} + \frac{r^4 n}{m} \right);
\end{aligned}$$

граничные условия при $r = R_0$

$$\begin{aligned}
&A(r) \frac{1}{r} \left(a_{12} - a_{13} - a_{22} + a_{23} - 2\sigma_\theta^0 \right) + A'(r) \left(a_{11} + \sigma_r^0 - a_{13} - a_{21} + a_{23} \right) + \\
&+ B(r) \left(\frac{1}{r} \left(m \left(a_{12} - a_{13} \right) - \frac{1}{m} \left(\mu + \sigma_\theta^0 + m^2 \left(a_{22} + \sigma_\theta^0 - a_{23} - \mu \right) \right) \right) - \frac{n^2 r \mu}{m} \right) + \\
&+ B'(r) \frac{1}{m} \left(\sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 + \mu \right) + B''(r) \frac{r}{m} \left(\mu + \sigma_r^0 \right) = 0, \\
&-m\mu A(r) - \mu B(r) + rB'(r) \left(\mu + \sigma_r^0 \right) = 0, \tag{41}
\end{aligned}$$

$$A(r) \left(n\mu - \frac{\mu + \sigma_r^0}{nr^2} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{r} A'(r) - \frac{m}{r^2} B(r) + \frac{m}{r} B'(r) + A''(r) \right) \left(\mu + \sigma_r^0 \right) = 0.$$

В (40), (41) и далее, для упрощения записи индексы “ nm ” у величин A и B не пишутся, коэффициенты a_{ij} и G_{ij} для пластической и упругой областей определяются соответственно по формулам (24) и (23).

В горном массиве в пластической области $-V^p$ докритическое состояние определяется по формулам (36), а в упругой области V^e - по формулам (35). Отметим, что если устойчивость основного состояния исследовать по предельной [5] системе уравнений, то в соотношениях (35), (36) следует $t \rightarrow \infty$.

Аналогичным образом могут быть выписаны в терминах функций $A(r)$, $B(r)$ условия непрерывности (20) на поверхности, разделяющей зоны упругого и пластического деформирования,

Из условия локальности возмущений $u_j \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ ($j=1, 2, 3$) с учетом (27) получим

$$(A')^e = 0, \quad (B')^e = 0 \quad (C')^e = 0. \tag{42}$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (40) - (42) с учетом (20) не представляется возможным. Как отмечалось выше, приближенное решение ищется методом конечных разностей и как следствие этого определение величины критической нагрузки q_0 , соответствующей локальной потере устойчивости массива горных пород со схлопнутыми порами около круговой цилиндрической выработки, сводится к разрешимости матричного уравнения. При вычислении определителя наряду с нахождением основного напряженно-деформированного состояния для каждой области V^p , V^e массива (36), (35) необходимо учитывать уравнение (38), определяющие положение упругопластической границы γ - в горном массиве.

Результаты численного счета представлены рисунками 2, 3, на которых показаны зависимости величины критического давления, равномерно распределенного по контуру выработки, от величины гидростатического давления gh при различных значениях физико-механических параметров конструкции. При этом $R_0 = 0.4$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.6$, $c = 0.3$, $\lambda_1 = 0.1$, $\eta = 0.01$ им соответствуют значения параметров волнообразования $n = m = 2$. На рис.2 кривые 1, 2, 3 соответствуют $\varepsilon_0 \cdot 10^{-3} = 0.2, 0.5, 0.7$. При этом $\lambda_1 = 0.1$. На рис.3 кривые 1, 2, 3 соответствуют $\lambda_1 = 0.1, 0.2, 0.3$. При этом $\varepsilon_0 \cdot 10^{-3} = 0.1$.

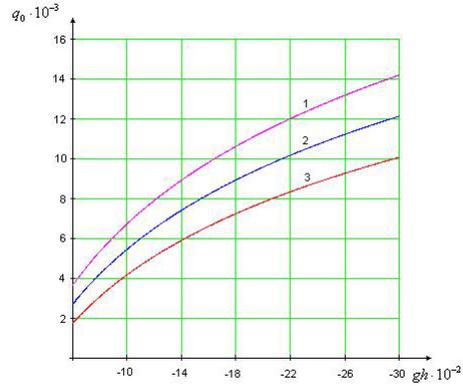


Рис. 2.

Анализ численного эксперимента показал, что при увеличении глубины заложения выработки величина критического давления на контуре выработки увеличивается (рис.2, рис.3); с ростом коэффициента Ламе λ_1 , область устойчивости расширяется (рис.3). Критическая нагрузка на контуре выработки при увеличении величины начального удельного объема пор уменьшается (рис.2).

Если в соотношениях (35), (36) положить $\varepsilon_0 = 0$, то придем к результатам работы [5] для случая упруго-вязко-пластической среды без учета начальной пористости материала.

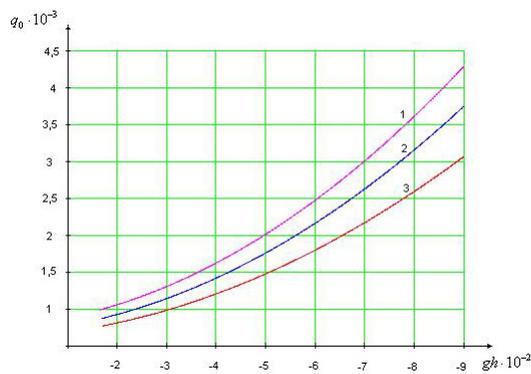


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ершов, Л. В.* О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л. В. Ершов // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 298–300.
- [2] *Алимжанов, М. Т.* Проблемы устойчивости равновесия в задачах геомеханики / М. Т. Алимжанов // Успехи механики. – 1990. – 13, № 3. – С. 21–57.
- [3] *Гузь, А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь. – Киев : Наук. думка, 1977. – 204 с.
- [4] *Садовская, О. В.* Модели реологически сложных сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Садовская, В. М. Садовский // Математические модели и методы механики сплошных сред : сб. науч. тр. : к 60-летию А. А. Буренина. – Владивосток, 2007. – С. 224–238.
- [5] *Спорыхин, А. Н.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 232 с.
- [6] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред. Т. 1 / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 445 с.
- [7] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [8] *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // СО РАН. ПМТФ. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 141–150.
- [9] *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок эллиптической формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Известия РАН. МТТ. – 2007. – № 2. – С. 183–192.
- [10] *Гоцев, Д. В.* Моделирование процесса деформирования горных выработок с некруговыми многослойными креплениями в массивах со сложными реологическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин, А. Н. Стасюк // Вестник Чувашского педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2007. – № 2. – С. 78–89.

D. V. Gotsev, A. N. Sporyhin

**STABILITY OF MOUNTAIN DEVELOPMENTS IN POROUS FILES WITH
DIFFICULT**

Military Aviation Engineering University

Voronezh State University

Abstract. Within the limits of the general three-dimensional linearized theories of stability of small deformations the general approach of the decision of problems of stability of cylindrical and spherical mountain developments on the basis of the offered model of the continuous environment considering porous structure of a material and difficult properties of the compressed skeleton is developed.

Keywords: porous environments with difficult properties of the compressed skeleton, the is intense-deformed condition, the exact three-dimensional equations, stability of mountain developments.

Гоцев Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Военного авиационного инженерного университета, г. Воронеж

e-mail: rbgotsev@mail.ru

Спыхин Анатолий Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой ТиПМ Воронежского государственного университета, г. Воронеж

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Gotsev Dmitry Viktorovich

Ph. D., Assoc. Professor, Department of Mathematics, Military Aviation Engineering University, Voronezh

Sporyhin Anatoliy Nikolaevich

Dc. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of TiPM Voronezh State University, Voronezh