

E. П. Дац, А. В. Ткачева, Р. В. Шпорт

## СБОРКА КОНСТРУКЦИИ "КОЛЬЦО В КОЛЬЦЕ" СПОСОБОМ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКИ

*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН*

**Аннотация.** В рамках теории температурных напряжений приводится решение последовательности одномерных краевых задач о сборке конструкции, состоящей из двух тонких колец, контактирующих по общей цилиндрической границе и изготовленных из одинакового упругопластического материала. Устанавливаются моменты и места зарождения и исчезновения пластических течений, закономерности продвижения упругопластических границ. Рассчитывается итоговый уровень остаточных напряжений, обеспечивающий натяг в сборке.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, температурные напряжения, остаточные деформации.

УДК: 539.374+ 539.224

**Введение.** Теория температурных напряжений восходит к работам классиков механики деформирования, таких как Р. Хилл, В. Койтер, Ю. Н. Работнов. Одномерную задачу о формировании поля остаточных напряжений в длинной толстостенной трубе за счет нестационарного нагревания боковых поверхностей рассмотрел Д. Бленд [1]. Применительно к задачам посадки подобные задачи рассмотрели Ю. Оркан [2] и А. Ковач [3]. В нашей стране ряд задач термопластичности был рассмотрен Ю. Н. Шевченко [4] и его учениками. Остаточные напряжения [1] оказываются следствием возникновения и остановки пластических течений при росте напряжений в упругопластических материалах из-за повышения уровня в градиенте температуры. При сборке посадкой развивающиеся пластические течения приводят к уменьшению итогового натяга по сравнению с рассчитанным по теории температурных напряжений. Но именно по последним теориям рассчитаны нормативные параметры отечественных технологических методик. Присутствие пластических течений при горячей посадке тесно связано с зависимостью предела текучести от температуры, ведь тело разогревается до температуры, сравнимой с температурой плавления материала сборки.

Рассмотрим здесь задачу о температурных напряжениях в сборке из двух колец малой толщины, изготовленных из одного и того же упругопластического материала. Принимаемое

---

Поступила 11.11.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33064-мол\_а\_вед „Развитие моделей и методов механики необратимого деформирования для описания процессов формоизменения материалов с нелинейными теплофизическими и реологическими свойствами“) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам на выполнение НИР (№ 2014/292).

положение об одинаково малой толщине элементов сборки позволяет считать, что материальный кольцо находится в условиях плоского напряженного состояния. В таком случае задача оказывается одномерной.

**Исходные модельные зависимости.** Деформации в материале сборки  $d_{ij}$  полагаем малыми и складывающимися из упругих (обратимых)  $e_{ij}$  и пластических (необратимых)  $p_{ij}$ :

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1)$$

В зависимости (1) используется прямоугольная система декартовых координат  $x_i$ ,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений, запятая перед индексом означает дифференцирование по данной пространственной координате так, что  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

Напряжения в деформируемом материале задаются уровнем и распределением в нем температуры  $T$  и упругих деформаций в соответствии с законом Дюамеля – Неймана [5]:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - m(T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе,  $m = 3K\alpha$  и  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения,  $K = \lambda + 2/3\mu$  – упругий модуль объемного сжатия,  $T, T_0$  – текущая и начальная температуры. Пластическое течение возможно только в условиях достижения напряженными состояниями в деформируемых телах поверхности нагружения  $f(\sigma_{ij}) = 0$  в пространстве напряжений. В принимаемых условиях принципа максимума Мизеса данная поверхность оказывается пластическим потенциалом и следует ассоциированный закон пластического течения

$$dp_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, d\lambda > 0. \quad (3)$$

В качестве конкретной поверхности нагружения будем использовать условие пластиичности Треска [6]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k. \quad (4)$$

В (4)  $\sigma_i$  – главные значения тензора напряжения,  $k(r, t)$  – предел текучести, в общем случае зависящий от температуры. В качестве закона изменения предела текучести на основе экспериментальных данных выбрана квадратичная зависимость:

$$k(r, t) = k_1 \left( 1 - (T_p - T_1)^{-2} (T_p - T(r, t))^2 \right), \quad (5)$$

где  $k_1$  – предел текучести при температуре  $T_1$ ,  $T_p$  – температура плавления материала.

**Постановка задачи. Обратимое деформирование.** В начальный момент времени  $t = 0$  внутреннее кольцо, имеющее внутренний радиус  $R_0$  и внешней  $R_1$ , находится при комнатной температуре  $T_1$ . Внешнее кольцо, разогретое до температуры  $T_2$ , имеет внутренний радиус  $R_1$  и внешний  $R_2$ . Начальные перемещения отсутствуют. Уравнение равновесия, условие совместности деформации и соотношения между компонентами деформаций и перемещений колец в условиях цилиндрической симметрии примут вид:

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad (6)$$

$$d_{\varphi\varphi,r} + r^{-1}(d_{\varphi\varphi} - d_{rr}) = 0, \quad (7)$$

$$d_{rr} = u_{rr,r} \quad d_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_{rr}. \quad (8)$$

Воспользовавшись зависимостью (2) для плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{zz}) - m\Delta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda(e_{rr} + e_{zz}) - m\Delta \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - m\Delta = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

получим уравнение для определения радиальной компоненты напряжений в начальный момент времени

$$(r\sigma_{rr,r})_{,r} + 2\sigma_{rr,r} = 0,$$

решая которое, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_1 - r^{-2}c_2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_1 + r^{-2}c_2.\end{aligned}\quad (10)$$

Поскольку до момента посадки кольца не испытывают внешнего воздействия, из (10) следует  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ , т.е. начальные напряжения колец при любой постоянной начальной температуре отсутствуют. Из (3)–(4) с учетом зависимостей (5) можно определить внутренний радиус горячего кольца перед нагревом:

$$\begin{aligned}\rho &= R_1 (1 - ms^{-1}(T_2 - T_1)), \\ s &= (3\lambda + 2\mu).\end{aligned}\quad (11)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния колец после момента посадки необходимо рассчитать поле температур, возникающее при теплообмене. Процесс распространения тепла в материале колец описывается известным уравнением теплопроводности [7]

$$T_{,t}^{(v)} = a(rT_{,r}^{(v)})_{,r}. \quad (12)$$

Индекс  $v$  обозначает номер кольца (1 – внутреннее, 2 – внешнее). Пренебрегая теплоотдачей с поверхностей и используя условия теплообмена между кольцами, найдем распределение температурного поля, применив любой из известных численных методов. Граничные условия для численного решения уравнения (12) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}T_{,r}^{(1)}(R_0, t) &= 0, \quad T_{,r}^{(2)}(R_2, t) = 0, \\ T_{,r}^{(1)}(R_1, t) &= T_{,r}^{(2)}(R_1, t), \\ T^{(1)}(R_1, t) &= T^{(2)}(R_1, t).\end{aligned}\quad (13)$$

Записав соотношения между компонентами напряжений и перемещений согласно зависимостям (8) и (9) в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(v)} &= 4\mu gw^{-1}u_{r,r}^{(v)} + 2\mu\lambda(wr)^{-1}u_r^{(v)} - 2\mu mw^{-1}\Delta_v \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} &= 4\mu gw^{-1}u_r^{(v)} + 2\mu\lambda(wr)^{-1}u_{r,r}^{(v)} - 2\mu mw^{-1}\Delta_v \\ g &= (\lambda + \mu) \quad w = (\lambda + 2\mu) \\ \Delta_v &= T^{(v)} - T_v\end{aligned}\quad (14)$$

и подставив (14) в (6), получим дифференциальное уравнение для определения единственной отличной от нуля компоненты перемещений

$$u_{r,rr}^{(v)} + (r^{-1}u_r^{(v)})_{,r} = 2g^{-1}m\Delta_v, \quad (15)$$

решением которого является функция:

$$\begin{aligned}u_r^{(v)}(r, t) &= 2g^{-1}rF_v(r_v, r, t) + rc_1^{(v)}(t) + r^{-1}c_2^{(v)}(t) \\ F_v(r_v, r, t) &= mr^{-2}\int_{r_v}^r \Delta_v(\rho, t)d\rho \\ r_v &= R_{v-1},\end{aligned}\quad (16)$$

тогда зависимости для напряжений согласно (14) и (15) примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(v)}(r, t) &= -\mu \left( g^{-1} F_v(r_v, r, t) - 2sw^{-1} c_1^{(v)}(t) + 2r^{-2} c_2^{(v)}(t) \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}(r, t) &= \mu \left( g^{-1} F_v(r_v, r, t) - mg^{-1} \Delta_v(r, t) + 2sw^{-1} c_1^{(v)}(t) + 2r^{-2} c_2^{(v)}(t) \right).\end{aligned}\quad (17)$$

Границные условия на свободных краях колец

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R_0, t) = 0, \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) = 0 \quad (18)$$

и условия непрерывности напряжений и перемещений в зоне контакта

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(R_1, t), u_r^{(1)}(R_1, t) = u_r^{(2)}(R_1, t) \quad (19)$$

позволят определить из (18)–(19) неизвестные константы интегрирования (функции времени), которые здесь и далее не приводятся из-за громоздкости их выражений.

**Пластическое течение.** Дальнейшее изменение напряженно-деформированного состояния колец связано с их выходом на поверхность нагружения (4). Развитие зоны пластического течения начинается в некоторый момент времени  $t_1$  на границе контакта внешнего кольца и определяется условием:

$$\sigma_{rr}^{(v)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} = -2k_2. \quad (20)$$

При  $t_1 > 0$  во внешнем кольце появляется область необратимого деформирования с упруго-пластической границей  $a_2$ . Соотношения для напряжений в области  $R_1 \leq r < a_2(t)$  после интегрирования уравнения равновесия (6) с учетом условия (20) примут вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(r, t) &= 2 \int_{r_2}^r \rho^{-1} k_2(\rho, t) d\rho + c_3^{(2)}(t), \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t) &= 2 \int_{r_2}^r \rho^{-1} k_2(\rho, t) d\rho + 2k_2(r, t) + c_3^{(2)}(t).\end{aligned}\quad (21)$$

Символом "тильда" над компонентами напряжений и перемещений в дальнейшем обозначены выражения для напряжений и перемещений, справедливые в области пластического течения. Для определения поля перемещений в области пластического течения внешней пластиинки воспользуемся ассоциированным законом течения (3), согласно которому в случае, когда поверхность  $f$  определяется равенством (20), будут иметь место следующие соотношения:

$$\frac{dp_{rr}^{(2)}}{dp_{zz}} + \frac{dp_{\varphi\varphi}^{(2)}}{dp_{zz}} = 0, \quad (22)$$

Следствием (22) является уравнение

$$u_{r,r}^{(2)} + r^{-1} u_r^{(2)} = e_{rr}^{(2)} + e_{\varphi\varphi}^{(2)}. \quad (23)$$

Выразив упругие деформации  $e_{ij}$  через напряжения (21) согласно соотношениям (9):

$$\begin{aligned}e_{rr}^{(v)} &= (\mu s)^{-1} (\mu m \Delta_v + g \sigma_{rr}^{(v)} - 0.5 \lambda \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}), \\ e_{\varphi\varphi}^{(v)} &= (\mu s)^{-1} (\mu m \Delta_v + g \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} - 0.5 \lambda \sigma_{rr}^{(v)}), \\ e_{zz}^{(v)} &= w^{-1} (m \Delta_2(r, t) - \lambda (e_{rr}^{(v)} + e_{\varphi\varphi}^{(v)}))\end{aligned}\quad (24)$$

и подставив их в (23), запишем уравнение для определения радиальной компоненты перемещений в области пластического течения  $R_1 \leq r < a_2(t)$ :

$$(r \tilde{u}_r^{(2)})_{,r} - 2ms^{-1} r \Delta_2 - 0.5(\mu s)^{-1} wr(\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}) = 0. \quad (25)$$

Интегрируя последнее, получим:

$$\tilde{u}_r^{(2)}(r, t) = 2s^{-1} r F_2(R_1, r, t) + 0.5(\mu s)^{-1} wr \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(r, t) + r^{-1} c_4^{(2)}(t). \quad (26)$$

Величину пластической деформации  $p_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t)$  найдем как разность полной и упругой деформации ( $r^{-1}\tilde{u}_{rr}^{(2)} - \tilde{e}_{\varphi\varphi}(r, t)$ ):

$$p_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t) = -p_{rr}^{(2)}(r, t) = s^{-1}(2F_2(R_1, r, t) - 2\mu^{-1}gk_2(r, t) - m\Delta_2(r, t) + sr^{-2}c_4^{(2)}(t)). \quad (27)$$

Соотношения для напряжений и перемещений в областях обратимого деформирования в каждом из колец (16), (17) (при  $r_2 = a_2$ ) по-прежнему справедливы с точностью до новых констант интегрирования, которые вместе с константами в области пластического течения внешнего кольца (21), (26) требуют определения. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений, являющихся краевыми условиями (18)–(19) и условиями непрерывности радиальных напряжений и перемещений на упругопластической границе  $a_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}(R_0, t) &= 0 & \sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) &= \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(R_1, t) & \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(a_2, t) &= \sigma_{rr}^{(2)}(a_2, t), \\ \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) &= 0 & u_r^{(1)}(R_1, t) &= \tilde{u}_r^{(2)}(R_1, t) & \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) &= \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t). \end{aligned} \quad (28)$$

Значение  $a_2$  найдем из условия непрерывности на ней окружных напряжений ( $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(a_2, t) = \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(a_2, t)$ ):

$$\mu mg^{-1}\Delta_2(a_2, t) - 4\mu a_2^{-2}c_2^{(2)}(t) + 2k_2(a_2, t) = 0. \quad (29)$$

Численно решая уравнение (29) для различных моментов времени, определим закон движения упругопластической границы  $a_2(t)$  во внешнем кольце.

По мере выравнивания уровня температур колец на внутреннем радиусе внутреннего кольца в некоторый момент времени  $t_2$  выполняется условие:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -2k_1, \quad (30)$$

которое означает начало процесса пластического течения во внутреннем кольце. Таким образом, при  $t > t_2$  в окрестности внутреннего радиуса каждого кольца имеются области необратимого ( $R_{v-1} < r < a_v(t)$ ) и обратимого ( $a_v(t) < r < R_v$ ) деформирования. Напряжения в области пластического течения найдем, проинтегрировав уравнение равновесия (6) с учетом условия (30):

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, t) &= -2k_1(r, t), \\ \sigma_{rr}^{(1)}(r, t) &= -2r^{-1} \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) d\rho + r^{-1}c_3^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Из ассоциированного закона течения (3) для поверхности (30) можно получить следующие соотношения для приращений пластической деформации:

$$\begin{aligned} dp_{zz}^{(1)} + dp_{\varphi\varphi}^{(1)} &= 0, \\ dp_{rr}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

следствием которых является равенство

$$du_{r,r}^{(1)} = e_{rr}^{(1)}. \quad (33)$$

Подставив в (33) деформацию  $e_{rr}^{(1)}$  из (24) при условии, что напряжения теперь определяются по формулам (30), найдем уравнение для определения радиальной компоненты перемещений:

$$\tilde{u}_{r,r}^{(1)} = (\mu s)^{-1} \left( \mu m\Delta_1 - 2gr^{-1} \int_{R_0}^r k_1 dr + gr^{-1}c_{13} + \lambda k_1 \right), \quad (34)$$

интегрируя которое, получим:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}(r, t) = & (\mu s)^{-1} \left( \mu \int_{R_0}^r \Delta_1(\rho, t) d\rho + (\lambda - 2g \ln(r)) \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) d\rho + \right. \\ & \left. + 2g \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) \ln(\rho) d\rho + g \ln(r) c_3^{(1)}(t) \right) + c_4^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (35)$$

По найденным напряжениям (31) и перемещениям (35) найдем пластическую деформацию  $p_{\varphi\varphi}^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} p_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, t) = & r^{-1} u_r^{(1)}(r, t) - e_{rr}^{(1)}(r, t) = r^{-1} c_4^{(1)}(t) - ms^{-1} \Delta_1(r, t) + \\ & + 2g(rms)^{-1} \left( \int_{R_0}^r \ln(\rho) k_1(\rho, t) d\rho + 0.5g^{-1} m \mu \int_{R_0}^r \Delta_1(\rho) d\rho + 2grk_1(r, t) + \right. \\ & \left. + 0.5(\ln(r) + g^{-1}\lambda) c_3^{(1)}(t) - \ln(r) \int_{R_0}^r k_1(\rho) d\rho \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Соотношения, определяющие напряженно-деформированное состояние для остальных областей остаются справедливыми, если заменить пределы интегрирования  $r_1 = a_1$ ,  $r_2 = a_2$  и заново определить константы  $c_i^{(v)}(t)$ , которые, как и прежде, находятся из условий непрерывности напряжений и перемещений на упругопластических границах  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , в зоне контакта (19) и краевых условий (18):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(R_0, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(R_1, t), \quad \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(a_2, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a_2, t) \\ \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(a_1, t) = \sigma_{rr}^{(1)}(a_1, t), \quad \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) = 0, \quad u_r^{(1)}(R_1, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(R_1, t) \\ \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t), \quad \tilde{u}_r^{(1)}(a_1, t) = \tilde{u}_r^{(1)}(a_1, t). \end{aligned} \quad (37)$$

Для определения положения упруго-пластических границ следует решить систему уравнений непрерывности напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}$ , добавив к (29) условие ( $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(a_1, t) = -2k_1(a_1, t)$ ):

$$2w^{-1} \mu s c_1^{(1)}(t) + 2\mu a_1^{-2} c_2^{(1)}(t) - g^{-1} \mu t \Delta_1(a_1, t) + 2k_1(a_1, t) = 0. \quad (38)$$

Области необратимого деформирования и пластические деформации продолжат рост до момента времени  $t_3$ , при котором температура в обоих кольцах станет одинаковой:

$$T^{(v)}(r, t) = T_k. \quad (39)$$

**Остыивание.** Пусть, начиная с некоторого момента времени  $t_k$ , происходит процесс остывания колец. Уровень  $T_k$  уменьшается до значения комнатной температуры  $T_1'$ . Так как материал колец предполагается одинаковым, равномерное уменьшение температурного поля не приведет к изменению поля температурных напряжений, однако, за счет увеличения предела текучести, условия пластичности (20), (30) перестанут выполняться, т.е. произойдет разгрузка материала в областях с накопленными необратимыми деформациями. Необратимые деформации  $\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(v)}$  рассчитываются по формулам (27), (36) при подстановке в них максимального значения  $T_k$ . Символ  $\hat{\cdot}$  обозначает область с накопленными деформациями. Для расчета уровня напряжений в области  $R_0 < r < a_1$  во внутреннем кольце воспользуемся условием совместности (7), которое, учитывая разложение деформаций  $\hat{d}_{rr}^{(1)} = \hat{e}_{rr}^{(1)}, \hat{d}_{\varphi\varphi}^{(1)} = \hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} + \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}$ , представим в виде:

$$\hat{e}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1}(\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} - \hat{e}_{rr}^{(1)}) = -(\hat{p}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}). \quad (40)$$

Воспользовавшись соотношениями (24), (6) из (40) получим дифференциальное уравнение для определения радиальной компоненты напряжений:

$$(r \hat{\sigma}_{rr, r}^{(1)} + \hat{\sigma}_{rr}^{(1)}), r = -\mu g^{-1} s (\hat{p}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}), \quad (41)$$

решая которое найдем  $\hat{\sigma}_{rr}^{(1)}$ :

$$\hat{\sigma}_{rr}^{(1)}(r) = -0.5\mu g^{-1} s \left( r^{-2} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho) \rho d\rho + \int_{R_0}^r \rho^{-1} \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho) d\rho \right) + \hat{c}_5^{(1)} - r^{-2} \hat{c}_6^{(1)}. \quad (42)$$

Используя (42), из уравнения равновесия найдем  $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(1)}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(1)}(r) = & -0.5\mu g^{-1}s \left( 2\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(r) - r^{-2} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho d\rho + \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho^{-1}d\rho \right) + \\ & + \hat{c}_5^{(1)} + r^{-2}\hat{c}_6^{(1)}.\end{aligned}\quad (43)$$

Перемещение в области  $R_0 < r < a_1$  определим через деформацию  $\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)}$  (24) и напряжения (42), (43):

$$\begin{aligned}\hat{u}_r^{(1)}(r, T_k) = & r\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} = (4g)^{-1} \left( sr^{-1} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho d\rho - wr \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho^{-1}d\rho \right) + \\ & + 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu m r(T_k - T_1) + wr\hat{c}_5^{(1)} + sr^{-1}\hat{c}_6^{(1)}).\end{aligned}\quad (44)$$

Условие совместности для области с необратимыми деформациями  $R_1 < r < a_2$  внешнего кольца примет вид:

$$\hat{e}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + r^{-1}(\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(2)} - \hat{e}_{rr}^{(2)}) = -(\hat{p}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + 2r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}). \quad (45)$$

Из (45) следует уравнение для определения напряжения  $\hat{\sigma}_{rr}^{(2)}$ :

$$(r\hat{\sigma}_{rr,r}^{(2)} + \hat{\sigma}_{rr}^{(2)}),_r = -\mu g^{-1}s(\hat{p}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + 2r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}), \quad (46)$$

Проинтегрировав которое, получим:

$$\hat{\sigma}_{rr}^{(2)}(r) = -\mu g^{-1}s \int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + \hat{c}_5^{(2)} - r^{-2}\hat{c}_6^{(2)}. \quad (47)$$

Напряжение  $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}$  и перемещение  $\hat{u}_r^{(2)}$  найдем по аналогии с расчетами для внутреннего кольца:

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r) = -\mu g^{-1}s \left( \int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r) \right) + \hat{c}_5^{(2)} - r^{-2}\hat{c}_6^{(2)} \quad (48)$$

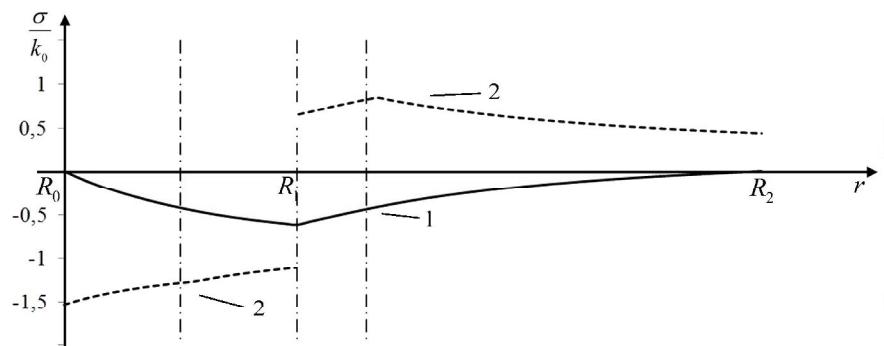
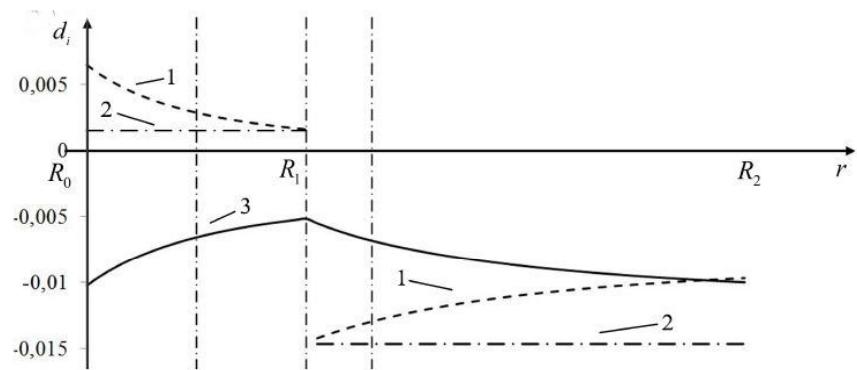
$$\begin{aligned}\hat{u}_r^{(2)}(r, T_k) = & -0.5g^{-1}wr \int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu m r(T_k - T_2) + \\ & + wr\hat{c}_5^{(2)} + sr^{-1}\hat{c}_6^{(2)}).\end{aligned}\quad (49)$$

Напряжения и перемещения в областях  $a_v < r < R_v$  в условиях отсутствия температурного градиента ( $\Delta_{,r}(r, T_k) = 0$ ) примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(v)}(r) &= c_1^{(v)} - r^{-2}c_2^{(v)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}(r) &= c_1^{(v)} + r^{-2}c_2^{(v)} \\ u_r^{(v)}(r, T_k) &= 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu m r(T_k - T_v) + wr c_1^{(v)} + sr^{-1}c_2^{(v)}).\end{aligned}\quad (50)$$

Новые константы интегрирования можно найти из системы (37), заменив соответствующие величины для каждой области новыми соотношениями, вычисленными при остывании. Заметим, что константы не зависят от уровня текущей температуры колец, поэтому поля напряжений при равномерном температурном распределении не изменяются. Перемещения при полном остывании вычисляются, если положить  $T_k = T_1$ .

Остановка пластического течения происходит, когда температура выравнивается по всему кольцу, в это время происходит полная разгрузка. В работе [8], где исследовался локальный нагрев пластины, разгрузка области пластического деформирования происходила также мгновенно. Постепенное торможение пластического течения в упругопластичном материале описано в работах [9], [10], [11].

Рис. 1. Распределение остаточных напряжений: 1 –  $\sigma_r$ , 2 –  $\sigma_\varphi$ Рис. 2. Распределение остаточных деформаций: 1 –  $d_r$ , 2 –  $d_z$ , 3 –  $d_\varphi$

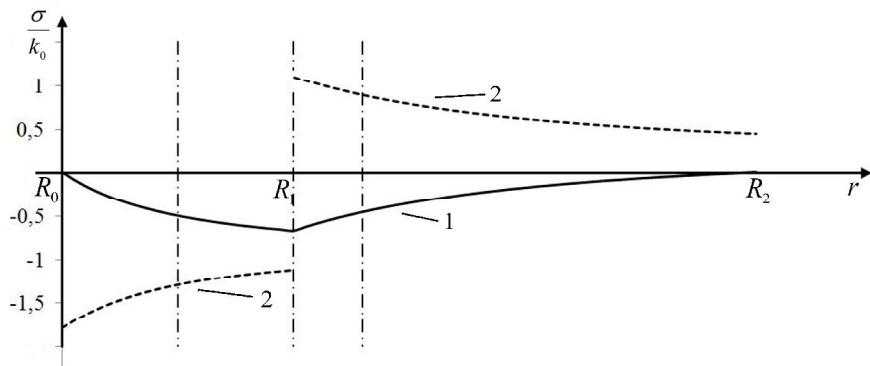


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений, найденных по закону Дюамеля - Неймана:  
1 –  $\sigma_r$ , 2 –  $\sigma_\varphi$

Распределения напряжений и необратимой деформации  $p_\varphi$  приведены на рис. 1–3. Напряжения  $\sigma_\varphi$  (рис. 1) в области необратимого деформирования ниже, чем напряжения  $\sigma_\varphi$ , рассчитанные по соотношениям (16), выведенным для упругого деформирования. Следовательно, учет зарождения и развития пластического течения уменьшает уровень остаточных напряжений, при этом практически не влияет на радиальные напряжения. Самые же необратимые деформации достигают наибольшего значения в области зарождения пластического течения и уменьшаются по мере продвижения упругопластической границы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bland, D. R. Elastoplastic Thick-Walled Tubes of Work-Hardening Material Subject to Internal and External Pressures and to Temperature Gradients / D. R. Bland // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1956. – Vol. 4. – P. 209–229.
- [2] Orcan, Y. Elastic–Plastic deformation of centrally heated cylinder / Y. Orcan, U. Gumer // Acta Mechanica. – 1991. – Vol. 90. – Issue 1–4. – P. 61–80.
- [3] Kovacs, A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits / A. Kovacs // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. – 1996. – Vol. 40. – № 2. – P. 103–112.
- [4] Шевченко, Ю. Н. Термопластичность при переменных нагрузлениях / Ю. Н. Шевченко. – Киев : Наукова думка, 1970.
- [5] Боли, Б. Теория температурных напряжений // Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964.
- [6] Быковцев, Г. И. Теория пластичности // Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998.
- [7] Лыков, А. В. Теория теплопроводности // А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967.
- [8] Буренин, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. П. Мурашкин // Механика твердого тела. – 2014. – № 2. – С. 124–131.
- [9] Ковтаник, Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтаник // ДАН. – 2005. – Т. 400. – № 6. – С. 764–767.
- [10] Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последействие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтаник. – Владивосток : Дальнаука, 2013.
- [11] Буренин, А. А. Развитие и торможение течения упруговязкопластической среды в цилиндрической трубе / А. А. Буренин, Л. В. Ковтаник // ПММ. – 2013. – Т. 77. – № 5. – С. 788–798.

*Дац Евгений Павлович,  
ассистент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток  
e-mail: dats@mail.dvo.ru*

*Ткачева Анастасия Валерьевна,  
младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск - на - Амуре  
e-mail: 4nansi4@mail.ru*

*Шпорт Роман Вячеславович,  
кандидат технических наук, соискатель, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,  
г. Комсомольск - на - Амуре  
e-mail: mail@imim.ru*

E. P. Dats, A. V. Tkacheva, R. V. Shport

**THE ASSEMBLAGE OF "RING IN RING" CONSTRUCTIONS WITH SHRINK FIT METHOD**

*Vladivostok State University of Economics and Service*

*Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS*

**Abstract.** Within the framework of thermal stresses the solution is given on sequence of one-dimensional boundary problems on fold construction of two thin rings consisting of the same elastic-plastic material and contacting though shared cylindrical bound. The moments and locations of the formation or disappearance of plastic flows and also mechanisms of progression elastic-plastic bounds are determining. The final level of residual stresses, which provide final tightness, is estimated.

**Keywords:** elasticity, plasticity, shrink fit, thermal stresses, residual deformation, residual stresses

**REFERENCES**

- [1] *Bland, D. R. Elastoplastic Thick-Walled Tubes of Work-Hardening Material Subject to Internal and External Pressures and to Temperature Gradients / D. R. Bland // Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* – 1956. – Vol. 4. – P. 209–229.
- [2] *Orcan, Y. Elastic–Plastic deformation of centrally heated cylinder / Y. Orcan, U. Gamer // Acta Mechanica.* – 1991. – Vol. 90. – Issue 1–4. – P. 61–80.
- [3] *Kovacs, A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits / A. Kovacs // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* – 1996. – Vol. 40. – №. 2. – P. 103–112.
- [4] *Shevchenko, Yu. N. Thermoplasticity under Variable Loads / Yu. N. Shevchenko.* – Kiev : Naukova Dumka, 1970.
- [5] *Boly, B. Theory of Thermal Stresses / B. Boly, J. H. Weiner.* – M. : Mir, 1964.
- [6] *Bykovtsev, G. I. Theory of Plasticity / G. I. Bykovtsev.* – Vladivostok : Dalnauka, 1998.
- [7] *Lykov, A. V. The theory of heat conduction / A. V. Lykov.* – M. : Higher School, 1967.
- [8] *Burenin, A. A. Formation of residual strain field in a local thermal effects / A. A. Burenin, E. P. Dats, E. V. Murashkin // Mechanics of Solids.* – 2014. – № 2. – P. 124–131.
- [9] *Kovtanyuk, L. V. About bursting elastic viscous plastic material through a rigid circular cylindrical matrix / L. V. Kovtanyuk // DAN.* 2005. – Vol 400. – № 6. – S. 764–767.
- [10] *Burenin, A. A. Large irreversible deformation and springback / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk.* – Vladivostok : Dal'nauka, 2013.
- [11] *Burenin, A. A. Development and braking currents elastoviscoplastic environment in a cylindrical tube / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk // J. Appl.* – 2013. – Vol. 77. – № 5. – P. 788–798.

Dats, Evgeniy Pavlovich

Assistant, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok

Tkacheva, Anastasia Valerevna

Research Assistant, Institute of Machine Science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur

Shport, Roman Vyacheslavovich

Applicant, Candidate of Engineering Sciences, Institute of Machine Science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur