Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 131–137

А. Н. Гузь

О ПОСТРОЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ
(Национальной Академии наук Украины)

Аннотация. Рассматривается анализ построения основных соотношений нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемого твердого тела в лагранжевых координатах. Основное внимание уделено выводу указанных соотношений из теории конечных деформаций посредством введения соответствующих упрощений. Обычно указанные упрощения вводятся до выполнения дифференциальных операций, в настоящей же статье анализируется также случай введения упрощений после дифференцирования.

Ключевые слова: нелинейная теория, конечные деформации, малые деформации, введение упрощений.

УДК: 539.3

Введение. При подготовке обобщающей обзорной статьи [8] по трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел выяснилось, что отсутствует четкий и последовательный анализ построения нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемых тел. Указанный анализ был представлен в статье [9], которая опубликована в традиционном для автора статьи журнале. Представляя отмеченный анализ построения нелинейной теории малых деформаций в книгу "Проблемы нелинейной механики и неупругого деформирования твердых тел посвященную 80-летию профессора, д.ф.-м.н. Д. Д. Ивлева, автор надеется познакомить специалистов по нелинейной механике с изложенными результатами.

Общеизвестно, что в механике деформируемых тел применительно к описанию процесса деформирования рассматриваются две качественно различные теории: первая, так называемая теория конечных деформаций, в которой *учитывается* изменение геометрических объектов в процессе деформирования; вторая, так называемая теория малых деформаций, в которой *не учитывается* изменение геометрических объектов (удлинения, сдвиги, элементы площадей и объемов) в процессе деформирования. По замыслу, теория конечных деформаций предназначена для описания деформирования материалов при значительных деформациях без ограничения на их величину, и теория малых деформаций предназначена для описания сравнительно жестких материалов. В связи с этим, в теории конечных деформаций при описании напряжений возникает необходимость введения различных тензоров напряжений, связанных с отнесением напряжений к площадям элементарных площадок в различные моменты процесса деформирования. Безусловно, теория конечных деформаций является более общей и строгой по сравнению с теорией малых деформаций; следовательно, теория малых деформаций должна следовать из теории конечных деформаций в результате логически непротиворечивых упрощений.

Поступила 07.05.2010

Учитывая вышеизложенное, можно считать, что при построении теориия малых деформаций существует два подхода, которым и следуют авторы всех публикаций по нелинейной механике деформируемых тел. *Первый подход* заключается в получении всех соотношений теории малых деформаций путем введения соответствующих логически непротиворечивых упрощений в соответствующие соотношения теории конечных деформаций. *Второй подход* заключается в непосредственном получении всех соотношений теории малых деформаций, исходя из соображений физического или геометрического характера о том, что в теории малых деформаций не учитывается изменение геометрических объектов. Безусловно, первый подход является более строгим и точным по сравнению со вторым подходом и может служить основой для проверки достоверности результатов второго подхода; все же в историческом аспекте, по–видимому, учитывая простоту реализации, подавляющее большинство авторов использовали второй подход при построении нелинейной теории малых деформаций.

Таким образом, с учетом вышеизложенной информации представляется весьма актуальным анализ системы логически непротиворечивых упрощений, которые следует ввести в теорию конечных деформаций для получения всех соотношений общепринятой теории малых деформаций или различных возможных ее обобщений.

1. Нелинейная теория малых деформаций. Общепринятый вариант теории. Прежде всего необходимо отметить, что в настоящей статье будем использовать лагранжевы координаты и лагранжев способ описания движения сплошной среды; при этом будем применять операции тензорного анализа, построенного на метрическом тензоре и базисными векторами в недеформированном состоянии, ориентируясь, в основном, на обозначения [4, 7]. Предвариетльно приведем некоторые соотношения, относящиеся к теории конечных деформаций, поскольку они будут использованы в дальнейшем при рассмотрении упрощений, соответствующих переходу к теории малых деформаций.

Процесс деформирования в окрестности рассматриваемой точки тела можно характеризовать следующими величинами: удлинениями λ_n или относительными удлинениями δ_n, где $\delta_n = \lambda_n - 1$, материальных волокон, проходящих через рассматриваемую точку и направленных вдоль координатных линий; $\tilde{\psi}_{nm}$ – сдвигами или изменениями углов между вышеуказанными материальными волокнами; ψ_n – углами поворота вышеуказанных материальных волокон вокруг ортов, направленных вдоль координатных линий. Таким образом, параметры

$$\delta_n = \lambda_n - 1;\ \tilde{\psi}_{nm};\ \psi_n \tag{1.1}$$

имеют непосредственный геометрический (в общем случае, физический) смысл, поскольку они определяют изменение геометрических объектов, и *полностью* характеризуют деформирование малой окрестности рассматриваемой точки деформируемого тела. Заметим, что процесс деформирования малой окрестности рассматриваемой точки тела можно также *дополнительно* характеризовать и другими "интегральными"(условное название) величинами, к которым можно отнести, например, изменение площадей ориентированных площадок и изменение объема.

$$\frac{dS_n^*}{dS_n};\ \frac{dV^*}{dV}. \tag{1.2}$$

Величины (1.2) имеют, как условно выше названо, "интегральный"характер, поскольку они полностью определяются общеизвестными соотношениями через первые две величины (1.1); все же величины (1.2) имеют непосредственный геометрический (или в общем случае, физический) смысл, поскольку они определяют непосредственно изменение геометрических объектов.

В рассматриваемом случае теории конечных деформаций уравнения движения представляются в виде [1, 4, 7]

$$\nabla_i[(g_n^j + \nabla_n u^j)S^{in}] - \rho\ddot{u}^j + \rho F^j = 0. \tag{1.3}$$

В (1.3) использован тензор напряжений S [1], составляющие которого отнесены к размерам площадок в недеформированном состоянии, причем составляющие тензора S направлены вдоль базисных векторов в деформированном состоянии. Необходимо отметить, что в обозначениях монографий [5, 6] тензору напряжений S соответствует тензор напряжений σ^*, названный в [5, 6] тензором обобщенных напряжений.

В соответствии с общепринятым подходом, теорией малых деформаций называется теория, в которой принято *Основное положение или упрощение – относительные удлинения δ_n и сдвиги $\tilde{\psi}_{nm}$ являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими же по сравнению с единицей можно пренебречь.* С учетом обозначений (1.1) *Основное положение или упрощение* можно записать в виде

$$\delta_n = \lambda_n - 1 << 1; \ \tilde{\psi}_{nm} << 1. \tag{1.4}$$

Из (1.4), как следствие, также получаем, что составляющие тензора деформаций Грина являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими по сравнению с единицей также можно пренебречь

$$\begin{gathered}\varepsilon_{nn} g_{nn}^{-1} << 1 \text{ (по } n \text{ не суммировать)},\\ \varepsilon_{nm}(g_{nn}g_{mm} - g_{nm}^2)^{-\frac{1}{2}} << 1 \text{ (по } n, m \text{ не суммировать)}.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Также как следствие из (1.4) получаем, что в принятом приближении изменение удлинений, площадей и объемов не учитывается

$$\lambda_n \approx 1; \ \frac{dS_n^*}{dS_n} \approx 1; \ \frac{dV^*}{dV} \approx 1. \tag{1.6}$$

Из (1.4)–(1.6) следует, что в рассматриваемом приближении также не учитывается изменение метрического тензора в деформированном состоянии

$$g_{nm}^* \approx g_{nm}; \ g_*^{nm} \approx g^{nm}; \ \ g^* \approx g. \tag{1.7}$$

В принятом приближении с учетом первых двух соотношений (1.6) также для тензоров напряжений получаем следующее соотношение

$$S \approx \sigma, \tag{1.8}$$

где справа помещен обычно принятый симметричный тензор напряжений σ, который применяется практически во всех публикациях в рамках теории малых деформаций. С учетом соотношения (1.8) из (1.3) получаем уравнения движения

$$\nabla_i[(g_n^j + \nabla_n u^j)\sigma^{in}] - \rho\ddot{u}^j + \rho F^j = 0, \tag{1.9}$$

которые являются общепринятыми в нелинейной теории малых деформаций. Аналогичным образом проводятся упрощения для граничных условий в напряжениях.

По–видимому, можно считать, что *впервые* система упрощений (1.4), которую надо ввести в теорию конечных деформаций для перехода к теории малых деформаций, была предложена в 1939 г. в публикациях [10, 11]; так в [11, стр.360] изложены упрощения типа (1.4) и последовательно проведены эти упрощения для перехода к теории малых деформаций применительно к конкретной проблеме. В последующие годы система упрощений типа (1.4) была последовательно изложена в монографиях [5, 6] применительно к общему случаю перехода от теории конечных деформаций к теории малых деформаций; следует отметить, что в списке литературы в монографиях [5, 6] указаны публикации [10, 11], что и было первоначальной информацией для автора настоящей статьи еще в 1969 г. при написании монографии [2] и ознакомлении с историческими аспектами рассматриваемой проблемы. Также в последующие годы система допущений типа (1.4) неоднократно использовалась в публикациях автора, например монографиях [2, 4, 7] и ряд других публикаций.

Следует отметить, что *система упрощений (1.4) основана на предположении о малости величин, которые имеют непосредственный геометрический смысл и определяют изменение геометрических объектов*; к тому же, величины δ_n и $\tilde{\psi}_{nm}$ полностью определяют характер деформирования малой окрестности рассматриваемой точки деформируемого тела. Вышеизложенным можно ограничиться при краткой характеристике системы упрощений [10, 11] при переходе от теории конечных деформаций к теории малых деформаций; отметим, что в настоящее время вышеуказанная система упрощений, по–видимому, является общепринятой.

2. Нелинейная теория малых деформаций при малых углах поворота. Рассматриваемая теория малых деформаций при малых углах поворота была предложена в монографии [5]; эта теория основана на том, что дополнительно к упрощениям (1.4) теории малых деформаций вводятся упрощения, относящиеся к величинам, которые связаны с углами поворота. В соответствии с (1.1), наряду с величинами δ_n и $\tilde{\psi}_{nm}$, процесс деформирования в малой окрестности рассматриваемой точки тела можно также дополнительно характеризовать и величинами ψ_n – углами поворота материальных волокон вокруг ортов, направленных вдоль координатных линий. В дальнейшем для простоты основные соотношения будем рассматривать в лагранжевых координатах, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми координатами.

При попытке введения упрощений, связанных с предположением о малости углов поворота, необходимо учитывать, что величины ψ_n (углы поворота материальных волокон вокруг ортов, направленных вдоль координатных линий, которые вычислены в рамках теории конечных деформаций) *не определяются* простыми соотношениями через составляющие ω_k вектора углов поворота, вычисленных в рамках линейной теории. Заметим, что выражения для вычисления величин ψ_n в рамках теории конечных деформаций представлены в многочисленных публикациях, например, в [5, 6, 2, 4, 7]. В монографии [5] для характеристики поворота всей окрестности рассматриваемой точки тела были введены величины $\overline{\psi}_n$ – усредненные углы поворота. Усреднение проводилось для всех материальных волокон, проходящих через рассматриваемую точку тела. В дальнейшем в [5] *вводилось основное положение (упрощение), что усредненные углы поворота $\overline{\psi}_n$ являются малыми величинами по сравнению с единицей, и этими величинами по сравнению с единицей можно пренебречь*, что сводилось к следующему:

$$\overline{\psi}_n << 1. \tag{2.1}$$

Если дополнительно к упрощениям типа (1.4) теории малых деформаций, которые первоначально были введены в [10, 11], ввести упрощения типа (2.1), которые первоначально были введены в [5] и соответствуют теории малых деформаций при малых усредненных углах поворота, то после ряда преобразований можно [5] получить

$$\overline{\psi}_n \approx \omega_n, \tag{2.2}$$

где справа представлены составляющие вектора углов поворота линнейной теории. Из (2.2) с учетом (2.1) получаем

$$\omega_n << 1. \tag{2.3}$$

Таким образом, при принятом основном положении или упрощении также меньшими единицы получаем и составляющие вектора углов поворота линейной теории. Полученное неравенство (2.3) является основой для упрощений [5] в рамках рассматриваемой нелинейной теории. По–видимому, неравенства (2.3) послужили основой для названия [5] рассматриваемой теории как теории малых деформаций *при малых углах поворота*; в действительности, исходными допущениями или упрощениями рассматриваемой теории являются неравенства (2.1), таким образом, рассматриваемую теорию правильно было бы назвать теорией малых деформаций *при малых усредненных углах поворота* $\overline{\psi}_n$.

Примечание. Необходимо отметить, что введенные [5] усредненные углы поворота $\overline{\psi}_n$ не могут характеризовать произвольные процессы деформирования. Рассмотрим пример, когда в плоскости $x_1 0 x_2$ реализуется чистый сдвиг при произвольных (конечных или малых) деформациях. В этом случае очевидно, что усредненный угол поворота $\overline{\psi}_3$ (вокруг оси, перпендикулярной плоскости $x_1 0 x_2$) равен нулю, т.е.

$$\overline{\psi}_3 = 0, \tag{2.4}$$

а процесс деформирования происходит.

Ограничиваясь вышеизложенными сведениями, выполним в весьма краткой форме анализ рассматриваемой теории малых деформаций при малых углах поворота [5]. Отметим, что введенные усредненные углы поворота $\overline{\psi}_n$ являются "интегральными"характеристиками процесса деформирования в рассматриваемой точке тела по аналогии с величинами (1.2); однако величины $\overline{\psi}_n$ *не имеют непосредственного геометрического (или физического) смысла*, поскольку они не характеризуют изменение геометрических объектов, в отличие от величин (1.2). По крайней мере, величины $\overline{\psi}_n$ не имеют такого же четкого геометрического (или физического) смысла как общеизвестные величины (1.1) или даже (1.2); в связи с этим, величины $\overline{\psi}_n$ можно рассматривать как некоторые математические выражения, связанные с процессом деформирования. Таким образом, упрощения типа (2.1) *не представляются вполне логичными*, поскольку они связаны с ограничениями на величины, не имеющие непосредственного геометрического или физического смысла. По крайней мере упрощения типа (2.1) не имеют столь понятного геометрического или физического смысла как и общеизвестные упрощения типа (1.4). Таким образом, *теория [5] малых деформаций при малых углах поворота не имеет столь четкого геометрического или физического смысла как и общеизвестная теория малых деформаций, основанная на упрощениях типа (1.4)*.

Необходимо отметить, что вышеизложенный анализ относится к трехмерной теории описания деформирования деформируемых тел. В случае же двумерных прикладных теорий, построенных с привлечением гипотезы Кирхгофа–Лява, анализ существенным образом изменяется. В последнем случае вследствие привлечения кинематической гипотезы Кирхгофа–Лява величины $\overline{\psi}_1$ и $\overline{\psi}_2$ (усредненные углы поворота вокруг осей, лежащих в касательной плоскости) имеют непосредственный геометрический или физический смысл и совпадают с соответствующими углами поворота сечений.

Вышеизложенным обсуждением ограничимся при кратком анализе теории [5, 6] малых деформаций при малых углах поворота.

3. Об одном возможном обобщении теории малых деформаций. Как уже отмечалось, в теории малых деформаций применяются уравнения движения в виде (1.9), которые получаются из уравнений движения теории конечных деформаций в виде (1.3) путем введения в последние упрощений (1.4), соответствующих переходу к теории малых деформаций; по существу используются соотношения (1.8), заменяющие составляющие тензора напряжений S на составляющие тензора напряжений σ, которые получены с учетом выражений (1.6). Таким образом, в вышеуказанных преобразованиях упрощения (1.4) и следующие из них упрощения (1.6) и (1.8) вводятся в уравнения движения в рамках теории конечных деформаций *до дифференцирования*; необходимо отметить, что вышеуказанная специфика введения упрощений относится только к процедуре получения уравнений движения. В связи с вышеизложенным возникает возможность построить обобщение общепринятой нелинейной теории малых деформаций, вводя упрощения типа (1.4) и следующие из них упрощения типа (1.6)–(1.8) в уравнения движения в рамках теории конечных деформаций *после выполнения операции дифференцирования*; по–видимому вышеуказанное обобщение можно считать достаточно логически непротиворечивым.

Следует подчеркнуть, что обсуждаемое обобщение общепринятой нелинейной теории малых деформаций можно получить только в рамках *первого* подхода при построении теории малых деформаций (см. терминологию во Введении в настоящую статью).

Идея построения обсуждаемого обобщения нелинейной теории малых деформаций была предложена еще в монографии [2]; основные результаты, относящиеся к реализации такого обобщения, изложены в публикации [3] а также в сравнительно подробном виде – в монографиях [4, 7]. Также в весьма краткой форме информация о рассматриваемом обобщении представлена в обзорной статье [8] наряду с другими результатами, относящимися к построению трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел. Ниже, опуская все промежуточные преобразования, приведем лишь в качестве конечного результата нелинейные уравнения движения, полученные [4, 7] в рамках рассматриваемого обобщения общепринятой теории малых деформаций; более подробную информацию, относящуюся к построению вышеотмеченных уравнений движения, можно получить из монографий [4, 7]. В соответствии с результатами монографии [4], представленными на стр.61, нелинейные уравнения движения, полученные в рамках рассматриваемого обобщения теории малых деформаций, могут быть представлены в следующем виде

$$\nabla_i[\sigma^{in}(g_n^j + \nabla_n u^j)] + \sigma^{in}(g_n^j + \nabla_n u^j)\nabla_i \varepsilon_m^m - \rho \ddot{u}^j + \rho F^j = 0. \tag{3.1}$$

В (3.1) введены составляющие симметричного тензора напряжений σ, который является общепринятым в теории малых деформаций, и составляющие тензора деформаций Грина ε. Следует отметить, что в монографиях [4, 7] рассмотрены и другие варианты обсуждаемого возможного обобщения общепринятой теории малых деформаций.

Заключение. В настоящей статье в весьма краткой форме выполнен анализ основных исходных положений и упрощений, которые применяются при построении нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемого тела; следует подчеркнуть, что рассмотренный анализ относится лишь к геометрической (кинематической) стороне вопроса. Необходимо отметить, что по–видимому, теории, рассмотренные в пп. 2, 3, являются в определенном смысле обобщениями общепринятой теории малых деформаций, рассмотренной в п. 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Грин, А.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Д. Адкинс. – М. : Мир, 1965. – 143 с.

[2] *Гузь, А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел / А. Н. Гузь. – Киев : Наук. думка, 1971. – 276 с.

[3] *Гузь, А. Н.* О возможном обобщении нелинейной теории малых деформаций / А. Н. Гузь // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, т. 1. – С. 50–54.

[4] *Гузь, А. Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь. – Киев : Вища шк., 1986. – 512 с.

[5] *Новожилов, В. В.* Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – М. : Гостехиздат, 1948. – 212 с.

[6] *Новожилов, В. В.* Теория упругости / В. В. Новожилов. – М. ; Ленинград [СПб.] : Судостроение, 1958. – 368 с.

[7] *Guz, A. N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies / A. N. Guz. – Berlin : Springer, 1999. – 555 p.

[8] *Guz, A. N.* Constructing the three-dimensional theory of stability of deformable bodies / A. N. Guz // Inter. Appl. Mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 1. – P. 1–37.

[9] *Guz, A. N.* Constructing the nonlinear small-deformation theory in the mechanics of deformable bodies /A. N. Guz // Inter. Appl. Mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 8. – P. 1023–1027.

[10] *Kappus, R.* Zur Elastizitatstheorie endlicher Verschiebungen. 1 / R. Kappus // ZAMM. – 1939. – Vol. 19, № 5. – S. 271–285.

[11] *Kappus, R.* Zur Elastizitatstheorie endlicher Verschiebungen. 2 / R. Kappus // ZAMM. – 1939. – Vol. 19, № 6. – S. 344–361.

A. N. Guz

ABOUT CONSTRUCTION OF THE NONLINEAR THEORY OF THE SMALL DEFORMATIONS IN THE MECHANICS OF THE DEFORMABLE BODIES

S. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine

Abstract. The analysis of construction of the basic correlations of the nonlinear theory of the small deformations in the mechanics of a deformable firm body in the lagrangian's coordinates is considered. The basic attention is given to a conclusion of the specified correlations from the theory of final deformations thereby introducing the corresponding simplifications. Usually the specified simplifications are entered before the performance of the differential operations, in the present article the case of introduction of the simplifications after differentiation is also analyzed.

Keywords: the nonlinear theory, the final deformations, small deformations, introduction of the simplifications.

Гузь Александр Николаевич

академик НАНУ, профессор, доктор технических наук, директор Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, Киев

`e-mail:` guz@carrier.kiev.ua

Guz Alexander Nicholaevich

Academician NANU, Professor, Dr. Eng. Sci.,S. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev