

Д. В. Давыдов, Ю. М. Мяснянкин, Е. Д. Чуфринова

О СЖАТИИ ТОНКОГО АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ СЛОЯ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается плоская задача о сжатии тонкого анизотропно упрочняющегося слоя, выполненного из жесткопластического материала, шероховатыми плитами произвольной криволинейной формы. Для описания деформированного состояния используется тензор Альманси, связанный с тензором скоростей деформаций объективной производной по времени в смысле Коттера-Ривлина. С помощью асимптотического метода найдены рекуррентные формулы для компонент вектора скорости, деформаций и напряжений.

Ключевые слова: сжатие слоя, упрочнение, конечные деформации, асимптотический метод.

УДК: 539.374

Задача Прандтля о сжатии слоя из идеального жесткопластического материала шероховатыми плитами стала основой теоретического анализа прикладных задач обработки металлов давлением. Надаи [1] рассмотрел задачу Прандтля в случае сжатия слоя наклонными шероховатыми плитами, а также плитами, изогнутыми в виде концентрических окружностей. Для слоя конечной толщины эта задача изучалась Хиллом [2] и В. В. Соколовским [3]. Ряд обобщений задачи принадлежит Гартману, А. А. Ильюшину [4, 5], Д. Д. Ивлеву [6], М. А. Задояну [7]. Г. И. Быковцев [8] рассмотрел задачу о сдавливании пластического слоя шероховатыми плитами с учетом упрочнения в декартовой системе координат.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим сжатие тонкого анизотропно упрочняющегося жесткопластического слоя, расположенного между двумя криволинейными шероховатыми плитами, сближающимися с постоянной единичной скоростью. Радиус кривизны плит r в каждой точке значительно превосходит толщину слоя и является непрерывно дифференцируемой функцией. Длина слоя l много больше его толщины ($l \gg h$), но плиты полностью перекрывают сдавливаемый материал (рис. 1).

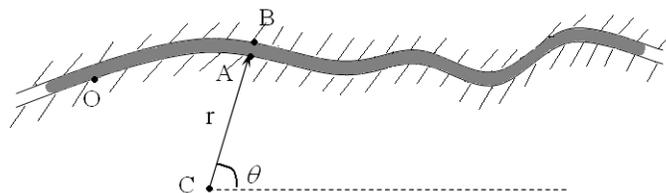


Рис. 1. Сжатие тонкого слоя криволинейными плитами

Рассмотрение следует вести в криволинейных координатах, которые позволяли бы описать форму плит. В качестве таковых примем координаты, предложенные В. В. Соколовским [3]. В общем виде квадрат бесконечно малого элемента длины ds выражается как

$$ds^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2, \quad (1)$$

За координаты x_1 и x_2 выберем соответственно длину x дуги кривой ОА и длину y по направлению нормали АВ. С учетом того, что радиус кривизны плиты в точке А $r = r(x) = -dx/d\theta$, квадрат бесконечно малого элемента длины ds запишется в виде

$$ds^2 = \left(1 + \frac{y}{r(x)}\right)^2 dx^2 + dy^2, \quad (2)$$

а коэффициенты H_1 и H_2 будут равны

$$H_1 = H = 1 + \frac{y}{r(x)}, \quad H_2 = 1. \quad (3)$$

Ось x направим таким образом, чтобы пластический слой располагался симметрично относительно нее, а толщину слоя в момент времени t обозначим через $2h(t)$.

Для поставленной задачи в выбранной системе координат система уравнений принимает вид: условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y - c\varepsilon_x + c\varepsilon_y)^2 + 4(\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})^2 = 4k^2, \quad (4)$$

которое удовлетворим заменой

$$\sigma_x = \sigma - k \sin 2\varphi + c\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma + k \sin 2\varphi + c\varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = k \cos 2\varphi + c\varepsilon_{xy}, \quad (5)$$

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + H \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{2\tau_{xy}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + H \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{r} = 0, \quad (6)$$

ассоциированный закон пластического течения с учетом замены (5)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) = 2\lambda (\sigma_x - \sigma_y - c\varepsilon_x + c\varepsilon_y) = -4\lambda k \sin 2\varphi, \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -2\lambda (\sigma_x - \sigma_y - c\varepsilon_x + c\varepsilon_y) = 4\lambda k \sin 2\varphi, \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{1}{H} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} = 4\lambda (\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy}) = 4\lambda k \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

условие несжимаемости материала

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

При рассмотрении деформированного состояния будем использовать тензор конечных деформаций Альманси, который связан с тензором скоростей деформаций следующим соотношением [9, 10]

$$\frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + v^k \nabla_k \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ik} \nabla_j v^k + \varepsilon_{jk} \nabla_i v^k = \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (9)$$

где оператор D/Dt обозначает объективную производную по времени в смысле Коттера-Ривлина, ∇_i – ковариантная производная по i -ой координате, v_k – проекции вектора скорости на координатные оси, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформаций. В рассматриваемом случае уравнения (9) в физических компонентах принимают вид

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + H^2 u \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + H v \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} &= -2H^2 \frac{u}{r} \varepsilon_{xy} + \frac{2v}{r} \varepsilon_x - 2H^2 \varepsilon_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) - \\
&\quad - 2\varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + H u \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} &= -2H^2 \varepsilon_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + 4H \frac{u}{r} \varepsilon_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} (1 - 2\varepsilon_y), \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} + H^2 u \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + H v \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} &= -H^3 \varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial y} - H^2 \frac{u}{r} (\varepsilon_y - 2\varepsilon_x) - \\
-H^2 \varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) - H \varepsilon_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} \right) &+ \frac{v}{r} \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} + H \frac{\partial u}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Используя (7) и (8), выведем для компонент вектора скорости дополнительное уравнение

$$\frac{1}{H} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{ctg} 2\varphi = 0, \quad \operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{2\dot{\varepsilon}_{xy}}{\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_x}. \tag{11}$$

2. Определение неизвестных. Дальнейшее рассмотрение будем вести в безразмерных переменных

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}, \tilde{y} = \frac{y}{h(t)}, \tilde{r}(x) = \frac{r(x)}{R}, \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{k}, \tilde{t} = \frac{h(t)}{h(0)}, \tilde{u} = \frac{u}{v_0}, \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, A = \frac{l}{R}, B = \frac{c}{k}, \tag{12}$$

где R – максимальный радиус кривизны для плит ($R \neq \infty$), v_0 – скорость сближения плит. Величина $\delta = h/l$ согласно постановке задачи является малой, а значит, неизвестные величины можно искать в виде рядов (13) по степеням этого малого параметра. В дальнейшем знак тильды в соотношениях (12) будем отбрасывать, сохраняя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных.

$$f(x, y, t) = \sum_{m=-1}^{\infty} \delta^m f^{(m)}(x, y, t). \tag{13}$$

Уравнения (8) и (11) относительно компонент вектора скорости после преобразований (12) записываются в виде

$$\begin{aligned}
\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \delta A \frac{v}{r} + \left(1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\
\delta \frac{\partial v}{\partial x} - \delta A \frac{u}{r} + \left(1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{ctg} 2\varphi \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Произведя разложение функций u и v в ряды вида (13) по степеням δ и учитывая граничные условия $v(x, \pm 1, t) = \mp 1$, мы получили следующие рекуррентные зависимости

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} - \frac{A}{r} v^{(k)} - \frac{Ay}{r} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y}, \\
\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial y} \operatorname{ctg} 2\varphi - \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} + \frac{A}{r} u^{(k)} - \frac{Ay}{r} \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} - 2 \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \operatorname{ctg} 2\varphi \right),
\end{aligned} \tag{15}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. При этом первые два приближения имеют вид

$$\begin{aligned}
u^{(-1)} &= x, \quad v^{(-1)} = 0, \\
u^{(0)} &= -2 \int \operatorname{ctg} 2\varphi dy + \frac{A}{r} xy + g^{(0)}(t), \quad v^{(0)} = -y,
\end{aligned} \tag{16}$$

а граничные условия для поиска произвольных функций от интегрирования дополняются условием несжимаемости в интегральной форме

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(1 + \delta \frac{A}{r(u^{(k)}|_{x=l}t)} y \right) u^{(k)}|_{x=l} dt dy = 0, \quad (17)$$

$$v^{(k+1)}(x, \pm 1, t) = 0.$$

Нахождение членов разложения деформаций из системы () затруднено, поскольку проблематично обнаружить эти члены в явном виде даже для начальных приближений, а количество членов в разложении значительно увеличивается. Приведем вид системы () после разложения при произвольном δ^k

$$\begin{aligned} & -t \frac{\partial \varepsilon_x^{(k)}}{\partial t} - \frac{Ay}{r} t \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-1)}}{\partial t} + \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-1-m)}}{\partial x} + 2 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-2-m)}}{\partial x} + \\ & + \left(\frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-2} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-3-m)}}{\partial x} + \sum_{m=-1}^{k+1} v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-m)}}{\partial y} + \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-1-m)}}{\partial y} = \\ & = -\frac{2A}{r} \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \varepsilon_{xy}^{(k-1-m)} - 4 \frac{A^2 y}{r^2} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \varepsilon_{xy}^{(k-2-m)} - \\ & - 2 \frac{A^3 y^2}{r^3} \sum_{m=-1}^{k-2} u^{(m)} \varepsilon_{xy}^{(k-3-m)} - 2 \sum_{m=-1}^k \varepsilon_x^{(m)} \left(\frac{\partial u^{(k-1-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-1-m)} \right) - \\ & - 4 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_x^{(m)} \left(\frac{\partial u^{(k-2-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-2-m)} \right) - \\ & - 2 \left(\frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-2} \varepsilon_x^{(m)} \left(\frac{\partial u^{(k-3-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-3-m)} \right) + \frac{2A}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_x^{(m)} v^{(k-1-m)} - \\ & - 2 \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} \left(\frac{\partial v^{(k-1-m)}}{\partial x} - \frac{A}{r} u^{(k-1-m)} \right) + \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-1)}, \\ & -t \frac{\partial \varepsilon_y^{(k)}}{\partial t} + \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_y^{(k-1-m)}}{\partial x} + \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_y^{(k-2-m)}}{\partial x} + \sum_{m=-1}^{k+1} v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_y^{(k-m)}}{\partial y} = \\ & = -2 \sum_{m=-1}^{k+1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial u^{(k-m)}}{\partial y} - 4 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial u^{(k-1-m)}}{\partial y} - \\ & - 2 \left(\frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial u^{(k-2-m)}}{\partial y} + \frac{4A}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} u^{(k-1-m)} + \\ & + 4 \frac{A^2 y}{r^2} \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_{xy}^{(m)} u^{(k-2-m)} - 2 \sum_{m=-1}^{k+1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& -t \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k)}}{\partial t} - \frac{Ay}{r} t \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-1)}}{\partial t} + \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-1-m)}}{\partial x} + 2 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-2-m)}}{\partial x} + \\
& + \left(\frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-2} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-3-m)}}{\partial x} + \sum_{m=-1}^{k+1} v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-m)}}{\partial y} + \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-m)}}{\partial y} = \\
& = - \sum_{m=-1}^{k+1} \varepsilon_x^{(m)} \frac{\partial u^{(k-m)}}{\partial y} - 3 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_x^{(m)} \frac{\partial u^{(k-1-m)}}{\partial y} - \\
& - 3 \left(\frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_x^{(m)} \frac{\partial u^{(k-2-m)}}{\partial y} - \left(\frac{Ay}{r} \right)^3 \sum_{m=-1}^{k-2} \varepsilon_x^{(m)} \frac{\partial u^{(k-3-m)}}{\partial y} - \\
& - \frac{A}{r} \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \left(\varepsilon_y^{(k-1-m)} - 2 \varepsilon_x^{(k-1-m)} \right) - 2 \frac{A^2 y}{r^2} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \left(\varepsilon_y^{(k-2-m)} - 2 \varepsilon_x^{(k-2-m)} \right) - \\
& - \frac{A^3 y^2}{r^3} \sum_{m=-1}^{k-2} u^{(m)} \left(\varepsilon_y^{(k-3-m)} - 2 \varepsilon_x^{(k-3-m)} \right) - \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} \left(\frac{\partial u^{(k-1-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-1-m)} \right) - \\
& - 2 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \left(\frac{\partial u^{(k-2-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-2-m)} \right) - \\
& - \left(\frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-2} \varepsilon_{xy}^{(m)} \left(\frac{\partial u^{(k-3-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-3-m)} \right) - \sum_{m=-1}^{k+1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial v^{(k-m)}}{\partial y} - \\
& - \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial v^{(k-1-m)}}{\partial y} - \sum_{m=-1}^k \varepsilon_y^{(m)} \left(\frac{\partial v^{(k-1-m)}}{\partial x} - \frac{A}{r} u^{(k-1-m)} \right) - \\
& - \frac{A}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} v^{(k-1-m)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{Ay}{r} \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k-1)}}{\partial x} - \frac{A}{r} u^{(k-1)} \right).
\end{aligned}$$

Систему (18) следует дополнить начальными условиями для деформаций

$$\varepsilon_x^{(k)}|_{t=1} = \varepsilon_y^{(k)}|_{t=1} = \varepsilon_{xy}^{(k)}|_{t=1} = 0. \quad (19)$$

Нахождение деформаций значительно упростится, если мы отбросим члены второго порядка малости. При этом система () запишется в виде

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + \delta A \frac{y}{r} \right) t \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{v}{r} \right), \\
& -t \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\
& - \left(1 + \delta A \frac{y}{r} \right) t \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} = \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - A \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned} \quad (20)$$

решение которой можно представить в виде рекуррентных формул

$$\begin{aligned}
& -t \frac{\partial \varepsilon_x^{(k)}}{\partial t} = \frac{Ay}{r} t \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-1)}}{\partial t} + \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-1)}, \\
& -t \frac{\partial \varepsilon_y^{(k)}}{\partial t} = \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y}, \\
& -t \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k)}}{\partial t} = \frac{Ay}{r} t \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-1)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^{(k-1)}}{\partial x} + \frac{Ay}{r} \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial y} - \frac{A}{r} u^{(k-1)} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \right),
\end{aligned} \quad (21)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$, для которых первые два приближения находятся из соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(-1)} &\equiv \varepsilon_y^{(-1)} \equiv \varepsilon_{xy}^{(-1)} \equiv 0, \\ \varepsilon_x^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-t^2), \quad t \frac{\partial \varepsilon_y^{(0)}}{\partial t} = -2\varepsilon_{xy}^{(0)} \left(2 \operatorname{ctg} 2\varphi + A \frac{x}{r} \right) - 2\varepsilon_y^{(0)} + 1, \\ \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(0)}}{\partial t} &= \frac{1}{2}t \left(2 \operatorname{ctg} 2\varphi + A \frac{x}{r} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Начальные условия для поиска неизвестных функций интегрирования удовлетворяют соотношению (19).

Система уравнений для определения напряженного состояния после преобразований (12) принимает вид

$$(\sigma_x - \sigma_y - B\varepsilon_x + B\varepsilon_y)^2 + 4(\tau_{xy} - B\varepsilon_{xy})^2 = 4, \quad (23)$$

$$\sigma_x = \sigma - \sin 2\varphi + B\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma + \sin 2\varphi + B\varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = \cos 2\varphi + B\varepsilon_{xy}, \quad (24)$$

$$\delta \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \left(1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 2\delta A \frac{\tau_{xy}}{r} = 0, \quad \delta \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \left(1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \delta A \frac{\sigma_y - \sigma_x}{r} = 0. \quad (25)$$

Учтем граничные условия: на плитах величина касательного напряжения принимается постоянной и равной $m = T/k$, причем $T \leq k$. Таким образом, $\tau_{xy}|_{y=\pm 1} = \pm m$. На основании соотношений (23)–(25) для напряжений могут быть записаны следующие рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k+1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} - \frac{Ay}{r} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} - A \frac{2\tau_{xy}^{(k)}}{r}, \\ \frac{\partial \sigma_y^{(k+1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} - \frac{Ay}{r} \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial y} - A \frac{\sigma_y^{(k)} - \sigma_x^{(k)}}{r}, \\ \sigma^{(k)} &= \sigma_y^{(k)} + \sin 2\varphi - B\varepsilon_y^{(k)}, \\ \sigma_x^{(k)} &= \sigma^{(k)} + B\varepsilon_x^{(k)}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, первые два приближения для которых имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(-1)} &= \sigma_y^{(-1)} = -mx, \quad \tau_{xy}^{(-1)} \equiv 0, \\ \sigma_x^{(0)} &= 2 \sin 2\varphi + \frac{2}{B} \frac{(my - \cos 2\varphi)^2}{t^2} + \frac{B}{2} (1-t^2), \quad \sigma_y^{(0)} = B \frac{t^2 - 1}{2t^2}, \quad \tau_{xy}^{(0)} = my. \end{aligned} \quad (27)$$

К соотношениям (26) необходимо добавить граничные условия шероховатости плит, а также условие уравновешенности напряжения σ_x в вертикальном сечении касательными напряжениями на основаниях слоя, а именно

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 \sigma_x^{(k)} dy + \int_0^x \tau_{xy}^{(k)}|_{y=1} dx &= 0, \\ \tau_{xy}^{(k)}(x, \pm 1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Наконец, из соотношений (18) при $k = 0$ следует равенство

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(0)}}{\partial t} = \frac{t}{2} \left(2 \operatorname{ctg} 2\varphi + A \frac{x}{r} \right), \quad (29)$$

а из уравнений равновесия с учетом замены (24) получили, что

$$my = \cos 2\varphi + B\varepsilon_{xy}^{(0)}. \quad (30)$$

Исключая из уравнений (29)–(30) величину $\varepsilon_{xy}^{(0)}$, получим соотношение для определения функции $\varphi(x, y, t)$

$$\int \frac{\sin 2\varphi}{\operatorname{ctg} 2\varphi + A \frac{x}{2r}} d\varphi = \frac{Bt^2}{4}. \quad (31)$$

Заключение. Таким образом, с помощью асимптотического метода нам удалось найти рекуррентные формулы для компонент вектора скорости (15)–(16) с граничными условиями (17), для деформаций выражения (18) или упрощенные (21)–(22) с начальными условиями (19) и формулы для напряжений (26)–(27) с граничными условиями (28). Все эти соотношения необходимо дополнить выражением (31) для определения функции $\varphi(x, y, t)$.

При стремлении радиуса кривизны плит к бесконечности полученное нами решение совпадает с решением, найденным Г. И. Быковцевым, для плоской задачи в декартовой системе координат [8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : ИЛ, 1954. – Т. 1. – 648 с. ; М. : Мир, 1969. – Т. 2. – 864 с.
- [2] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [3] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [4] *Ильюшин, А. А.* Вопросы теории течения пластического вещества по поверхности / А. А. Ильюшин // ПММ. – 1954. – Т. 18, вып. 3. – С. 67–78.
- [5] *Ильюшин, А. А.* Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения / А. А. Ильюшин // ПММ. – 1955. – Т. 19, вып. 6. – С. 693–713.
- [6] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 1. – 445 с. ; 2002. – Т. 2. – 448 с.
- [7] *Задоян, М. А.* Пространственные задачи теории пластичности / М. А. Задоян. – М. : Наука, 1992. – 382 с.
- [8] *Быковцев, Г. И.* О сжатии анизотропно упрочняющегося пластического слоя шероховатыми плитами / Г. И. Быковцев // Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред : сб. статей. – Владивосток, 2002. – С. 13–16.
- [9] *Аннин, Б. Д.* Обобщенные сопряженные тензоры напряжений и деформаций / Б. Д. Аннин, С. Н. Коробейников // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7, № 3(19). – С. 21–43.
- [10] *Прагер, В.* Введение в механику сплошных сред / В. Прагер. – М. : ИЛ, 1963. – 311 с.

D. V. Davydov, Y. M. Myasnyankin, E. D. Chufrinova

**TO THE PRESSING OF AN ANISOTROPIC STRENGTHENED THIN LAYER
BY CURVILINEAR ROUGH SLABS**

Voronezh State University

Abstract. In the paper is considered the plane problem of pressing of an anisotropic strengthened thin layer made of a rigid material by rough slabs of arbitrary curvilinear form. For the description of the deformed state is used tensor of finite deformations, which is linked to the tensor of strain speed by objective time derivative in the sense of Cotter-Rivlin. Using the asymptotic method it is found the recurrent formulas for the components of the velocity vector, strain and stress.

Keywords: pressing of layer, strengthening, finite strain, asymptotic method.

Давыдов Дмитрий Владиславович

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

e-mail: d-d-a-v@yandex.ru

Мяснянкин Юрий Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

e-mail: pmmtamc@amm.vsu.ru

Чуфринова Елена Дмитриевна

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

e-mail: gelya1818@mail.ru

Davydov Dmitry Vladislavovich

Postgraduate student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Myasnyankin Yury Mihaylovich

Ph.D, Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Chufrinova Elena Dmitrievna

Postgraduate student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh