Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 161–171

В. Г. Зубчанинов

ОБОБЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ И НЕПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Тверской государственный технический университет

Аннотация. Представлена новая форма критерия пластичности и пластического течения, описывающая как состояния полной, так и неполной пластичности в пространственных и плоских задачах.

Ключевые слова: инварианты тензоров, напряжения, деформации, критерии пластичности, полная и неполная пластичность.

УДК: 539.3

Введение. Теория пластических сред является одним из фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела. Образование пластических деформаций при нагружении металлов связано в основном со сдвиговым характером их деформирования и течения. В других средах, например в грунтах, необратимые деформации могут возникать за счет деформаций всестороннего сжатия. Еще Г. Стокс (1845 г.) отметил [1], что теория упругости и пластичности должны быть основаны на результатах физических опытов, а не только на теоретических гипотезах. Он заметил, что существуют два типа *упругости*: одна имеет место тогда, когда тело подвергается всестороннему равномерному сжатию, после которого тело стремится восстановить свой объем, другая *упругость* стремится восстановить свою форму. Все тела в разной степени обладают свойствами упругости, пластичности и вязкости. Металлы обладают заметно этими свойствами. Механики-пластичники первыми заметили сдвиговый характер пластического деформирования и упругий характер объемного деформирования. На это обратил внимание Треска в своих опытах по штамповке и выдавливанию свинца (1864 г.). При этом он обратил внимание на то, что твердые тела могут течь в условиях нормальных температур подобно вязким жидкостям при достижении максимальным касательным напряжением некоторого предельного физического значения k. По существу, в исследованиях Треска наблюдалось явление сверхпластичности, связанное с ползучестью и измельчением структуры металлов. Эти исследования открыли широкую дорогу для применения теории пластичности идеально пластических материалов в технологических задачах и задачах о *предельных состояниях* в механике деформируемых твердых и сплошных сред, теории сооружений и др. Современная механика твердого тела не в состоянии учесть в равной степени все механические свойства тел и поэтому понятие идеального упругопластического материала является довольно грубой, но все же методологически оправданной идеализацией реальной сплошной среды и имеет большое практическое значение, является хорошим приближением для целого ряда важных технологических инженерных задач и задач предельного состояния сред и сооружений.

Основы теории идеально пластичности были заложены Треска, Сен-Венаном, Мизесом, Генки, Хааром, Карманом и получили развитие в трудах Леви, Прандтля, Рейсса, Роша,

Поступила 27.07.2010

Эйхингера, Надаи, Лоде, Прагера, Хоэнемзера, Хилла, Ильюшина А. А., Соколовского В. В., Качанова Л. М., Христиановича С. А., Шемякина Е. И., Ишлинского А. Ю., Ивлева Д. Д. и других выдающихся ученых [1–12].

Хааром и Карманом в теории идеальной пластичности были введены понятия *полной и неполной пластичности* материалов [2]. Особенности этих состояний весьма существенны и имеют фундаментальное значение в теории пластичности. В состоянии полной пластичности в материале создаются наиболее благоприятные условия для пластического течения. Прагер [2] для этого состояния ввел понятие *свободного пластического течения*. Это состояние реализуется только при простом пропорциональном нагружении. В состоянии неполной пластичности в одном из направлений имеет место упругое деформирование, а в других — пластическое течение. Для пространственных задач в таком состоянии пластическое течение не может быть свободным. Переход среды из упругого состояния в пластическое описывается критерием Треска–Сен-Венана, а материал из начально изотропного становится квазипростым со слабой деформационной анизотропией.

Для таких задач в условиях неполной пластичности в силу их статической определимости свободное пластическое течение возможно. Соотношения теории пластического течения Сен-Венана–Мизеса правильно воспроизводят свободные деформации в мягких металлах.

Так что же это за состояния полной и неполной пластичности, которым так много внимания уделяется в работах Д. Д. Ивлева?! И это правильно.

Научные исследования Дюиса Даниловича Ивлева посвящены в основном математической теории идеально пластических сред в механике деформируемого твердого тела [7–10]. Одним из главных достижений этих исследований в условиях полной пластичности является доказательство того, что основные уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности образуют статически определимую систему, принадлежащую к гиперболическому типу. В результате им была построена общая теория идеальной пластичности сплошных сред и материалов с использованием единого математического аппарата статически определимых уравнений гиперболического типа, которая соответствует сдвиговому деформированию сплошных сред. Работы Д. Д. Ивлева внесли фундаментальных вклад в развитие математической теории идеально пластических сред. Его работы лаконичны, затрагивают существо возникающих проблем и пути их решения, оригинальны и значимы. Профессор Д. Д. Ивлев создал крупные региональные научные школы в области теории предельных состояний и идеальной пластичности сплошных сред и конструкций в Воронеже, Чебоксарах. Это не каждому дано. Его ученики работают во многих научных центрах. Механики-пластичники благодарны Д. Д. Ивлеву за создание замечательного научного журнала «Механика предельных состояний» в Чувашском государственном педагогическом университете, столь необходимого сегодня для развития теории пластичности в России. Он вполне достоин быть российским межвузовским научным журналом.

В настоящее время Дюис Данилович Ивлев является крупнейшим ученым в области современной теории идеально пластических тел и сред, талант которого далеко продвинул вперед идеи основоположников этого фундаментального научного направления в механике деформируемого твердого тела и теории пластичности.

1. Инварианты напряженно-деформированного состояния сплошных сред. Напряженно-деформированное состояние (НДС) частицы тела сплошной среды, характеризуемое тензорами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} можно разложить на состояния, характеризуемые шаровыми тензорами и тензорами-девиаторами с напряжениями и деформациями

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где

$$\sigma_0 = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3, \quad \varepsilon_0 = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}/3 \tag{2}$$

– модули шаровых тензоров соответственно (первые инварианты), δ_{ij} – символ Кронеккера.

Главные напряжения σ_k, S_k и главные удлинения ε_k, $Э_k$ $(k = 1, 2, 3)$ тензоров определяются формулами [1, 13]

$$\begin{cases} S_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma\cos\varphi = \frac{2}{3}(T_{12} + T_{13}), \\ S_2 = \sigma_2 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = \frac{2}{3}(T_{21} + T_{23}), \\ S_3 = \sigma_3 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{2}{3}(T_{31} + T_{32}), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} Э_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}Э\cos\psi = \frac{1}{3}(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}), \\ Э_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}Э\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \psi\right) = \frac{1}{3}(\Gamma_{21} + \Gamma_{23}), \\ Э_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}Э\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \psi\right) = \frac{1}{3}(\Gamma_{31} + \Gamma_{32}), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\begin{cases} T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right), \\ T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sin\varphi, \\ T_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \sqrt{2}Э\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \psi\right), \\ \Gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \sqrt{2}Э\sin\psi, \\ \Gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \sqrt{2}Э\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \psi\right), \end{cases} \tag{6}$$

– главные касательные напряжения и главные сдвиги,

$$\begin{cases} \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2}, \\ Э = \sqrt{Э_{ij}Э_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{13}^2}, \end{cases} \tag{7}$$

– модули девиаторов напряжений и деформаций (вторые инварианты),

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{6}|S_{ij}|}{\sigma^3}\right), \\ \psi = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{6}|Э_{ij}|}{Э^3}\right), \end{cases} \tag{8}$$

– углы вида напряженного и деформированного состояний на девиаторной плоскости соответственно.

Если объемная деформация упруга, то

$$\theta = \delta_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_0}{K}, \tag{9}$$

где

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

– модуль упругой деформации Бриджмена, E – продольный модуль Эйлера-Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

В этом случае пластическая деформация носит *сдвиговый характер*.

Рассмотрим сдвиговое пространственное напряженное состояние, при котором все нормальные напряжения равны нулю, но касательные напряжения σ_{ij} $(i \neq j)$ – различны. Инварианты при таком напряженном состоянии

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma = \sqrt{2}\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2}, \quad J_3 = |S_{ij}| = 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}. \tag{10}$$

Угол вида формоизменения φ определяется из соотношения (8)

$$\cos 3\varphi = 3\sqrt{6}\frac{|S_{ij}|}{\sigma^3} = \frac{6\sqrt{6}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}}{\sigma^3}. \tag{11}$$

Главные нормальные напряжения определяются по формулам (3), а главные касательные напряжения – по формулам (4).

Если одно из касательных напряжений $\sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, то $\cos 3\varphi = 0$,

$$\varphi = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ.$$

В этом случае одно из главных нормальных напряжений обращается в нуль, а два других равны $\pm\sigma/\sqrt{2}$ и противоположны по знаку, т.е. приводят к состоянию плоского чистого сдвига с изменяющимся положением главных осей. Одно из главных касательных напряжений в этих точках $T_{\max} = \sigma/\sqrt{2}$, а два других по модулю $|T_{ij}| = \sigma/2\sqrt{2}$. Такое напряженное состояние встречается в задачах кручения призматических стержней, которое к плоским задачам отнести нельзя.

Если, например, $\sigma_{23} = 0$, то главные нормальные напряжения

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_2 = 0,$$

а главные касательные напряжения

$$T_{12} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}, \quad T_{23} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}, \quad T_{13} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = T_{\max}.$$

Положение второй главной оси определяется направляющими косинусами

$$l_1 = 0, \quad l_2 = -\frac{\sqrt{2}\sigma_{13}}{\sigma} = -\sin\alpha, \quad l_3 = \frac{\sqrt{2}\sigma_{12}}{\sigma} = \cos\alpha,$$

т.е. главная ось 2 ортогональна к координатной оси x_1 и повернута относительно этой оси на угол α, а две другие расположены в плоскости, повернутой около оси x_1 также на угол α. При этом направляющие косинусы первой главной оси

$$l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l_2 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma}, \quad l_3 = \frac{\sigma_{13}}{\sigma},$$

а сама она повернута в данной плоскости около второй главной оси на угол 45°.

Таким образом, рассматриваемое сложное напряженное состояние двойного сдвига хотя и приводится формально к чистому плоскому сдвигу с касательными напряжениями $T_{\max} = \sigma/\sqrt{2} = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}$, но процесс нагружения может быть сложным (непропорциональным). Такого типа нагружение называют *квазипростым процессом нагружения*. Вид напряженного состояния не изменяется в силу $\sigma_0 = 0$ и $J_3 = |S_{ij}| = 0$. Однако, траектория деформирования в линейном пространстве является криволинейной, т.е. сложной. Для такого состояния имеет место *постулат изотропии*, согласно которому ортогональные преобразования вращения и отражения позволяют рассматриваемый процесс считать приближенно эквивалентным растяжению в состоянии полной пластичности. Это обстоятельство будет использовано нами при определении сдвиговых констант в пространственных и плоских задачах.

В теории НДС важное значение имеют два вида НДС — *пространственный и плоский чистые сдвиги*. При пространственном чистом сдвиге все нормальные напряжения равны нулю, а касательные $\sigma_{ij} = \tau$ $(i \neq j)$. При этом главные нормальные напряжения $\sigma_1 = 2\tau$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$, $\sigma_0 = 0$, а главные касательные напряжения

$$T_{\max} = T_{12} = T_{13} = 3\tau/2, \quad T_{23} = 0. \tag{12}$$

При плоском чистом сдвиге в одной из координатных плоскостей, например x_1, x_3, действуют главные нормальные напряжения $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_0 = 0$, а главные касательные напряжения

$$T_{\max} = T_{13} = \tau, \quad T_{12} = T_{13} = \tau/2. \tag{13}$$

Если на напряженное состояние пространственного чистого сдвига наложить всестороннее среднее напряжение $\sigma_0 = \tau$, то получим напряженное состояние чистого растяжения $\sigma_1 = 3\tau$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Если на напряженное состояние плоского чистого сдвига наложить в той же плоскости напряжения $\sigma_0 = \tau$, то также получим напряженное состояние простого растяжения $\sigma_1 = 2\tau$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Однако, при наложении всестороннего объемного напряжения $\sigma_0 = \tau$, мы естественно не получим чистого растяжения, что весьма существенно при пластическом деформировании.

2. Критерии пластичности Треска–Сен-Венана и Мизеса и состояния полной и неполной пластичности. Исторически первым и широко используемым критерием текучести материалов является критерий Треска–Сен-Венана

$$T_{\max} = T_{mn} = \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} = k \quad (m < n; m, n = 1, 2, 3). \tag{14}$$

Согласно этому критерию переход материала из упругого состояния в пластическое происходит тогда, когда при любом пространственном НДС одно из главных касательных напряжений достигает некоторого предельного напряжения k. При этом нигде не оговаривается, сохранится ли это предельное напряжение в плоских задачах. В некоторых практически важных задачах удается установить, какое из главных касательных напряжений является наибольшим, а какое наименьшим. Однако, в общем случае заранее неизвестно, какое из трех главных касательных напряжений будет наибольшим. В этом случае условие (14) Хаар и Карман записали в виде [2]

$$(T_{12}^2 - k^2)(T_{23}^2 - k^2)(T_{13}^2 - k^2) = 0. \tag{15}$$

В этой же работе они ввели в теорию пластичности важные понятия *полной и неполной пластичности.* Если в (15) все множители отрицательны, то материал среды находится в упругом состоянии и имеет место закон Гука. Если в (15) два множителя обращаются в нуль, то на двух площадках скольжения главные касательные напряжения достигают максимального значения $T_{\max} = k$, а третье напряжение $T_{mn} = 0$. Такое состояние среды было названо *полным или вполне пластическим* состоянием. Если в (15) только один множитель обращается в нуль, а два других отрицательны, то одно из главных касательных напряжений максимально и достигает предельного значения $T_{\max} = k$, а два других $T_{mn} < k$. Такое состояние было названо в [2] *полупластическим или неполным пластическим.* Ниже мы дадим несколько иное толкование состояниям полной и неполной пластичности, приводящим к тем же и новым результатам.

Другим широко известным в расчетной практике критерием пластичности является критерий Мизеса [2]. На основании критерия Треска (14) им было предложено считать, что в упругом состоянии все главные касательные напряжения

$$|T_{ij}| \le k \quad (i, j, = 1, 2, 3). \tag{16}$$

Мизес рассмотрел вместо ортогонального пространства главных нормальных напряжений σ_k $(k = 1, 2, 3)$ Хея ортогональное пространство главных касательных напряжений τ_k $(k = 1, 2, 3)$, обозначив

$$\tau_1 = T_{23}, \quad \tau_2 = T_{31}, \quad \tau_3 = T_{12} \tag{17}$$

и в нем – девиаторную плоскость

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad (T_{23} + T_{31} + T_{12} = 0). \tag{18}$$

В этом пространстве равенства (16) представляют собой куб. При пересечении этого куба с плоскостью (18) образуется правильный шестиугольник, который представляет собой геометрическое изображение на девиаторной плоскости (18) критерия Треска–Сен-Венана (16). Опираясь на идею Хаара и Кармана о том, что в состоянии полной пластичности два главных касательных напряжения равны предельному значению $T_{\max} = k$, а одно из них $T_{ij} = 0$, Мизес этот правильный шестиугольник заменяет приближенно описывающей его окружностью радиуса $R = \sqrt{2}k$, т.е.

$$T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2 = 2k^2. \tag{19}$$

Этот же результат можно получить, рассматривая пространство главных нормальных напряжений σ_k $(k = 1, 2, 3)$ Хея либо пространство главных нормальных напряжений тензора-девиатора напряжений S_k $(k = 1, 2, 3)$. В этом случае получим вместо (19) для модуля-девиатора выражение

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma^T \tag{20}$$

или

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2} = \sigma^T, \tag{21}$$

где предельное значение модуля-девиатора напряжений

$$\sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T, \quad \sigma_T = 2k, \tag{22}$$

σ_T – предел текучести при растяжении.

В пространстве главных нормальных напряжений Хея условие пластичности Мизеса (20) либо (21) изображается цилиндром радиуса $R = \sigma^T$ с гидростатической осью, равнонаклоненной к главным осям, а условие Треска–Сен-Венана — шестигранной правильной призмой Кулона, вписанной в этот цилиндр. На девиаторной плоскости, ортогональной гидростатической оси, условие Мизеса изображается окружностью радиуса $R = \sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$, а условие Треска–Сен-Венана — вписанным в эту окружность правильным шестиугольником. Точки их соприкосновения, характеризуемые углами вида напряженного состояния

$$\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ,$$

названы нами *особыми точками полной пластичности*. Аналогичные построения имеют место в пространстве главных напряжений S_k $(k = 1, 2, 3)$ тензора-девиатора напряжений.

Возвратимся теперь к понятиям *полной и неполной пластичности* и их связи с критериями пластичности. Назовем состоянием *полной пластичности* среды или материала такое, при котором во всех частицах реализуется напряженное состояние пространственного чистого сдвига, при котором все касательные напряжения $\sigma_{ij} = \tau$ $(i \neq j)$ достигают некоторого предельного значения k_*, т.е.

$$\sigma_{ij} = \tau = k_* \quad (i \neq j), \tag{23}$$

а модуль девиатора напряжений в силу того, что в этом случае

$$T_{\max} = T_{12} = T_{13} = \frac{3k_*}{2} = k, \quad T_{23} = 0, \tag{24}$$

равен

$$\sigma = \sigma^T = \sqrt{6}k_* = \sqrt{\frac{2}{3}}(2k). \tag{25}$$

Если на НДС пространственного чистого сдвига наложить всестороннее напряжение $\sigma_0 = \tau$, то получим напряженное состояние простого растяжения

$$\sigma_1 = 3\tau, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

При этом в материале сохранится состояние полной пластичности, а модуль девиатора напряжений будет равен

$$\sigma = \sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T. \tag{26}$$

Сравнивая (25), (26), получаем важное соотношение

$$\sigma_T = 3k_* = 2k, \tag{27}$$

откуда постоянные k_* и k могут быть выражены через предел текучести σ_T

$$k = \frac{\sigma_T}{2}, \quad k_* = \frac{\sigma_T}{3}. \tag{28}$$

Однако, Мизес оказался в своем предположении не совсем точен. При плоском чистом сдвиге возникает только одно напряжение τ. Следовательно, в предельном состоянии это $\tau = k_0$, где мы иначе обозначили предельное напряжение при плоском чистом сдвиге в отличие от $T_{\max} = k$ при пространственном чистом сдвиге. Это предельное значение k_0 легко определяется из опыта на кручение тонкостенного трубчатого образца. В то же время предельное значение k также легко, но косвенно определяется из опыта на растяжение посредством полученных формул (28).

При плоском сдвиге главные нормальные напряжения $\sigma_1 = -\sigma_3 = k_0$, $\sigma_2 = 0$, а главные касательные напряжения $T_{12} = T_{23} = k_0/2$, $T_{13} = k_0$, т.е.

$$T_{\max} = T_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k_0. \tag{29}$$

Модуль девиатора в этом же предельном состоянии

$$\sigma = \sqrt{2}k_0. \tag{30}$$

С другой стороны, в предельном состоянии при чистом растяжении $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ и модуль девиатора определяется формулой (26). Сравнивая (26) и (30) для модуля девиатора,получаем

$$k_0 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_T = \sqrt{3}k_0. \tag{31}$$

Таким образом, между критериями Мизеса и Треска–Сен-Венана обнаруживается принципиальное различие, хотя это различие и невелико, но является фундаментальным для теории пластичности. Оно указывает на то, что вид напряженного состояния материалов влияет на их механическое состояние. В работе [11] Хилл отметил, что в опытах Треска по выдавливанию металлов через матрицы распределение напряжений было неравномерным, а их анализ достаточно грубым. Это справедливое замечание дает нам повод выдвинуть гипотезу о том, что предельное напряжение в условии пластичности Треска–Сен-Венана зависит от вида напряженного состояния, связанного с состояниями полной и неполной пластичности материалов.

3. Математическая модель неполного пластического состояния. Основные уравнения этой модели были предложены Хааром и Карманом [2]. Дальнейшее развитие этого вопроса реализовано в работах Е. И. Шемякина и автора [2, 13]. В общем случае пространственного напряженного состояния и неполного пластического деформирования одно из главных касательных напряжений максимально $T_{\max} = k$, а два других $T_{mn} < k$. Главные нормальные напряжения σ_k $(k = 1, 2, 3)$ можно представить в трех вариантах. Приведем лишь один из них [13]

$$\begin{cases} \sigma_1 = \lambda\theta + G(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + k, \quad \sigma_3 = \lambda\theta + G(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - k, \\ \sigma_2 = \lambda\theta + 2G\varepsilon_2, \quad \sigma_0 = K\theta, \end{cases} \tag{32}$$

где $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – относительное изменение объема,

$$\lambda = \frac{2G\mu}{1 - 2\mu}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \tag{33}$$

– упругие модули Ламе, сдвига Кулона, Бриджмена, E – продольный модуль Эйлера–Юнга, μ – коэффициент Пуассона соответственно.

Для главных касательных напряжений имеем

$$T_{12} = \frac{k}{2} - \frac{3G}{2}Э_2, \quad T_{23} = \frac{k}{2} + \frac{3G}{2}Э_2, \quad T_{13} = T_{\max} = k, \tag{34}$$

где

$$Э_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_0 = \frac{2}{3}\left[\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\right], \quad S_2 = 2GЭ_2. \tag{35}$$

Модуль девиатора

$$\sigma = \sqrt{2}\sqrt{k^2 + 3(GЭ_2)}. \tag{36}$$

При $Э_2 = 0$ получаем случай плоского чистого сдвига

$$T_{12} = \frac{k}{2}, \quad T_{23} = \frac{k}{2}, \quad T_{13} = k, \quad \sigma = \sqrt{2}k. \tag{37}$$

Аналогичные соотношения можно получить для случаев упругого деформирования в первом и третьем главных направлениях.

Из (36) с учетом (35) следуют соотношения

$$\begin{cases} \sigma = \pm\frac{\sqrt{2}k}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)} \quad (0^\circ < \varphi < 60^\circ, 180^\circ < \varphi < 240^\circ), \\ \sigma = \pm\frac{\sqrt{2}k}{\sin\varphi} \quad (60 < \varphi < 120^\circ, 240^\circ < \varphi < 300^\circ), \\ \sigma = \pm\frac{\sqrt{2}k}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right)} \quad (120^\circ < \varphi < 180^\circ, 300^\circ < \varphi < 360^\circ). \end{cases} \tag{38}$$

Два последних соотношения модели выписаны для случая, когда материал деформируется упруго в первом и третьем направлениях.

Эти же формулы можно получить непосредственно из соотношений (4), положив в них $\sigma = \sqrt{2}k$, что подтверждает правильность математической модели неполного пластического состояния среды.

Назовем особыми точками неполной пластичности на окружности Мизеса те, которые отвечают углам вида

$$\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ.$$

В этих точках для плоских задач внешний шестиугольник касается окружности Мизеса, причем $\sigma_T = \sqrt{3}k_0$, $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T = \sqrt{2}k_0$.

4. Общий критерий пластичности. Хаар и Карман по существу предложили общий критерий сдвиговой пластичности, зависящий от двух инвариантов напряженного состояния – второго и третьего инвариантов тензора-девиатора напряжений в виде [2]

$$(T_{12}^2 - k^2)(T_{23}^2 - k^2)(T_{13}^2 - k^2) = 0. \tag{39}$$

Исторически критерий Треска-Сен-Венана (14) был первым, а критерий Мизеса (19) был вторым. Однако, критерий (39) имеет интересное продолжение на современном этапе развития теории пластичности. Перемножая скобки в (39) и используя соотношения (4), содержащее инварианты σ и φ, получаем соотношение общего критерия пластичности

$$\sin^2 3\varphi\sigma^6 - k^2[18\sigma^4 - 96k^2\sigma^2 + 128k^4] = 0 \tag{40}$$

или в свернутом виде

$$\sin^2 3\varphi\sigma^6 - 18k^2 \left[\sigma^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{3}}k\right)^2\right]^2 = 0. \tag{41}$$

Радиус окружности Мизеса на девиаторной плоскости

$$R = \sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T. \tag{42}$$

Критерии (40) либо (41) объединяют в едином соотношении критерии неполной пластичности Треска-Сен-Венана (14) и критерий полной пластичности (21) Мизеса в едином соотношении. Для пространственных задач

$$\sigma_T = 2k. \tag{43}$$

Используя (42), (43), соотношение (41) для этого типа задач преобразуем к виду

$$\sin^2 3\varphi\sigma^6 - 18k^2[\sigma^2 - (\sigma^T)^2]^2 = 0. \tag{44}$$

Если материал находится в состоянии полной пластичности, то согласно критерию Мизеса $\sigma = \sigma^T$ и из (44) следует $\sin^2 3\varphi = 0$, откуда находим углы вида напряженного состояния формоизменения

$$\varphi = 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°, \tag{45}$$

которым на окружности Мизеса соответствуют особые точки полной пластичности и в которых правильный шестиугольник Треска–Сен-Венана–Мизеса соприкасается с окружностью изнутри.

Если материал находится в условиях неполной пластичности в пространственных задачах, то $\sigma < \sigma^T$ и лучи, проведенные в девиаторной плоскости под углами φ, не проходят через особые точки полной пластичности и лежат на сторонах правильного шестиугольника Треска–Сен-Венана. В этом случае из (40), (44) можно найти модуль $\sigma < \sigma^T$. Для облегчения этой задачи можно вместо (40) использовать соотношения для каждой из сторон правильного шестиугольника Треска, соответствующих условиям $T_{ij} = \pm k$, т.е. условиям (38). В особых точках полной пластичности, согласно (42), (43) все значения $\sigma = R = \sqrt{8/3}k$.

Для плоских задач мы ввели иное значение предельного напряжения $k = k_0$. В этом случае вместо (41) получаем

$$\sin^2 3\varphi - 18k_0^2 \left[\sigma^2 - \left(\frac{2\sigma^T}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^2 = 0, \tag{46}$$

что соответствует расширению на девиаторной плоскости правильного шестиугольника Треска–Сен-Венана на 15,5% (рис. 1).

При этом новый шестиугольник в точках, соответствующих *особым точкам неполной пластичности* для плоских задач, касается окружности Мизеса при значениях угла вида φ

$$\varphi = 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°. \tag{47}$$

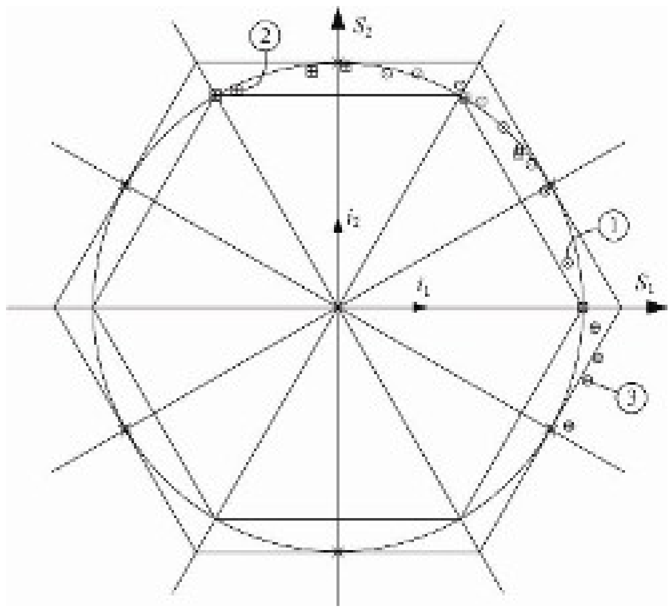

Рис. 1.

На рис. 1 на девиаторной плоскости в базисе $\{\hat{i}_k\}$ $(k = 1, 2)$ А. А. Ильюшина изображены окружность Мизеса и два правильных шестиугольника Треска–Сен-Венана, а также экспериментальные данные А. М. Жукова для стали ЭИ415, отмеченные кружками и цифрами 1, хромоникилиевой стали, отмеченные квадратами и цифрами 2, а также Тейлора и Куньи для мягкой стали, отмеченные крестами соответственно. Экспериментальные данные были получены при испытаниях трубчатых образцов, т.е. в условиях плоского напряженного состояния, описываемого внешним шестиугольником Треска–Сен-Венана. Как видно, экспериментальные данные лучше соответствуют внешнему шестиугольнику и соотношению $k_0 = \sigma_T/\sqrt{3}$, а также условию пластичности Мизеса.

Новый подход к описанию критериев пластичности, по-видимому, снимает давнюю проблему столетней давности о связи пределов текучести при чистом сдвиге и растяжении в теории пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2003. – 300 с.

[2] Теория пластичности : сборник статей. – М. : ИЛ, 1948. – 452 с.

[3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

[4] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : ИЛ, 1954. – 647 с.

[5] *Прагер, В.* Теория идеально пластических тел / В. Прагер, Ф. Ходж. – М. : ИЛ, 1956. – 308 с.

[6] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.

[7] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

[8] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

[9] *Ивлев, Д. Д.* Механика сплошных сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 446 с.

[10] *Ивлев, Д. Д.* Механика сплошных сред. Т. 2 : Общие вопросы / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2002. – 448 с.

[11] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.

[12] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 120 с.

[13] *Зубчанинов, В. Г.* Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред / В. Г. Зубчанинов // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости : сб. статей к 75-летию. – Тверь : ТГТУ, 2007. – С. 24–41.

V. G. Zubchaninov

THE GENERALISED CRITERION OF COMPLETE AND INCOMPLETE PLASTICITY OF CONTINUOUS

Tver State Technical University

Abstract. The new form of criterion of plasticity and the plastic flowing which describes states of complete and incomplete plasticity in spatial and flat problems is presented.

Keywords: invariants of tensors, stresses, strains, criteria of plasticity, complete and incomplete plasticity.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

Доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь

`e-mail:` vgz@rambler.ru

Zubchaninov Vladimir Georgievich

Dr. Eng. Sci., Professor, Head, Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver