Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 191–197

М. Н. Кирсанов

ТОЧКИ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Московский энергетический институт (технический университет)

Аннотация. Задача Коши для дифференциального уравнения обобщается на произвольный порядок производных функции, входящих в начальные условия. Дается определение точки нестабильности как условие вырождения такой постановки. Показывается существование последовательности особых точек, являющихся нулями некоторой системы функций, для которых даются рекуррентные соотношения и формула Родрига. Доказывается теорема разделения нулей. Частным случаем полученных функций являются полиномы Эрмита. На основе предложенной теории анализируется явление выпучивания идеальных реологических систем.

Ключевые слова: реология, дифференциальное уравнение, выпучивание, формула Родрига.

УДК: 517.911

1. **Обобщение задачи Коши**. Рассмотрим следующее обобщение начальной задачи для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения порядка M. Имеем уравнение

$$f(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, ...u^{(M)}) = 0, \tag{1}$$

где u — функция, t — аргумент, $\dot{u}, \ddot{u}, \ldots, u^{(M)}$ — производные по t порядков 1, 2,. . . , M. При $t = t_0$ поставим M начальных условий, каждое из которых имеет вид $u^{(k)}(t_0) = U_k,\ \ k \in N$, где $U_k \in\mathbf{R}$ — заданные числа. Классическая задача Коши следует из (1) при $k = 0, 1, \ldots, M - 1$.

2. **Точки нестабильности.** Для частного случая уравнения (1) при $M = 1$

$$\dot{u} + g(t)u = 0 \tag{2}$$

введем понятие точки нестабильности начальной задачи. Значение $t = \tau_N$ назовем точкой нестабильности порядка N, если при $t_0 \to \tau_N, \quad u^{(N)}(\tau_0) = U_N,\ u^{(i)}(\tau_0) \to \infty,\ i \neq N$, где U_N — заданное число.

Выясним геометрический смысл обобщенной задачи Коши. Если геометрический смысл классической задачи Коши состоит в выборе интегральной кривой, проходящей на плоскости u, t через точку $u = u_0, \quad t = t_0$, то в обобщенной задаче из всех интегральных кривых, пересекающих прямую $t = t_0$, требуется выбрать ту, у которой в точке пересечения удовлетворяется условие $u^N(\tau_0) = U_N$. Например, при $N = 1$, требуется найти интегральную кривую, пересекающую прямую $t = t_0$ под заданным углом. Одновременно становится понятным смысл точки нестабильности: если при $t_0 \to \tau$ ордината пересечения стремится к бесконечности, то точка τ — нестабильная.

Поступила 12.10.2010

2.1. Первый способ определения точек нестабильности состоит в использовании вида интегральной кривой уравнения (2)

$$u = U_0 \exp(-A), \quad A = \int\limits_{t_0}^{t} g dt. \tag{3}$$

Дифференцируя (3), получим последовательно

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -U_0 g \exp(-A), \\ \ddot{u} &= U_0 (g^2 - \dot{g}) \exp(-A), \\ &..., \\ u^{(k)} &= (-1)^k U_0 B_k \exp(-A), \end{aligned} \tag{4}$$

где $B_0 = 1, \quad B_1 = g, \quad B_2 = g^2 - \dot{g}$. Как легко видеть, функции $B_k(t)$ образуются по правилу

$$B_{k+1} = B_k g - \dot{B}_k. \tag{5}$$

Пусть задана начальная производная порядка N

$$u^{(N)}(t_0) = U_N = (-1)^N U_0 B_N. \tag{6}$$

Исключая U_0 из (6) и (4) при $t = t_0$, получим

$$u^{(k)}(t_0) = (-1)^{k-N} (B_k / B_N) U_N.$$

Значение $u^{(k)}(t_0)$ стремится к бесконечности при $t_0 \to \tau_N$, где τ_N — нули функции B_N . Следовательно, точки нестабильности определяются корнями уравнений $B_N = 0$.

Из (4) следует, что точка нестабильности τ_N обобщенной начальной задачи имеет еще и другой смысл. Для любого значения $t_0 = \tau_N$ начальное значение производной $u^{(N)}(t_0)$ можно задавать произвольным, при этом решение поставленной задачи не будет отличаться от классической задачи Коши, при соответствующем выборе самой функции $u(t_0)$. При $t_0 = \tau_N$ свобода выбора значения $u^{(N)}(t_0)$ исключена, так как согласно (4) в особой точке это значение равно нулю. Следовательно, обобщенная задача Коши не может быть поставлена иначе как с нулевым начальным условием. Такое свойство можно принять за альтернативное определение точки нестабильности.

2.2. Второй способ позволяет найти точки нестабильности непосредственно по дифференциальному уравнению, не используя его интеграла. Последовательно дифференцируя (2), получим систему N уравнений для переменных $u, \dot{u}, \ddot{u}, \ ..., u^{(N)}$

$$\begin{aligned} & ug + \dot{u} = 0, \\ & u\dot{g} + \dot{u}g + \ddot{u} = 0, \\ & u\ddot{g} + 2\dot{u}\dot{g} + \ddot{u}g + u^{(3)} = 0, \\ & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ & ug^{(N-1)} + (N-1)\dot{u}g^{(N-2)} + .. + C_i^{n-1} u^{(i)} g^{(N-1-i)} + ... + u^{(N)} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Принимая $u^{(N)}$ за известную величину и относя ее в правую часть, получим систему N уравнений для N переменных $u^{(i)}, \ i = 0, 1, ..N-1$, определитель которой равен B_N. Таким образом, в нулях функций B_N связь между производными вырождается, что и определяет точки нестабильности.

Запишем матрицу системы (7), ограничиваясь для иллюстрации $N = 4$

$$\begin{bmatrix} g & 1 & 0 & 0 \\ \dot{g} & g & 1 & 0 \\ \ddot{g} & 2\dot{g} & g & 1 \\ g^{(3)} & 3\ddot{g} & 3\dot{g} & g \end{bmatrix}$$

Раскрывая определитель матрицы по элементам последнего столбца, получим

$$B_4 = g^4 - 6g^2\dot{g} + 3\dot{g}^2 + 4\ddot{g}g - g^{(3)} = gB_3 - 3\dot{g}B_2 + 3\ddot{g}B_1 - g^{(3)}B_0, \quad (8)$$

где $B_3 = g^3 - 3g\dot{g} + \ddot{g}$. Соотношение (8) легко обобщить на произвольный порядок системы

$$B_{N+1} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k C_k^N g^{(k)} B_{N-k}. \quad (9)$$

Введем весовую функцию $Q(t)$

$$B_i = (-1)^i h(t) Q^{(i)}, \quad (10)$$

где $h(t)$ — некоторая вспомогательная функция. Подставим (15) в (14) и воспользуемся формулой Лейбница для N-й производной произведения двух функций. Получим

$$Q^{(N+1)} = -(gQ)^{(N)}. \quad (11)$$

Интегралом (16) является соотношение

$$Q = Q_0 \exp(-A). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (15) и выбирая $h = \exp(A)/Q_0$, получим формулу Родрига, задающую функции B_N

$$B_N = \exp(A)(-1)^N \frac{d^N}{dt^N}(\exp(-A)). \quad (13)$$

При $g = 2t$ имеем, согласно (3), $A = t^2$. Из (13) следует определение ортогональных полиномов Эрмита [1].

Формула (14) допускает дальнейшее обобщение. Рекурсивное использование (5) дает последовательно

$$B_{N+1} = B_N g - \dot{B}_N = B_{N-1}B_2 - 2B_1\dot{B}_{N-1} + B_0\ddot{B}_{N-1} =$$
$$= ... = \sum_{k=0}^{M}(-1)^k C_k^M B_{N-M+1}^{(k)} B_{M-k}.$$

При $N = M$ имеем формулу (14), при $M = 1$ — формулу (5).

2.3. Докажем теорему разделения нулей функций B , упорядочивающую точки нестабильности.

ТЕОРЕМА. *Между точками нестабильности порядка N (если они существуют) лежит по крайней мере одна точка порядка* $N + 1$: $\tau_{N,1} < \tau_{N+1} < \tau_{N,2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (5) представляет собой линейное дифференциальное уравнение для B_N. Предположим, что функция B_N имеет два нуля $\tau_{N,1}$ и $\tau_{N,2}$. Выпишем решение (6) с начальным условием $B_N = 0$, поставленным при $t = \tau_{N,1}$

$$B_N(t) = \exp(A) \int_{\tau_{N,1}}^{t} B_{N+1}(t)\exp(-A)dt,$$

где $A = \int\limits_{\tau_{N,1}}^{t} gdt$. Если взять здесь в качестве аргумента второй корень уравнения $B_N = 0$, $t = \tau_{N,2}$, то интеграл от функции B_{N+1} (с положительным множителем $\exp(-A)$) на интервале от $\tau_{N,1}$ до $\tau_{N,2}$ оказывается равным нулю. Следовательно, эта функция, являясь непрерывной, меняет знак, пересекая ось t между $\tau_{N,1}$ и $\tau_{N,2}$. Таким образом, корень уравнения $B_{N+1} = 0$ лежит в этом интервале, что и требовалось доказать.

3. **Линейное дифференциальное уравнение порядка** M. Для дифференциального уравнения порядка выше первого точка нестабильности имеет мультииндексный порядок, представляющий собой множество $K = \{k_1, k_2, ..., k_M\}$ мощности M.Элементы множества —

порядки тех производных, которые задаются в начальных условиях. Воспользуемся вторым способом получения точек нестабильности. Имеем дифференциальное уравнение

$$u^{(M)}h_M(t) + ... + u^{(i)}h_i(t) + ... + \ddot{u}h_2(t) + \dot{u}h_1(t) + uh_0(t) = 0, \qquad (14)$$

Последовательно дифференцируя исходное уравнение (14), составим систему N уравнений. Запишем ее в виде

$$\{H\}\bar{U} = 0, \qquad (15)$$

где $\bar{U} = \{u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots, u^{N+M-1}\}$. Матрицу $\{H\}$, размером $N\times(N+M)$, которую будем называть *основной* матрицей уравнения (14), представим в виде суммы

$$\{H\} = \sum_{i=0}^{M}\{H_i\}. \qquad (16)$$

Матрица $\{H_i\}$ отвечает функции $h_i(t)$ и имеет структуру (на примере $N = 4$)

$$\{H_i\} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & h_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \dot{h}_i & h_i & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ddot{h}_i & 2\dot{h}_i & h_i & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & u^{(3)} & 3\ddot{h}_i & 3\dot{h}_i & h_i & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Ненулевые столбцы матрицы имеют номера от $i+1$ до $i+N-1$. В этой матрице k-я строка представляет собой коэффициенты при производных u^m, $m = i, ..., i+k-1$ в формуле Лейбница для $k-1$-й производной произведения $h_i(t)u^i$.

Предположим, что в начальных условиях заданы M производных функции u, номера которых составляют множество K, где

$$\max k_i \le N + M. \qquad (18)$$

(Если последнее неравенство не выполняется, то для получения точек нестабильности с требуемым порядком K, следует увеличить число N уравнений системы.) Остальные производные выражаются через заданные с помощью системы (15). Перенесем заданные величины в правую часть системы. Матрица полученной системы образуется из основной матрицы вычеркиванием столбцов с номерами k_i, $i = 1, \ldots, M$. Особая точка находится из равенства нулю определителя этой матрицы. Методом индукции легко показать, что точка нестабильности не зависит от N, если только N удовлетворяет неравенству (18). При доказательстве используется тот факт, что увеличение N на 1 соответствует приписыванию матрице дополнительной строки и столбца, причем все элементы столбца, кроме последнего $(h_M(t))$ равны нулю. Разложение определителя увеличенной матрицы по элементам этого столбца доказывает совпадение определителя размером N и $N+1$, если $h_M \neq 0$.

Рассмотрим случай $\max k_i = M$. Пусть $K = \{0, 1, 2\ldots, j-1, j+1, \ldots, M-1, M\}$. Докажем, что точка нестабильности порядка K определяется из равенства $h_j = 0$, если $h_M \neq 0$. Из (17) следует, что последние N столбцов основной матрицы $N \times (N+M)$ образуют нижнюю треугольную матрицу. Для получения матрицы, равенство нулю определителя которой задает точку нестабильности искомого порядка, необходимо в этой треугольной матрице заменить первый столбец на столбец с номером j. Первый элемент столбца j равен h_j. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов: $h_j h_M^{N-1}$. Отсюда и следует доказываемое утверждение.

4. **Приложение в механике. Выпучивание сжатого стержня в условиях нелинейной ползучести.** Рассмотрим прямолинейный шарнирно опертый стержень длиной l, сжатый постоянной по времени осевой силой T. Материал стержня подчиняется определяющему соотношению

$$\dot{p}p^{\alpha} = f(\sigma), \qquad (19)$$

$p = \varepsilon - \sigma/E$ — деформация ползучести, $\dot{p} = dp/dt$; σ, ε — напряжение и деформация; α, E — параметр упрочнения и модуль упругости; $f(\sigma)$ — функция, показывающая зависимость

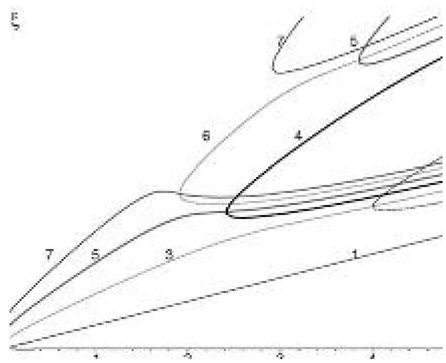

Рис. 1. Корни полиномовb_N

деформации ползучести от уровня напряжений. Под действием некоторого возмущения стержень примет форму, отличную от прямолинейной, а напряжения и деформации ползучести получат малые приращения $\Delta\sigma$ и Δp, удовлетворяющие линеаризованному соотношению (19)

$$p^{\alpha}\Delta\dot{p} + \alpha\dot{p}p^{\alpha-1}\Delta p = f'\Delta\sigma,$$

$(f' = df/d\sigma)$. Пользуясь гипотезой плоских сечений и уравнением равновесия, получим отсюда дифференциальное уравнение для амплитуды U прогиба, представленного в виде $\Delta v = U\sin\mu y, (\mu = m\pi/l;\ \mu$ — число полуволн по длине стержня) [3]

$$(\alpha - \xi)(\dot{p}/p)U + \dot{U} = 0. \tag{20}$$

Здесь введена величина ξ, монотонно связанная со временем t

$$\xi = p(f'/f)E\sigma/(\sigma_E - \sigma),$$

$(\sigma_E = EJ\mu^2/\Omega$ — критическое напряжение упругого стержня [2]. Кривая ползучести $p(t) = [(1+\alpha)tf]^{1+\alpha}$ получается интегрированием (19) при $\sigma =$const.

Найдем точки нестабильности обобщенной задачи Коши, для уравнения (20). Начальные условия, поставленные для высших производных U, соответствуют специальным возмущениям прогиба. Опуская выкладки, по рекуррентному соотношению (5), где $g = (\alpha - \xi)\dot{p}/p$, получим функции B_N, которые удобно записать в виде полиномов по ξ. Полиномы отличаются множителем: $B_N = (-\dot{p}/p)^N b_N$. Выпишем первые четыре полинома:

$$\begin{aligned}
&b_1 = \xi - \alpha,\\
&b_2 = \xi^2 - 3\xi\alpha + \alpha(2\alpha+1),\\
&b_3 = \xi^3 - 6\alpha\xi^2 + \alpha(4+11\alpha)\xi - \alpha(2\alpha+1)(3\alpha+2),\\
&b_4 = \xi^4 - 10\alpha\xi^3 + 5\alpha(2+7\alpha)\xi^2 - 5\alpha(2\alpha+1)(5\alpha+2)\xi + \alpha(2\alpha+1)(3\alpha+2)(4\alpha+3).
\end{aligned}$$

На рисунке 1 показаны корни этих полиномов в зависимости от параметра упрочнения материала. Цифра у кривой соответствует степени полинома. Для малых α четные полиномы корней не имеют. Здесь же наглядно проявляется и теорема о разделении корней.

Точки нестабильности процесса осевого нагружения стержня связаны со значениями величины ξ. Каждая такая точка определяет некоторую кривую $\sigma(t)$, проходящую через точку $\sigma = \sigma_E, \quad t = 0$, которая соответствует мгновенной потере устойчивости при достижении эйлеровой критической нагрузки упругого стержня. Зная уровень приложенного напряжения, можно вычислить опасные моменты $t = \tau_N \quad (N = 1, 2, ..)$, в которых, в соответствии с определением точек нестабильности, возмущение N-х производных прогиба вызывает выпучивание — бесконечные прогибы в момент возмущения. При $\alpha = 0$ точек нестабильности нет, т.к. функция $g(t)$ в этом случае является константой: $g = f'E\sigma/(\sigma - \sigma_E)$. Численный счет [4] показывает близость теории и эксперимента.

Точки нестабильности процесса деформирования в стержнях определялись в [3] (второй способ) и [5] (первый способ). Асимптотика решений при $\alpha \to \infty$ исследована в [3]. В [4] исследовалась стабильность движения механической системы — кулисного механизма. Математическая модель нестабильности при обработке полимерных материалов точением на основе работы [6] разработана в [7,8].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бейтман, Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – 296 с.

[2] *Клюшников, В. Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем / В. Д. Клюшников. – М. : Изд-во МГУ, 1986. – 240 с.

[3] *Kirsanov, M. N.* Singular points of the creep deformation and buckling of a column / M. N. Kirsanov // Int. J. Eng. Sci. – 1997. – Vol. 5, №. 3. – P. 221–227.

[4] *Кирсанов, М. Н.* О реакции сжатого стержня на возмущение высших производных прогиба в условиях ползучести / М. Н. Кирсанов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 1. – С. 43–47.

[5] *Кирсанов, М. Н.* Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести / М. Н. Кирсанов // ПМТФ. – 1993. – № 2. – С. 152–156.

[6] *Кирсанов, М. Н.* Определение и анализ стабильности движения с использованием системы Maple / М. Н. Кирсанов // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – № 3–4. – 2004. – С. 134–137.

[7] *Еренков, О. Ю.* Стабильность технологической системы при точении полимерных материалов / О. Ю. Еренков, А. Г. Ивахненко, Е. О. Ивахненко // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2008. – № 3–7. – С. 14–23.

[8] *Еренков, О. Ю.* Математическая модель нелинейних колебаний и определение условий нестабильности технологической системы при точении / О. Ю. Еренков, А. Г. Ивахненко // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2010. – № 1. – С. 67–71.

M. N. Kirsanov

POINTS OF INSTABILITY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Moscow Power Engineering Institute (Technical University)

Abstract. Cauchy problem for differential equations can be generalized to arbitrary order derivatives of functions included in the initial conditions. The point of instability, defined as a condition of degeneracy of such statement. The existence of sequence of singular points that are zeros of some system functions is proved. Given recurrence relation and the formula Rodrigues. The theorem of separation of zeros is proved. Special case obtained functions are Hermite polynomials. Based on the proposed theory examines the phenomenon of buckling of ideal rheological systems.

Keywords: rheology, differential equation, buckling, Rodrigues formula.

Кирсанов Михаил Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники Московского энергетического института (технического университета)

`e-mail:` mpei2004@yandex.ru

Kirsanov Michail Nikolaevich

Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Moscow Power Engineering Institute (Technical University)