Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 49–64

В. Е. Рагозина[1], *Ю. Е. Иванова*[1,2]

О РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДАХ АДАПТАЦИИ СХЕМЫ ЛУЧЕВЫХ ПРИФРОНТОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕД

[1]*Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток*

[2]*Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток*

Аннотация. На примере нескольких одномерных осесимметричных задач ударной деформации упругих сред показаны возможности применения двух вариантов модификации лучевого метода, который, как известно, в своем стандарте не может использоваться для нелинейных процессов, включающих поверхности разрывов первых производных. Представленные в статье варианты метода позволяют снять это ограничение. Показаны особенности применения лучевых рядов для движения в среде одиночной ударной волны, а также для процесса, приводящего к образованию нескольких ударных волн, различных по типу, включая образование отраженных ударных волн и их последующее взаимодействие с передними фронтами первоначально созданных процессов. Отдельно рассмотрен вопрос построения лучевых рядов для времен после взаимодействия падающих и отраженных ударных волн, происходящего внутри слоя упругой среды.

Ключевые слова: нелинейно-упругая среда, ударная деформация, лучевые ряды, осесимметричные задачи, квазипродольные и квазипоперечные ударные волны

УДК: 539.3

Введение. Ударной динамике нелинейно-упругих сред посвящено значительное число исследований [1], [2]. Известно, что применение прифронтовых лучевых решений в различных версиях метода является одним из наиболее эффективных методов в динамике деформаций [3]. В частности, лучевой метод применялся в задачах идеальной пластичности для гиперболической системы ее уравнений [4], в динамике вязкоупругих сред [5], к задачам динамики в теории упругости [6], [7]. В случае динамических процессов, вызванных кратковременными интенсивными нагрузками, по среде движутся волны деформации, передние фронта которых — поверхности разрыва первых производных перемещений. Для этих задач теряется возможность применения классической схемы лучевого метода за счет нарушения рекуррентности бесконечной цепочки дифференциальных уравнений затухания. Для того, чтобы скорректировать эту ситуацию, в настоящее время есть несколько вариантов модификации лучевой схемы: в одном из них применяются дополнительные встроенные ряды для скачков производных перемещений, через которые задаются коэффициенты лучевого ряда. В другом варианте

Поступила 10.03.2015

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14–01–31030 мол_а).

применяются дополнительные сведения о неизвестных скачках, следующие из слабой нелинейности задачи. В предлагаемой статье на примере осесимметричных одномерных задач ударной деформации рассмотрены оба названных метода.

1. Модельные соотношения нелинейно-упругой изотропной среды и краевые условия на ударных волнах. Поведение нелинейно-упругого материала в пространственной криволинейной системе координат Эйлера x^i $(i = 1, 2, 3)$ определяется системой уравнений

$$
\begin{gathered}
\rho = \rho_0 \det\left(\delta^i_j - u^i_{,j}\right), \quad v^i = \dot u^i + u^i_{,j} v^j, \quad \sigma^{ij}_{,j} = \rho(\dot v^i + v^i_{,j} v^j),\\
2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u^k_{,j}, \quad \sigma^i_j = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha^j_k}\left(\delta^i_k - 2\alpha^i_k\right),\\
W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \xi I_2^2 + \eta I_1^2 I_2 + \varkappa I_1 I_3 + \chi I_1^4 + \ldots \qquad (1.1)\\
I_1 = \alpha^i_i, \quad I_2 = \alpha^i_j \alpha^j_i, \quad I_3 = \alpha^i_j \alpha^j_k \alpha^k_i,\\
\dot u^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \Gamma^k_{ij} u_k, \quad u^i,j = \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \Gamma^i_{jk} u^k, \quad \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j\\ 0, & i \neq j\end{cases},
\end{gathered}
$$

где ρ и ρ_0 плотность среды в текущем и свободном состоянии, u^i и v^i контравариантные компоненты векторов перемещений и скорости среды, α_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси, σ^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений Эйлера–Коши, W — функция упругого потенциала среды, λ, μ l, m, n, ξ, η, $\varkappa$, χ — упругие модули среды.

Для задач ударного деформирования система уравнений (1.1) имеет место всюду, за исключением поверхностей разрывов, где большие изменения градиента перемещений заменяются его разрывным представлением. На ударных волнах (поверхностях сильных разрывов) искомые поля подчиняются геометрическим, кинематическим и динамическим условиям совместности [8, 9]:

$$
\begin{gathered}
[f_{,i}] = \left[\frac{df}{dn}\right] n_i + g_{ij} a^{\alpha\beta} [f]_{,\beta} x^j_{,\alpha}, \quad [\dot f] = -G\left[\frac{df}{dn}\right] + \frac{\delta [f]}{\delta t},\\
\left[\rho(v^i n_i - G)\right] = 0, \quad [\sigma^{ij}] n_j = \rho^+ (v^{j+} n_j - G)[v^i],\\
\sigma^{ij+}[v_i] n_j = \rho^+(v^{j+} n_j - G)\left(\frac{[v^i][v^i]}{2} - [e]\right) - [q^j] n_j \qquad (1.2)\\
\frac{df}{dn} = f_{,i} n^i, \quad x^j_{,\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial y^\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = g_{ij} x^i_{,\alpha} x^i_{,\beta},\\
a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2.
\end{gathered}
$$

Квадратными скобками обозначен разрыв заключенной в них величины, так что $[a] = a^+ - a^-$, где a^+ и a^- — предельные значения a при подходе к поверхности разрывов Σ с двух разных сторон, n_i — компоненты вектора единичной внешней нормали, направленной в сторону движения Σ, G — скорость поверхности Σ в направлении нормали, q_j — компоненты вектора теплового потока, e — плотность внутренней энергии, y^α — координаты на подвижной поверхности, g_{ij} — ковариантная метрика пространства, $a_{\alpha\beta}$ — ковариантный поверхностный тензор, $\delta/\delta t$ — дельта - производная по Томасу [9], f — обозначение компоненты любого тензорного поля, задаваемого в пространстве.

На основании соотношений (1.2) могут быть получены возможные скорости ударных волн и указан характер изменения деформационных полей на них [2]. Отметим, что для нелинейных процессов в общем случае воздействие на среду передается тремя волнами: квазипродольной и двумя квазипоперечными [2]. Скорости этих волн оказываются функциями вектора интенсивности разрыва и предварительных деформаций. Поэтому в общем случае решение краевых задач включает в себя не только определение полей перемещений, деформаций и напряжений за волновыми фронтами, но и определение геометрических характеристик этих фронтов.

2. Различные варианты представления лучевого решения одномерной задачи о расходящейся цилиндрической ударной волне. В качестве примера, который позволит показать основные особенности предлагаемой далее методики решения, рассмотрим одномерную задачу о продольной цилиндрической ударной волне. В результате нормального воздействия на поверхность L_0 (границу цилиндрической полости в неограниченном пространстве или границу цилиндра исходного радиуса r_0) с начального момента времени в предварительно недеформированной среде возникает расходящаяся продольная ударная волна. Поле перемещений таково, что $u_r = u_r(r;t)$, $u_\varphi = u_z = 0$, где r, φ, z — цилиндрические координаты. В этом случае следствием системы (1.1) будет уравнение

$$\begin{gathered}
u_{r,rr}\left(1 + A_1 u_{r,r} + A_2\frac{u_r}{r}\right) + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + A_3\frac{u_{r,r}^2}{r} + A_4\frac{u_r^2}{r^3} + \frac{u_{r,r}u_r}{r^2} = \\
= \frac{1}{C_1^2}\left\{\ddot{u}_r\left(1 - 2u_{r,r} - \frac{u_r}{r}\right) + 2\dot{u}_r\dot{u}_{r,r} + \ldots\right\}, \\
A_1 = -9 + 6\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}, \quad A_2 = \frac{-4\lambda - 2\mu + 2l + 6m}{\lambda+2\mu}, \\
A_3 = \frac{-8\lambda - 13\mu + 6l + 12m + 3n}{\lambda+2\mu}, \quad A_4 = \frac{5\lambda + 7\mu - 2l - 3n}{\lambda+2\mu}, \quad C_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Считаем, что на границе $L(t)$ поле перемещений известно и может быть задано рядом Тейлора

$$\begin{gathered}
u_r|_{r_L} = g(t), \quad r_L = r_0 + g(t), \\
g(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^k g(0)}{dt^k}t^k = v_0 t + \frac{at^2}{2} + \cdots, \quad v_0 \neq 0, \quad t \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Для сокращения приводимых вычислений в дальнейшем ограничимся квадратичным представлением.

Скорость переднего фронта продольной ударной волны $\Sigma(t)$ при отсутствии в среде предварительных деформаций в соответствии с (1.2) задается формулой

$$\begin{gathered}
G = C_1\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\tau^k \approx C_1\left(1 + \beta_1\tau + \beta_2\tau^2\right), \quad \tau = [u_{r,r}] = u_{r,r}^+ - u_{r,r}^-, \\
\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = \frac{9}{4} - \frac{3(l+m+n)}{2(\lambda+2\mu)} = -\frac{A_1}{4}, \\
\beta_2 = \frac{9}{4} - 6\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu} + 2\frac{\chi+\xi+\eta+\varkappa}{\lambda+2\mu} - \frac{(1-\beta_1)^2}{2}.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

На поверхности $\Sigma(t)$ выполняются краевые условия

$$u_r|_{r_\Sigma} = 0, \quad \tau|_{r_\Sigma} = -u_{r,r}^-, \quad r_\Sigma = r_0 + \int_0^t G(\xi)d\xi. \tag{2.4}$$

Условия (2.4) заданы на подвижной поверхности $r_\Sigma(t)$, положение которой заранее неизвестно и входит в число определяемых в ходе решения величин. В общем случае неизвестной оказывается и геометрия волновой поверхности, но в рассматриваемом простом случае неизвестным оказывается только положение цилиндрической поверхности разрывов.

Ввиду нелинейности уравнения движения и граничных условий краевая задача (2.1)–(2.4) не может быть решена точно. Поэтому появляется необходимость обращения к приближенным аналитическим методам. Для определения решения поставленной задачи воспользуемся одним из вариантов метода лучевых разложений.

Полагаем, что в области, прилегающей к поверхности $\Sigma(t)$, поле перемещений достаточно гладкое и допускает частное дифференцирование по времени до произвольного k-го порядка. Искомое решение для $u_r(r,t)$ представим лучевым рядом

$$u_r(r,t) = \begin{cases} u_r^0(r,t) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left.\dfrac{\eta_k}{k!}\right|_{t_\Sigma(r)} (t - t_\Sigma(r))^k, & t \geqslant t_\Sigma \\ u_r^0(r,t), \quad t \leqslant t_\Sigma \end{cases}, \tag{2.5}$$
$$t_\Sigma = \int_{r_0}^{r} \frac{d\xi}{G(\xi)}, \quad \eta_i = \left[\frac{\partial^i u_r}{\partial t^i}\right],$$

где $u_r^0(r,t)$ — заданное известное поле перемещений перед волной $\Sigma(t)$, $t_\Sigma(r)$ — уравнение эйконала. Для рассматриваемого случая $u_r^0(r,t) = 0$. Ряд (2.5) подобен ряду Тейлора, но его коэффициенты η_i вычисляются на подвижной поверхности $\Sigma(t)$. Если считать, что в малой окрестности поверхности $\Sigma(t)$ справедливы уравнения движения и следствия их дифференцирования по времени до k-го порядка, то, записывая полученные уравнения в разрывах на поверхности $\Sigma(t)$, получаем рекуррентные соотношения

$$\frac{\delta\eta_{i+1}}{\delta t} = f_{i+1}\left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{i+2}, r_\Sigma(t)\right), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{2.6}$$

где $i = 0$ соответствует исходным уравнениям движения в разрывах. Наличие в системе (2.6) величины η_{i+2} в качестве аргумента — отличительная особенность ударной волны. Это считается ограничением применимости лучевого метода. Если бы рассматривались волны ускорений, то в число аргументов в соотношениях (2.6) не входила бы величина η_{i+2}. Тогда равенства (2.6) можно было бы рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений, а значения η_i определились бы последовательным ее интегрированием.

Для ударных волн был предложен [10] вариант лучевого метода, в котором для искомых величин η_i строятся дополнительные разложения по δ-производным для малых послеударных времен

$$\eta_i \approx \eta_{i0} + \frac{\delta\eta_{i0}}{\delta t}t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2\eta_{i0}}{\delta t^2}t^2 + \ldots, \qquad \left.\frac{\delta^k\eta_i}{\delta t^k}\right|_{t=0} = \frac{\delta^k\eta_{i0}}{\delta t^k}. \tag{2.7}$$

Разложения (2.7) позволяют свести равенства (2.6) к системе алгебраических соотношений, связывающих основные новые неизвестные — коэффициенты внутренних рядов (2.7). Такое предположение ограничивает область применимости представления (2.5) очень малыми временами. Действительно, ненулевая кривизна ударной волны сама является быстро изменяющейся со временем функцией и входит в уравнение (2.6), оказывая наибольшее влияние на изменение $\delta\eta_{i+1}/\delta t$. Применение рядов (2.7) приводит к тому, что кривизна считается постоянной величиной, определяемой геометрией нагружаемой поверхности. Это связано с тем, что при ненулевой кривизне волнового фронта даже при малых послеударных временах степенные зависимости (2.7) не всегда хорошо отражают динамику изменения η_i.

Далее рассмотрим другой вариант лучевого метода, связанный с предположением о слабой нелинейности задачи. В этом случае следует ожидать, что ее решение будет незначительно отличаться от решения аналогичной линеаризованной задачи. Поэтому в системе (2.6) заменим неизвестную функцию η_{k+2} на решение линеаризованной задачи для соответствующего шага. При учете сделанного предположения система (2.6) станет замкнутой системой для определения величин η_1, $\eta_2, \ldots$, η_{i+1}.

Рассмотрим реализацию описанной выше схемы на примере расходящейся от поверхности $r = r_0$ продольной волны. Для соответствующей линейной задачи получим

$$\eta_1^L = \frac{\eta_{10}}{s}, \quad \eta_2^L = \frac{\eta_{20}}{s} - \frac{3C_1\eta_{10}\left(s^2 - 1\right)}{8r_0 s^3}, \quad s = \sqrt{1 + \frac{C_1 t}{r_0}} \tag{2.8}$$
$$\eta_1^L(0) = \eta_{10} = -v_0, \quad \eta_2^L(0) = \eta_{20} = -a.$$

При выборе квадратичного закона движения $L(t)$ в лучевом ряде (2.5) достаточно ограничиться первыми двумя слагаемыми, что позволяет свести лучевой метод к записи исходного уравнения движения (2.1) в разрывах на поверхности $\Sigma(t)$

$$\frac{\delta\eta_1}{\delta t}=\frac{-2\beta_1\eta_2\eta_1C_1^{-1}-G(t)\eta_1r_\Sigma^{-1}(t)-\alpha_4\eta_1^2r_\Sigma^{-1}(t)}{2\left(1-\gamma\eta_1C_1^{-1}\right)}+\ldots,\quad \gamma=1+\frac{7\beta_1}{2},\tag{2.9}$$

где многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высокой степенью нелинейности. В уравнение (2.9) входят неизвестная функция $r_\Sigma(t)$ и величины, меняющиеся в широком диапазоне от $G(t)>>1$ до $\eta_1C_1^{-1}<<1$. Примем $\eta_2\approx\eta_2^L$ и дополним уравнения (2.9) уравнением

$$\frac{\delta r_\Sigma}{\delta t}=G(t),\tag{2.10}$$

в котором G зависит от η_1 в соответствии с соотношениями (1.2),(2.3).

Решение системы (2.9),(2.10) будем искать с помощью метода малого параметра. Введем безразмерную неизвестную функцию $\omega(s)=\eta_1\eta_{10}^{-1}$, которую представим асимптотическим рядом по степеням малого параметра $\varepsilon=\eta_{10}C_1^{-1}$:

$$\omega(s)=\omega_0(s)+\varepsilon\omega_1(s)+\varepsilon^2\omega_2(s)+\ldots.$$

Подстановка этого ряда в уравнения (2.9), (2.10) позволяет получить

$$\begin{gathered}\omega\approx\omega_0+\varepsilon\omega_1=\frac{1}{s}+\varepsilon\left\{\frac{-\beta_1A\left(s^2-1\right)}{s}-\frac{\varphi}{s^2}-\frac{\beta_1}{s^3}-\frac{\gamma+A_3}{s}\right\},\\ r_\Sigma\approx r_0+C_1t+2\varepsilon r_0\beta_1\left(1-s\right),\quad \varphi=-\gamma-\beta_1-A_3,\quad A=\frac{\eta_{20}r_0}{\eta_{10}C_1}\sim1.\end{gathered}\tag{2.11}$$

Функция $\omega_0(s)$ соответствует решению линейной задачи, а ω_1 — поправка к нему. Решение (2.11) справедливо вплоть до области, где $s\sim\varepsilon^{-1/4}$. При $s\sim\varepsilon^{-1/4}$ ряд (2.11) теряет равномерность и необходимо дополнительное разложение. В рассматриваемой задаче ограничимся масштабом $s\sim1$.

Обращая ряд $r_\Sigma(t)$, получим приближенную зависимость для $t_\Sigma(r)$:

$$t_\Sigma=\frac{1}{C_1}\left\{r-r_0+2r_0\frac{\eta_{10}}{C_1}\beta_1\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}-1\right)\right\}+\ldots\tag{2.12}$$

Для определения перемещений $u_r(r,t)$ подставим (2.11), (2.12) в ряд (2.5):

$$\begin{gathered}u_r=-\eta_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{H(r)}}+\frac{\eta_{10}}{C_1}\left[\frac{\beta_1\eta_{20}I(r)}{\eta_{10}\sqrt{H(r)}}-\frac{\varphi}{H(r)}-\frac{\beta_1}{H^{3/2}(r)}-\right.\right.\\ \left.\left.\frac{\gamma+A_3}{\sqrt{H(r)}}\right]\right\}(t+I(r))-\frac{\eta_{20}}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{H(r)}}+\frac{3C_1^2\eta_{10}I(r)}{8r_0^2\eta_{20}H^{3/2}(r)}\right\}(t+I(r))^2-\ldots,\\ H(r)=\frac{r}{r_0}+2\varepsilon\beta_1\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}-1\right),\quad I(r)=\frac{r_0}{C_1}\left(1-H(r)\right).\end{gathered}\tag{2.13}$$

Постоянные η_{10}, η_{20} получим, подставив решение (2.13) в краевое условие (2.2). Структура решения (2.13) и приближенная методика его получения не позволяют точно выполнить краевое условие. Подставляя выражение $r_L(t)$ в решение (2.13) и раскладывая результат в ряд Тейлора для малых времен, находим

$$\eta_{10}=-\frac{v_0}{1-v_0C_1^{-1}}$$

$$\eta_{20}=\left\{-a-\frac{v_0^2}{r_0}-\frac{v_0C_1^{-1}}{2}\left(a-\frac{v_0^2}{r_0}\left(-1+\gamma+A_3\right)\right)\right\}\frac{1}{1+2v_0C_1^{-1}}+\ldots$$

Отметим, что нет необходимости ограничиваться в решении (2.13) первыми двумя слагаемыми. Решение соответствующей линейной задачи лучевым методом легко строится до произвольного k–го порядка. Замена η_k линейным аналогом позволяет снизить погрешность, вносимую в решение линейным приближением для η_2. Для η_1, $\eta_2,\ldots,\eta_{k-1}$ получаемая система нелинейных дифференциальных уравнений также может быть решена на основе метода малого параметра.

3. Лучевое решение задачи об ударных волнах в цилиндрическом слое. В качестве модельного примера применения модифицированного лучевого метода к динамическим задачам с несколькими ударными волнами рассмотрим одномерную задачу с осевой симметрией о действии ударной нагрузки на внешней границе цилиндрического слоя нелинейно-упругого материала. Первоначально недеформированный слой занимает область $r_0 \le r \le R$. С момента $t = 0$ в результате ударного нагружения на внешней границе становятся известными граничные перемещения:

$$\begin{gathered} u_r|_{r=R+g(t),\,t\ge 0} = g(t) = g_0 t + \frac{g_1 t^2}{2} + \ldots, \\ u_z|_{r=R+g(t),\,t\ge 0} = h(t) = h_0 t + \frac{h_1 t^2}{2} + \ldots, \\ u_r|_{t\le 0} = u_\varphi|_{t\le 0} = u_z|_{t\le 0} = 0, \quad g_0 < 0, \quad h_0 > 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

На внутренней границе $r = r_0$ задано условие жесткого закрепления:

$$u_r|_{r=r_0} = u_\varphi|_{r=r_0} = u_z|_{r=r_0} = 0.$$

Предполагаем, что следствием таких условий будут перемещения $u_r = u_r(r,t)$, $u_z = u_z(r,t)$, $u_\varphi = 0$. Из условий совместности (1.2) с учетом модельных соотношений (1.1) следует, что для поставленной задачи возможны два варианта ударных волн. Первая из этих волн, квазипродольная, имеет скорость, вычисляемую как

$$\begin{gathered} G = C_1\left(1 + \alpha_1 T + \alpha_2 u^+_{r,r} + \alpha_3 \frac{u^+_r}{r} + \frac{\dot u^+_r}{C_1} + \ldots\right), \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \\ T = [u^i_{,j}]n_i n^j, \quad [u^i_{,j}]n^j = Tn^i + \Gamma m^i, \quad m^i m_i = 1, \quad n^i n_i = 1, \quad m^i n_i = 0, \\ \Gamma = [u^i_{,j}]m_i n^j = \gamma_1 u^+_{z,r} T + \ldots, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = -\frac{7}{2} + 3\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}, \\ \alpha_3 = \frac{-3\lambda/2 + l + 3m}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma_1 = \frac{-2\lambda - 5\mu + l + 3n/2}{\lambda + \mu}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где T и Γ — продольная и поперечная компоненты волнового вектора разрывов. В (3.2) формула для скорости G имеет вид асимптотического ряда, записанного до первого порядка малости включительно по предварительным деформациям и интенсивности T. Поперечная компонента Γ волнового вектора имеет второй порядок малости относительно продольной T. Наличие поперечной компоненты разрыва связано с предварительной сдвиговой деформацией ($u^+_{z,r}$). Если предварительного сдвига нет, то $\Gamma = 0$ и волна становится чисто продольной. Отметим, что для слабо нелинейной среды скорость G близка к C_1.

Вторая волна, квазипоперечная, движется со скоростью

$$\begin{gathered} G = C_2\left(1 + \phi_1 u^+_{r,r} + \phi_2 \frac{u^+_r}{r} + \frac{\dot u^+_r}{C_2} + \ldots\right), \quad T = \gamma_2\left(\Gamma^2 - 2\Gamma u^+_{z,r}\right) + \ldots, \\ \phi_1 = \frac{-\lambda + 2\mu + l + 3n/2}{2\mu}, \quad \phi_2 = \frac{-\lambda + l}{2\mu}, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_1 + 1}{2}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует, что в первом порядке малости скорость квазипоперечной волны определяется только предварительными деформациями и не зависит от интенсивности Γ (симметрия задачи относительно замены z на $-z$). Эта волна всегда имеет продольную компоненту T и не становится чисто поперечной.

На каждой из возникающих ударных волн Σ_i, $i = 1, 2, \dots$ в слое выполняются условия

$$[u_r]|_{\Sigma_i} = [u_\varphi]|_{\Sigma_i} = 0, \quad r|_{\Sigma_i} = r_{i0} + \int\limits_{t_{i0}}^{t} G_i(\xi)\, d\xi, \tag{3.4}$$

где r_{i0} и t_{i0} — координата и момент образования фронта Σ_i.

Следствием системы (1.1) и сделанных предположений о кинематике среды будут такие уравнения движения:

$$\begin{gathered}
u_{r,rr}\left(1 + A_1 u_{r,r} + A_2\frac{u_r}{r}\right) + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + A_3\frac{u_{r,r}^2}{r} + A_4\frac{u_r^2}{r^3} + \frac{u_{r,r}u_r}{r^2} + \\
+ A_5 u_{z,r}u_{z,rr} + A_6\frac{u_{z,r}^2}{r} = \frac{1}{C_1^2}\left\{\ddot{u}_r\left(1 - 2u_{r,r} - \frac{u_r}{r}\right) + 2\dot{u}_r\dot{u}_{r,r} + \dots\right\}, \\
\left(u_{z,rr} + \frac{u_{z,r}}{r}\right)\left(1 + B_1 u_{r,r} + B_2\frac{u_r}{r}\right) + u_{z,r}\left\{(B_1 + 2)\,u_{r,rr} + B_2\frac{u_{r,r}}{r} - \right. \\
\left. - B_2\frac{u_r}{r^2}\right\} = \frac{1}{C_2^2}\left\{\ddot{u}_z\left(1 - 3u_{r,r} - \frac{u_r}{r}\right) + \ddot{u}_r u_{z,r} + 2\dot{u}_r\dot{u}_{z,r} + \dots\right\}, \\
A_5 = \frac{-\lambda - 4\mu + l + 3n/2}{\lambda + 2\mu}, \quad A_6 = \frac{-2\mu + 3n/4}{\lambda + 2\mu}, \\
B_1 = \frac{-\lambda - 5\mu + l + 3n/2}{\mu}, \quad B_2 = \frac{-\lambda - \mu + l}{\mu}.
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Решение краевой задачи (3.4), (3.5), (3.3) (или (3.2)) рассмотрим на основе модификации лучевого метода [11], адаптированной к описанию ударных волн.

Приближенное решение за передними фронтами волновых процессов для любой искомой функции, в т.ч. компонент поля перемещений, имеет вид, аналогичный (2.5) в задаче с единственной ударной волной

$$\begin{gathered}
f^{(k)}(r,t) = f^{(k-1)}(r,t) - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i f}{\partial t^i}\right]\Bigg|_{t=T_k(r)}(t - T_k)^i, \\
T_k(r) = \int\limits_{r_{k0}}^{r}\frac{d\xi}{G_k(\xi)} + t_{k0}, \quad \left[\frac{\partial^i f}{\partial t^i}\right] = \left(\frac{\partial^i f}{\partial t^i}\right)^+ - \left(\frac{\partial^i f}{\partial t^i}\right)^-.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

В (3.6) $f^{(k)}(r,t)$ — поле функции f за ударной волной Σ_k, имеющей скорость G_k, вычисляемую согласно (3.2) или же (3.3), $f^{(k-1)}(r,t)$ — поле функции f в области перед ударной волной Σ_k. Отметим, что $f^{(k-1)}(r,t)$ могут тоже определяться рядом типа (3.6) или же вычисляются иными методами. Возможность представления $f^{(k-1)}(r,t)$ лучевым рядом связана с предположением о том, что Σ_k и Σ_{k-1} недалеко расположены друг от друга. В решении, представленном дальше, все перемещения и деформации за каждой из ударных волн вычисляются с помощью лучевых асимптотик, поэтому решение имеет место при $t \ll 1$ и для тонкого цилиндрического слоя.

Дополнительно, как и ранее в (2.7), представим величины скачков $\left[\dfrac{\partial^i f}{\partial t^i}\right]$ рядами по дельта–производным, вычисляемым в момент возникновения соответствующей поверхности разрывов, т.е.

$$\left[\frac{\partial^i f}{\partial t^i}\right]\Bigg|_{\Sigma_k} = F_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left[\frac{\delta^j F_{ik}}{\delta t^j}\right]\Bigg|_{t=t_{k0}}(t - t_{k0})^j. \tag{3.7}$$

Очевидно, что величины $\left.\left[\dfrac{\delta^j F_{ik}}{\delta t^j}\right]\right|_{t=t_{k0}}$ являются постоянными для одномерной задачи.

Деформация цилиндрического слоя начинается с движения двух ударных волн: чисто продольной и квазипоперечной от границы $r = R + g(t)$ внутрь области до момента $t = t_1$, когда продольная волна приходит к $r = r_0$. В $r_0 \le r \le R + g(t)$, $0 \le t \le t_1$, проводя описанную выше схему вычисления лучевых рядов, получим для чисто продольной волны Σ_1:

$$
\begin{gathered}
u_r^{(1)}(r,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left.\left[\frac{\partial^k u_r}{\partial t^k}\right]\right|_{t=T_1(r)} (t - T_1(r))^k = \\
= -\left.[\dot{u}_r]\right|_{t=T_1(r)} - \left.\frac{[\ddot{u}_r]}{2}\right|_{t=T_1(r)} (t - T_1(r))^2 - \ldots = \\
= -\left.\left(\kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} t + \ldots\right)\right|_{t=T_1(r)} - \left.(\kappa_{20} + \ldots)\right|_{t=T_1(r)} (t - T_1(r))^2 - \ldots, \\
\kappa_1 = \left.[\dot{u}_r]\right|_{\Sigma_1}, \quad \kappa_2 = \left.[\ddot{u}_r]\right|_{\Sigma_1}, \quad \kappa_{10} = \left.[\dot{u}_r]\right|_{t=t_{10}=0}, \quad \kappa_{20} = \left.[\ddot{u}_r]\right|_{t=t_{10}=0}, \\
\frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} = \left.\frac{\delta[\dot{u}_r]}{\delta t}\right|_{t=t_{10}=0}, \quad \frac{\delta\kappa_1}{\delta t} = \frac{2D_1 \dfrac{\kappa_1}{C_1}\kappa_2 + \dfrac{\kappa_1}{r_1} C_1 \left(1 + D_2 \dfrac{\kappa_1}{C_1} + \ldots\right)}{2 + \left(17\dfrac{3}{4} - 10\dfrac{1}{2}\dfrac{l+m+n}{\lambda + 2\mu}\right)\dfrac{\kappa_1}{C_1} + \ldots}, \qquad (3.8) \\
r_1 = R - \int_0^t G_1(\xi)d\xi = R - \int_0^t C_1 \left(1 + D_1 \left(\kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}\xi\right)\frac{1}{C_1}\right) d\xi + \ldots = \\
= R - C_1 \left\{ t \left(1 + D_1 \frac{\kappa_{10}}{C_1}\right) + \frac{D_1}{2C_1} \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} t^2 \right\} + \ldots, \\
D_1 = \alpha_1, \quad D_2 = 4\frac{1}{2} + \frac{12\lambda + 18\mu - 15l - 27m - 9n}{2(\lambda + 2\mu)}, \\
u_z^{(1)}(r,t) \equiv 0.
\end{gathered}
$$

Верхний индекс, заключенный в круглые скобки, в формулах (3.8) и далее означает, что отмеченная им функция задана в области за ударной волной с соответствующим индексу номером. В (3.8) входит уравнение затухания, в котором происходит нарушение рекуррентности, т.к. величина $\dfrac{\delta\kappa_1}{\delta t}$ зависит от κ_1 и κ_2. Данное уравнение связывает между собой три неизвестных константы представления

$$
\kappa_1 = \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} t + \ldots, \quad \kappa_2 = \kappa_{20} + \ldots \qquad (3.9)
$$

и будет учитываться при выполнении краевых условий (3.1) на нагружаемой поверхности. Отметим, что приближение (3.9) для функций скачков κ_1, κ_2 может уточняться включением последующих членов рядов по дельта–производным, но для их коэффициентов будет необходимо вычисление уравнений затухания более высокого порядка. Входящая в формулы (3.8) функция $t = T_1(r)$ приближенно вычисляется как

$$
T_1(r) = \frac{R-r}{G_{10}} \left\{ 1 - \frac{D_1}{2C_1} \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} \frac{R-r}{G_{10}} \right\} + \ldots, \quad G_{10} = \left.G_1\right|_{t=0} = C_1 (1 + D_1 \kappa_{10}) + \ldots
$$

За передним фронтом Σ_2 квазипоперечной ударной волны для времен $0 \leq t < t_1$ решение лучевого метода находим в виде:

$$
\begin{gathered}
u_r^{(2)}(r,t) = -\left(\kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}T_1(r)\right)(t - T_1(r)) - \frac{\kappa_{20}}{2}(t - T_1(r))^2 - \\
-\left(w_{10} + \frac{\delta w_{10}}{\delta t}T_2(r)\right)(t - T_2(r)) - \frac{w_{20}}{2}(t - T_2(r))^2 - \ldots, \\
u_z^{(2)}(r,t) = -\left(\psi_{10} + \frac{\delta\psi_{10}}{\delta t}T_2(r)\right)(t - T_2(r)) - \frac{\psi_{20}}{2}(t - T_2(r))^2 - \ldots, \\
-2\frac{\delta\psi_1}{\delta t}\left\{1 + B_1 u_{r,r} + B_2\frac{u_r}{r_2} - \frac{\dot{u}_r}{C_2}\right\} - 4\psi_2\left\{u_{r,r} + \frac{\dot{u}_r}{C_2}\right\} + \\
+\psi_1 G_2\left\{\frac{1}{r_2} + (B_1 + B_2)\frac{u_{r,r}}{r_2} + (B_1 + 2)u_{r,rr} - \frac{B_1 + 2}{G_2^2}w_2 - \right. \\
\left. -\frac{\ddot{u}_r - w_2}{C_2} + \frac{1}{G_2^2}\frac{\delta G_2}{\delta t}\left(1 + B_1 u_{r,r} + B_2\frac{u_r}{r_2}\right)\right\} + \ldots = 0, \\
w_2 = \widetilde{A}_6\frac{\psi_1}{G_2}\left(\psi_2 - 2\frac{\delta\psi_1}{\delta t} + \frac{\psi_1}{G_2}\frac{\delta G_2}{\delta t}\right) + 2\widetilde{A}_7\frac{\psi_1^2}{r_2} + \ldots, \\
\widetilde{A}_6 = A_6\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \widetilde{A}_7 = A_7\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad r_2 = R - \int_0^t G_2(\xi)d\xi, \\
[\dot{u}_r]|_{\Sigma_2} = w_1, \quad [\ddot{u}_r]|_{\Sigma_2} = w_2, \quad [\dot{u}_z]|_{\Sigma_2} = \psi_1, \quad [\ddot{u}_z]|_{\Sigma_2} = \psi_2, \\
T_2(r) = \frac{R - r}{G_{20}}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\delta G_{20}}{\delta t}\frac{R - r}{G_{20}^2}\right\} + \ldots
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

Здесь для сокращения выкладок и далее в записи уравнений затухания на каждой ударной волне у величин предварительных деформаций ($u_{r,r}$, $\dfrac{u_r}{r}$, $\dfrac{\dot{u}_r}{C_2}$ и т.д.) пропускаем индекс "+" . Для каждого из скачков w_1, w_2, ψ_1, ψ_2 принимаем представление вида (3.9). Скорость квазипоперечной волны Σ_2 вычислятся согласно (3.3), и т.к. в (3.3) содержатся функции предварительных деформаций перед Σ_2, то их значения определяются при помощи дополнительных рядов по дельта-производным вида (3.7). Поскольку предварительные деформации на волне Σ_2 здесь вычисляются в момент $t = 0$, то для них справедливо утверждение:

$$
f^+\big|_{\Sigma_2,\, t=0} = -\,[f]|_{\Sigma_1,\, t=0} = f^-\big|_{\Sigma_1,\, t=0}\,, \tag{3.11}
$$

где f — общее обозначение, принятое для всех возможных деформаций или их частных производных. Далее, предварительные деформации представляем в виде

$$
\begin{gathered}
f^+\big|_{\Sigma_2} = f_0^+ + \frac{\delta f_0^+}{\delta t} + \ldots, \quad f^+\big|_{\Sigma_2,\, t=0} = f_0^+, \\
\left.\frac{\delta f^+}{\delta t}\right|_{\Sigma_2,\, t=0} = \frac{\delta f_0^+}{\delta t} = \dot{f}^+ - f_{,r}^+\, G_2|_{t=0}\,,
\end{gathered}
$$

причем дельта–производные предварительных деформаций также вычисляются с учетом решения (3.8) и формул (3.11). Отметим, что в приближенной формуле

$$
G_2 = G_{20} + \frac{\delta G_{20}}{\delta t}t + \ldots,
$$

используемой в (3.11), вся зависимость от дельта–производных предварительных деформаций включена в коэффициент $\dfrac{\delta G_{20}}{\delta t}$. После проведения необходимых вычислений за ударной волной Σ_2 получаем приближенное решение (3.10) для $u_r^{(2)}$, $u_z^{(2)}$, содержащее неизвестные константы $\varkappa_{10}$, $\dfrac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}$, $\varkappa_{20}$, w_{10}, $\dfrac{\delta w_{10}}{\delta t}$, w_{20}, ψ_{10}, $\dfrac{\delta\psi_{10}}{\delta t}$, ψ_{20}. Краевые условия (3.1) на деформирующейся внешней границе позволяют определить часть этих констант:

$$\varkappa_{10}=-\frac{g_0}{1+\dfrac{g_0}{G_{10}}}+\ldots,\quad \psi_{10}=-\frac{h_0}{1+\dfrac{g_0}{G_{20}}}+\ldots,\quad w_{10}=\gamma_2\frac{\psi_{10}^2}{G_{20}}+\ldots,$$
$$G_{10}=C_1\left(1+\alpha_1\frac{\varkappa_{10}}{C_1}+\ldots\right),\quad G_{20}=C_2\left(1-\beta_1\frac{\varkappa_{10}}{C_1}-\frac{\varkappa_{10}}{C_2}\right)+\ldots,$$
$$\varkappa_{20}=-\frac{g_1}{\left(1+\dfrac{g_0}{G_{10}}\right)^2}+\ldots,\quad \psi_{20}=-\frac{h_1}{\left(1+\dfrac{g_0}{G_{20}}\right)^2}+\ldots$$

Остальные константы w_{20}, $\dfrac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}$, $\dfrac{\delta\psi_{10}}{\delta t}$, $\dfrac{\delta w_{10}}{\delta t}$ определяются из полученных ранее уравнений затухания и соотношений, характеризующих свойства ударных волн. Для компоненты разрывов w_1 имеем уравнение — следствие (3.3), зависимости между интенсивностью Γ и T, где $u^+_{z,r}=0$. Вычисляя дельта производную этого соотношения, определяем $\dfrac{\delta w_{10}}{\delta t}$ через другие константы. Дополнительно, как обычно в лучевом методе, вместе с дифференциальным уравнением для $\dfrac{\delta\psi_1}{\delta t}$ на волне Σ_2 получаем еще одно соотношение (для нашей задачи алгебраическое), позволяющее вычислить w_2. В общем случае многомерных задач это соотношение показывает, как изменяются вдоль эйконала функции скачков второго порядка.

Полученное выше решение справедливо до момента $t=t_1$, когда продольная волна Σ_1 падает на границу $r=r_0$. В этот момент образуется отраженный ударный фронт Σ_3, который является чисто продольным. В отличие от волны Σ_1, этот фронт перемещается по полю предварительных ненулевых деформаций. Волна Σ_3 имеет место до момента $t=t^*$, когда внутри слоя она столкнется с квазипоперечной волной Σ_2. Рассмотрим, как меняется решение для времен $t_0\le t\le t^*$ за передним фронтом Σ_3.

Во-первых, само время t_0 может быть вычислено как

$$t_0=\frac{R-r_0}{G_{10}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta G_{10}}{\delta t}\frac{R-r_0}{G_{10}^2}\right).$$

Введем обозначения для основных скачков на ударной волне Σ_3:

$$[\dot u_r]|_{\Sigma_3}=\theta_1,\quad [\ddot u_r]|_{\Sigma_3}=\theta_2.$$

За волной Σ_3 компонента u_z отсутствует. В соответствии с формулой (3.2) и подробно описанным ранее лучевым методом на Σ_3 получим такую связь координат:

$$r_3=r_0+G_{30}(t-t_0)+\frac{1}{2}\frac{\delta G_{30}}{\delta t}(t-t_0)^2+\ldots,$$
$$T_3(r)=t_0+\frac{r-r_0}{G_{30}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta G_{30}}{\delta t}\frac{r-r_0}{G_{30}^2}\right)+\ldots,$$

причем G_{30}, $\dfrac{\delta G_{30}}{\delta t}$ — функции θ_1, $\dfrac{\delta\theta_1}{\delta t}$, θ_2 и найденных ранее констант за Σ_1. Решение за Σ_3 зададим формулой

$$\begin{aligned}u_r^{(3)}(r,t)=&-\left(\varkappa_{10}+\frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}T_1(r)\right)(t-T_1(r))-\frac{\varkappa_{20}}{2}\,(t-T_1(r))^2-\\&-\left.\left(\theta_{10}+\frac{\delta\theta_{10}}{\delta t}(t-t_0)\right)\right|_{t=T_3(r)}(t-T_3(r))-\frac{\theta_{20}}{2}\,(t-T_3(r))^2-\ldots\end{aligned}\qquad(3.12)$$

Условие жесткого закрепления на $r = r_0$ с подстановкой в него (3.12) позволяет вычислить:

$$\varkappa_{10} + \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0 = -\theta_{10}, \quad \theta_{20} = -\varkappa_{20}. \tag{3.13}$$

Связь между θ_{10} и $\dfrac{\delta\theta_{10}}{\delta t}$, θ_{20} получаем как уравнение лучевого метода

$$\begin{gathered}
\theta_{20}\left\{(2 + A_1 - 2\alpha_2)\, t_0 \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) - \frac{(A_1 + 2\alpha_1)}{C_1}\left(\varkappa_{10} + \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0\right)\right\} - \\
-2\frac{\delta\theta_{10}}{\delta t}\left\{1 + A_1 t_0 \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) - \frac{A_1}{C_1}\left(\varkappa_{10} + \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0\right)\right\} - \\
-\left(\varkappa_{10} + \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0\right) \frac{C_1}{G_{30}\left(1 - \alpha_1 \dfrac{\theta_1}{C_1} + \ldots\right)} \left\{-\frac{\alpha_1}{G_{30}}\frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} + \right. \\
+\left[\alpha_2\left(\varkappa_{20} - \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}\right) T_1'(r_0) - \frac{\alpha_3}{r_0}\left(\varkappa_{10} + \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0\right) - \frac{\varkappa_{20}}{C_1}\right] + \\
+G_{30}\left[\alpha_2\left(T_1''(r_0)\frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0 + (T_1'(r_0))^2\left(2\frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} - \varkappa_{20}\right)\right) + \right. \\
\left.\left. +\frac{\alpha_3}{r_0} t_0 \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) + \frac{1}{C_1}\left(\varkappa_{20} - \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}\right) T_1'(r_0)\right]\right\} \cdot \\
\cdot\left\{1 + A_1 t_0 \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) - \frac{A_1}{C_1}\left(\varkappa_{10} + \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0\right)\right\} - \\
-\left(\varkappa_{10} + \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0\right) G_{30}\left\{-\frac{1}{r_0} - A_1 T_1''(r_0) \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0 - \right. \\
-A_1\left(T_1'(r_0)\right)^2\left(2\frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} - \varkappa_{20}\right) - 2\frac{A_3}{r_0} t_0 \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) + \\
\left. +\frac{A_3}{r_0 C_1}\left(\varkappa_{10} + \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t_0\right) + \frac{2\varkappa_{20}}{C_1^2} - 2\left(\varkappa_{20} - \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}\right) T_1'(r_0)\frac{G_{30}}{C_1^2}\right\} + \ldots = 0.
\end{gathered} \tag{3.14}$$

Из уравнения (3.14) следует, что величина $\dfrac{\delta\theta_{10}}{\delta t}$, показывающая изменение скачка импульса на отраженной волне в момент t_0, полностью определяется константами, задающими перемещения за Σ_1. Решая (3.14) с учетом (3.13), полностью определяем лучевое разложение за отраженной продольной волной.

Построенное лучевое решение, включающее область за Σ_2 $(r_2(t) \le r \le R + g(t))$, область за Σ_3 $(r_0 \le r \le r_3(t))$ и область $r_3(t) \le r \le r_2(t)$ с решением $u_r = u_r^{(1)}(r,t)$, имеет место до момента $t = t^*$, когда при $r = r^*$ встречаются отраженная продольная и квазипоперечная волна. Приравнивая $T_2(r) = T_3(r)$, получим квадратное уравнение относительно r. Решая его приближенно, вычислим

$$r^* = r_L + \frac{\delta G_{20}}{\delta t}\frac{1}{G_{20}^2}\left(\frac{r_L R - \dfrac{r_L^2 + R^2}{2}}{G_{20} + G_{30}}\right) G_{30} + \frac{\delta G_{30}}{\delta t}\frac{1}{G_{30}^2}\left(\frac{-r_L r_0 + \dfrac{r_L^2 + r_0^2}{2}}{G_{20} + G_{30}}\right) G_{20} + \ldots,$$

$$r_L = \frac{R(C_1 - C_2) + 2r_0 C_2}{C_1 + C_2},$$

где r_L — линейное приближение к значению r^*. Отвечающее r^* значение t^* находим из уравнения $t^* = T_2(r^*)$ или же из $t^* = T_3(r^*)$.

Слабая нелинейность задачи позволяет предположить, что взаимодействие волн не приводит к их принципиальному изменению, т.е. считаем, что с момента $t = t^*$ от $r = r^*$

в сторону R движется квазипродольная волна Σ_4, а решение перед ней задается функциями $u_r^{(2)}(r,t)$, $u_z^{(2)}(r,t)$. Одновременно к границе r_0 идет новая квазипоперечная волна Σ_5, поле перед которой задается функцией $u_r^{(3)}(r,t)$. Этот процесс происходит до момента $T^* = min(T_4(R),\ T_5(r_0))$, где $T_4(r)$, $T_5(r)$ — уравнения эйконала Σ_4 и Σ_5 соответственно. За каждой из ударных волн представим решение лучевым рядом:

$$u_r^{(4)}(r,t) = u_r^{(2)}(r,t) - \left(\varphi_{10} + \frac{\delta\varphi_{10}}{\delta t}(t-t^*)\right)\bigg|_{t=T_4(r)} (t - T_4(r)) - \frac{\varphi_{20}}{2}(t-T_4(r))^2 - \ldots,$$

$$u_z^{(4)}(r,t) = u_z^{(2)}(r,t) - \left(\nu_{10} + \frac{\delta\nu_{10}}{\delta t}(t-t^*)\right)\bigg|_{t=T_4(r)} (t - T_4(r)) - \frac{\nu_{20}}{2}(t-T_4(r))^2 - \ldots,$$

$$u_r^{(5)}(r,t) = u_r^{(3)}(r,t) - \left(\xi_{10} + \frac{\delta\xi_{10}}{\delta t}(t-t^*)\right)\bigg|_{t=T_5(r)} (t - T_5(r)) - \frac{\xi_{20}}{2}(t-T_5(r))^2 - \ldots,$$

$$u_z^{(5)}(r,t) = -\left(\tau_{10} + \frac{\delta\tau_{10}}{\delta t}(t-t^*)\right)\bigg|_{t=T_5(r)} (t - T_5(r)) - \frac{\tau_{20}}{2}(t-T_5(r))^2 - \ldots$$

$$T_4(r) = t^* + \int\limits_{r^*}^{r} \frac{d\xi}{G_4(\xi)}, \quad T_5(r) = t^* - \int\limits_{r^*}^{r} \frac{d\xi}{G_5(\xi)}, \tag{3.15}$$

где φ_{10}, ν_{10}, φ_{20}, ν_{20}, $\dfrac{\delta\varphi_{10}}{\delta t}$, $\dfrac{\delta\nu_{10}}{\delta t}$, ξ_{10}, τ_{10}, ξ_{20}, τ_{20}, $\dfrac{\delta\xi_{10}}{\delta t}$, $\dfrac{\delta\tau_{10}}{\delta t}$ — неизвестные константы метода, G_4 задается формулой (3.2), а G_5 — формулой (3.3). Для каждой из волн Σ_4, Σ_5 получаем по 4 уравнения лучевого метода: одно основное уравнение затухания, одно дополнительное уравнение алгебраического типа и уравнение, связывающее компоненты волнового вектора, в двух видах: само по себе и для дельта-производных этих компонент. Оставшиеся четыре неизвестных определяем из условия непрерывности перемещений при $r = r^*$ в малой окрестности $t > t^*$

$$u_r^{(4)}\Big|_{r=r^*} = u_r^{(5)}\Big|_{r=r^*}, \quad u_z^{(4)}\Big|_{r=r^*} = u_z^{(5)}\Big|_{r=r^*}. \tag{3.16}$$

Поскольку каждое из перемещений в (3.16) имеет вид степенной функции второго порядка по времени, то (3.16) выполняется за счет приравнивания коэффициентов у каждой из степеней t. При этом получаем недостающие четыре уравнения:

$$\begin{gathered}
\varphi_{10} - \xi_{10} = -\left(w_{10} + \frac{\delta w_{10}}{\delta t}t^*\right) + \left(\theta_{10} + \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t}(t^* - t_0)\right), \\
\varphi_{20} - \xi_{20} = -w_{20} + \theta_{20}, \\
-\tau_{10} = -\left(\psi_{10} + \frac{\delta\psi_{10}}{\delta t}t^*\right) - \nu_{10}, \\
-\tau_{20} = -\psi_{20} - \nu_{20}.
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Такие же выражения для констант рядов, как и в (3.17), можно получить, сравнивая между собой не перемещения в точке $r = r^*$, а значения частных производных перемещений за Σ_4 и за Σ_5 в пределе при $t \to t^*$, предполагая, что эти предельные значения совпадают.

Гладкое решение в области между волнами Σ_4 и Σ_5 можно вычислить, задавая набор функций — весовых коэффициентов $\Phi_r^{(4)}$, $\Phi_r^{(5)}$, $\Phi_z^{(4)}$, $\Phi_z^{(5)}$, с которыми лучевые решения войдут в общее, так что

$$\widetilde{u}_r = \Phi_r^{(4)}u_r^{(4)} + \Phi_r^{(5)}u_r^{(5)}, \quad \widetilde{u}_z = \Phi_z^{(4)}u_z^{(4)} + \Phi_z^{(5)}u_z^{(5)},$$

$$\Phi_r^{(4)}\Big|_{\Sigma_4} = 1, \quad \Phi_r^{(4)}\Big|_{\Sigma_5} = 0, \quad \Phi_r^{(5)}\Big|_{\Sigma_4} = 0, \quad \Phi_r^{(5)}\Big|_{\Sigma_5} = 1.$$

С помощью всех перечисленных действий достаточно легко, хотя и громоздко по форме, записываются лучевые ряды для области внутри слоя, связанной с эффектом взаимодействия ударных волн.

4. Заключение. В статье представлено применение модифицированного лучевого метода к одномерным осесимметричным задачам ударной деформации цилиндрической полости в среде или цилиндрического слоя. Рассмотрены различные варианты изменения лучевого метода. Один из них связан с введением в схему метода дополнительных рядов по дельта-производным, другой — с вычислением разрывов высоких порядков с помощью решения линеаризованной задачи. Необходимо отметить, что для ударных волн ненулевой кривизны применение дополнительных рядов по дельта-производным ограничено малым расстоянием, проходимым ударной волной. Именно этот вариант метода применяется для описания движения ударных волн в слое малой толщины. Представлены различные типы задач: о распространении одиночной волны, о падающих волнах, об отраженных от одной из границ волнах и о взаимодействии волн внутри слоя. Для каждой из них решение получено в виде своего лучевого ряда.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бленд, Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Р. Бленд. – М. : Мир, 1972. – 183 с.

[2] *Куликовский, А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – М. : Московский Лицей, 1998. – 412 с.

[3] *Rossikhin, Y. A.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – V. 48. – № 1. – P. 1–39.

[4] *Быковцев, Г. И.* Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеальных жестко-пластических сред / Г. И. Быковцев, И. А. Власова // Механика деформируемого твердого тела (динамика сплошной среды). – 1979. – Вып. 41. – С. 31–36.

[5] *Буренин, А. А.* О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной ударной волны / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // ПМТФ. – 1990. – № 6. – С. 13–17.

[6] *Россихин, Ю. А.* Удар жесткого шара по упругому полупространству / Ю. А. Россихин // Прикл. механика. – 1986. – Т. 22. – № 5. – С. 15–21.

[7] *Подильчук, Ю. Н.* Применение метода лучевых рядов для исследования осесимметричных нестационарных задач динамической теории упругости / Ю. Н. Подильчук, Ю. К. Рубцов // Прикл. механика. – 1986. – Т. 22. – № 3. – С. 3–9.

[8] *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1,2. Изд-ие 2-ое испр. и дополн. / Л. И. Седов. – М. : Наука, – 1973. – Т. 1. – 536 с. – Т. 2. – 584 с.

[9] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.

[10] *Герасименко, Е. А.* Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / Е. А. Герасименко, В. Е. Рагозина // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2006. – № 6/1(46). – С. 94–113.

[11] *Буренин, А. А.* Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток : ДВО АН СССР, 1991. – С. 129–137.

Рагозина Виктория Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток

`e-mail:` ragozina@vlc.ru

Иванова Юлия Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток

`e-mail:` ivanova@iacp.dvo.ru

V. E. Ragozina, Y. E. Ivanova

ON THE VARIOUS METHODS OF ADAPTATION OF FRONTLINE RAY EXPANSIONS SCHEME IN THE PROBLEMS OF THE AXISYMMETRIC DYNAMICS OF NONLINEAR ELASTIC MEDIUM

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences

Abstract. The possibility of using of two variants of the ray method modification is shown on the example of several one-dimensional axisymmetric problems of shock deformation of elastic medium. The ray method in its standard can not be applied to nonlinear processes, including discontinuities surfaces of the first derivatives. Presented in the paper variants of the method allow to remove this restriction. Features of the application of the ray series for distribution in the medium of a single shock wave, for the process leading to the formation of several shock waves of various types, for the problem of formation of reflected waves and their subsequent interaction with the leading edges of initially created processes are shown. The question of construction of ray series for times after the interaction of the incident and reflected shock waves in the interior layer of the elastic medium is considered.

Keywords: nonlinear elastic medium, impact deformation, ray series, axisymmetric problems, quasi-longitudinal and quasi-transverse shock waves.

REFERENCES

[1] *Bland, D. R.* Nonlinear dynamic theory of elasticity / D. R. Bland. – M. : Mir, 1972. – 183 p. (in Russian)

[2] *Kulikovskii, A. G.* / A. G. Kulikovskii, E. I. Sveshnikova. FL : CRC Press, Boca Raton, 1995. – 256 p. (in Russian)

[3] *Rossikhin, Y. A.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – Vol. 48. – № 1. – P. 1–39.

[4] *Bykovtsev, G. I.* Special lines and surfaces in spatial flows of an ideal rigid-plastic mediums / G. I. Bykovtsev, I. A. Vlasova // Mechanics of deformable solids(dynamics continuous medium). – 1979. – Is. 41. – P. 31–36. (in Russian)

[5] *Burenin, A. A.* Influence of viscosity on the nature of the propagation of a plane extensional shock wave / A. A. Burenin, Y. A. Rossikhin // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1990. – V. 31. – Is. 6. – P. 807–810. (in Russian)

[6] *Rossikhin, Y. A.* Impact of a rigid sphere onto an elastic half space / Y. A. Rossikhin // Soviet Applied Mechanics. – 1986. – Vol. 22. – № 5. – P. 403–409. (in Russian)

[7] *Podil'chuk, Yu. N.* Application of the method of ray series to the investigation of axisymmetric nonstationary problems of the dynamical theory of elasticity / Yu. N. Podil'chuk, Yu. K. Rubtsov // Soviet Applied Mechanics. – 1986. – Vol. 22.– Is. 3. – P. 201–207. (in Russian)

[8] *Sedov, L. I.* Continuum Mechanics. / L. I. Sedov. – M. : Nauka, – 1973. – Vol. 1. – 536 p. – Vol. 2. – 584 p. (in Russian)

[9] *Tomas, T.* Plastic Flow and Fracture in Solids / T. Y. Thomas. Academic Press, 1961. 267 p. (in Russian)

[10] *Gerasimenko, E. A.* The ray expansion in the study of the laws of propagation of non-planar shock waves / E. A. Gerasimenko, V. E. Ragozina // Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. – 2006. – № 6/1(46). – P. 94–113. (in Russian)

[11] *Burenin, A. A.* Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces of strong discontinuities / A. A. Burenin, Y. A. Rossikhin //

Applied problems of deformable media mechanics. – Vladivostok : FEB AS USSR, 1991. – P. 129–137. (in Russian)

Ragozina, Victoria Evgenevna

Senior Researcher, Ph.D., Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Ivanova, Yulia Evgenevna

Researcher, Ph.D., Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok