Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 236–240

Б. Г. Миронов

К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассмотрено кручение неоднородных анизотропных идеальнопластических стержней при произвольном условии пластичности. Определены характеристики исследуемых уравнений и соотношения вдоль характеристик, а также при некоторых частных случаях условия предельного состояния получены интегралы основных соотношений.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, анизотропия, неоднородность, кручение.

УДК: 539.375

Рассмотрим цилиндрический или призматический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xyz. Образующие стержня параллельны оси z. Предположим, что стержень состоит из неоднородного анизотропного идеальнопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Положим, что напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{xz}\left(x, y\right),\ \tau_{yz} = \tau_{yz}\left(x, y\right). \tag{1}$$

Условие пластичности в общем случае запишется в виде

$$f\left(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x, y\right) = 0, \tag{2}$$

а единственное уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Из наших предположений следует, что на контуре поперечного сечения стержня выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \tag{4}$$

Дифференцируя уравнение (2) по x, получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Согласно (5) из уравнения равновесия (3) следует

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-97029) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

Поступила 10.11.2014

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{6}$$

Характеристики уравнения (6) удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}=\frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial x}}. \tag{7}$$

Из (7) и (2) следует, что вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}d\tau_{yz}+\frac{\partial f}{\partial x}dx=0,\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}d\tau_{xz}+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0. \tag{9}$$

В общем случае, соотношения (8), (9) могут быть проинтегрированы только численно. Рассмотрим некоторые частные случаи условия пластичности (2), для которых можно получить интегралы системы уравнений (8), (9).

1. Однородные анизотропные стержни, т. е. условие пластичности (2) не зависит от x и y:

$$f\left(\tau_{xz},\tau_{yz}\right)=0. \tag{10}$$

Известно [2], что уравнения (8), (9) в этом случае легко интегрируются. Характеристики есть прямые линии, уравнения которых имеют вид

$$a_1x+b_1y=c_1, \tag{11}$$

а вдоль характеристик

$$\tau_{xz}=c_{11}=const,\ \tau_{yz}=c_{12}=const, \tag{12}$$

где $a_1=\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\left(c_{11},c_{12}\right),\ b_1=\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\left(c_{11},c_{12}\right),\ f\left(c_{11},c_{12}\right)=0,\ c_1=const.$

Рассмотрим вектор градиента к кривой текучести (2)

$$\operatorname{grad} f\left(\tau_{xz},\tau_{yz}\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\bar{j},$$

где $\bar{i},\bar{j}$ – единичные орты осей x и y.

Из (11) следует, что характеристики соотношения (6) ортогональны вектору градиента к кривой текучести.

2. Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) не зависит от x:

$$f\left(\tau_{xz},\tau_{yz},y\right)=0. \tag{13}$$

В этом случае вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz}=c_{21}\left(y\right),\ \tau_{yz}=c_{22}=const, \tag{14}$$

где $f\left(c_{21}\left(y\right),c_{22},y\right)=0.$

Уравнения характеристик имеют вид

$$x=-\int\frac{b_2\left(y\right)}{a_2\left(y\right)}dy+c_2, \tag{15}$$

где $a_2\left(y\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\left(c_{21}\left(y\right),c_{22},y\right),\ b_2\left(y\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\left(c_{21}\left(y\right),c_{22},y\right),\ c_2=const.$

3. Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$f\left(\phi\left(y\right)\tau_{xz},\psi\left(x\right)\tau_{yz}\right)=0. \tag{16}$$

В этом случае, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz}=\frac{c_{31}}{\phi\left(y\right)},\ \tau_{yz}=\frac{c_{32}}{\psi\left(x\right)}, \tag{17}$$

где $c_{31}=const,\ c_{32}=const,\ f\left(c_{31},c_{32}\right)=0.$

Уравнения характеристик определяются из соотношений

$$\int\frac{a_3}{\psi\left(x\right)}dx+\int\frac{b_3}{\phi\left(y\right)}dy=c_3, \tag{18}$$

где $a_3=\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\left(c_{31},c_{32}\right),\ b_3=\frac{\partial f}{\partial\xi_2}\left(c_{31},c_{32}\right),\ c_3=const,\ \xi_1=\phi\left(y\right)\tau_{xz},\ \xi_2=\psi\left(x\right)\tau_{yz}.$

4. В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$A\tau_{xz}^2+B\tau_{yz}^2=k_0^2+k_1^2\left(x\right)+k_2^2\left(y\right), \tag{19}$$

где $A,B,k_0-const,\ k_1,k_2-$некоторые функции соответственно от x и y, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\begin{aligned}A\tau_{xz}^2-k_2^2\left(y\right)=c_{41}=const,\\ B\tau_{yz}^2-k_1^2\left(x\right)=c_{42}=const.\end{aligned} \tag{20}$$

Характеристики определяются из уравнения

$$\int\frac{dx}{\sqrt{B\left(k_1^2\left(x\right)+c_{42}\right)}}+\int\frac{dy}{\sqrt{A\left(k_2^2\left(y\right)+c_{41}\right)}}=c_4, \tag{21}$$

где $c_4=const.$

5. В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$M^2\left(y\right)\tau_{xz}^2+N^2\left(x\right)\tau_{yz}^2=k^2, \tag{22}$$

где $k-const,\ M\left(y\right),N\left(x\right)-$ некоторые функции.

Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\begin{aligned}N\left(x\right)\tau_{yz}=c_{51}=const,\\ M\left(y\right)\tau_{xz}=c_{52}=const.\end{aligned} \tag{23}$$

Характеристики определяются из уравнения

$$\int\frac{dx}{c_{51}N\left(x\right)}+\int\frac{dy}{c_{52}M\left(y\right)}=c_5, \tag{24}$$

где $c_5=const.$

В случаях, когда через данную точку сечения стержня проходят две и более характеристик, возникает неопределенность в определении напряжений и невозможно построить непрерывные решения. Эта неопределенность устраняется введением линии разрыва напряжений. На линии разрыва напряжений нормальная к ней составляющая вектора касательного напряжения $\bar{\tau}=\tau_{xz}\bar{i}+\tau_{yz}\bar{j}$ непрерывна. Из этого условия получим соотношение для определения линии разрыва напряжений

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\tau_{yz}^+-\tau_{yz}^-}{\tau_{xz}^+-\tau_{xz}^-}, \tag{25}$$

где индексы «плюс» и «минус» наверху определяют соответственно компоненты напряжения слева и справа от линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Быковцев, Г. И.* Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред : сб. статей / Г. И. Быковцев. – Владивосток : Дальнаука, 2002. – 566 с.

[2] *Миронов, Б. Г.* Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.

[3] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.

[4] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 576–579.

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

`e-mail:` strangcheb@mail.ru

B. G. Mironov

TO THE THEORY OF TORSION OF NON-UNIFORM CORES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. This article examines the torsion inhomogeneous anisotropic perfectly plastic material rods with arbitrary condition of plasticity. The characteristics of the studied equations and relations along the characteristics, as well as some special cases limit state conditions obtained integrals basic relations.

Keywords: stress, ductility, translational anisotropy, pipe layer.

REFERENCES

[1] *Bykovtsev, G. I.* Chosen problematic issues of mechanics of deformable environments: collection of articles / G. I. Bykovtsev. – Vladivostok : Dalnauka, 2002. – 566 p.

[2] *Derevyannih, E. A.* About the general ratios of the theory of torsion of anisotropic cores / E. A. Derevyannih, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2012. – № 4 (76). – P. 108–112.

[3] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 232 p.

[4] *Ivlev, D. D.* About ratios of transmitting idealnoplastichesky anisotropy at torsion / D. D. Ivlev, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – Vol. 3. – № 2 (8). – P. 576–579.

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary