

А. В. Манжиров

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОСНОВАНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Московский государственный университет приборостроения и информатики

Аннотация. Исследуется контактная задача о взаимодействии системы жестких штампов с вязкоупругим основанием при наличии тонкого неоднородного упругого покрытия в случае плоской деформации. Рассмотрены различные варианты постановки задачи. Получена система разрешающих интегральных уравнений, которая приведена к одному смешанному интегральному уравнению с тензорным ядром в функциональном векторном пространстве. Для решения уравнения развит эффективный проекционно-спектральный метод. Решена модельная задача. Проведены детальные расчеты. Сформулированы выводы качественного характера.

Ключевые слова: контактные задачи, вязкоупругость, покрытие, неоднородность, быстрая осцилляция, система смешанных интегральных уравнений.

УДК: 539.3

Постановка задачи. На подстилающем недеформируемом основании лежит вязкоупругий слой толщины H с тонким упругим произвольно неоднородным покрытием, толщина которого h (рис. 1). В общем случае свойства покрытия зависят от двух координат x и y . В монографии [1] показано, что свойства относительно тонкого верхнего слоя осредняются по его глубине (интегрируются по y от 0 до h). Таким образом, можно считать, что свойства покрытия изменяются только от точки к точке поверхности основания (зависят только от x). Будем считать, что осредненная жесткость покрытия $R(x)$, зависящая от условий его соединения с нижним слоем, не превышает жесткости нижнего слоя (случай мягкого покрытия). В случае гладкого контакта

$$R(x) = \frac{E_1(x)}{1 - \nu_1^2(x)},$$

а в случае идеального контакта

$$R(x) = \frac{E_1(x)[1 - \nu_1(x)]}{[1 + \nu_1(x)][1 - 2\nu_1(x)]},$$

где $\nu_1(x)$ и $E_1(x)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга покрытия. На такое основание действуют n жестких штампов, вдавливаемых силами $P_i(t)$ с эксцентриситетами приложения

Поступила 18.07.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00991-а и 13-01-92693-ИНД_а).

$e_i(t) (i = \overline{1, n})$. Ширина каждого штампа значительно больше толщины покрытия, т.е. $b_i - a_i \gg h$, где a_i, b_i — абсцисса начала и абсцисса конца i -го штампа ($i = \overline{1, n}$).

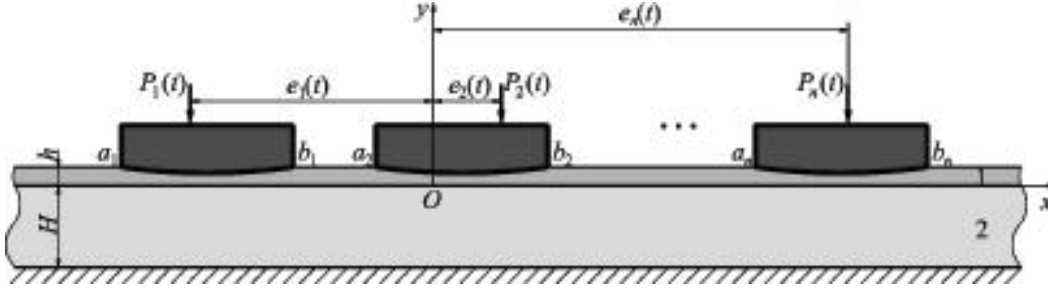


Рис. 1. Контактная задача

Приравняв вертикальные перемещения верхней грани основания, вызванные нагрузкой

$$p(x, t) = \begin{cases} -q_i(x, t), & x \in [a_i, b_i], \quad i = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и перемещения жестких штампов, получим систему интегральных уравнений контактной задачи (см. также [2–7]):

$$\begin{aligned} \frac{q_i(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j \frac{q_j(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \\ = \delta_i(t) + \alpha_i(t) \left(x - \frac{a_i + b_i}{2} \right) - g_i(x), \quad x \in [a_i, b_i], \\ \mathbf{F}_i f(x, t) = \int_{a_i}^{b_i} k_{\text{пл}} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) f(\xi, t) d\xi \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя; $\delta_i(t), \alpha_i(t)$ — осадки и углы поворота штампов, $g_i(x)$ — функции форм оснований штампов; \mathbf{I} — тождественный оператор, \mathbf{V}_2 — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(2)}(t, \tau)$, \mathbf{F}_j — интегральные операторы с известным ядром контактной задачи $k_{\text{пл}}[(x - \xi)/H]$.

Дополнительные условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями

$$P_i(t) = \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) d\xi, \quad M_i(t) = \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) \left(\xi - \frac{a_i + b_i}{2} \right) d\xi \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Сделаем в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{2x - a_i - b_i}{b_i - a_i}, \quad \xi^* = \frac{2\xi - a_i - b_i}{b_i - a_i}, \quad x, \xi \in [a_i, b_i], \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{2H}{b_1 - a_1}, \\
 \eta_j &= \frac{a_j + b_j}{b_1 - a_1}, \quad \zeta_j = \frac{b_j - a_j}{b_1 - a_1}, \quad \delta^{i*}(t^*) = \frac{2\delta_i(t)\sqrt{\zeta_i}}{b_1 - a_1}, \quad \alpha^{i*}(t^*) = \alpha_i(t)\zeta_i^{3/2}, \\
 g^{i*}(t^*) &= \frac{2g_i(x)\sqrt{\zeta_i}}{b_1 - a_1}, \quad q^{i*}(x^*, t^*) = \frac{2q_i(x, t)(1 - \nu_2^2)\sqrt{\zeta_i}}{E_2(t - \tau_2)}, \quad P^{i*}(t^*) = \frac{4P_i(t)(1 - \nu_2^2)\sqrt{\zeta_i}}{E_2(t - \tau_2)(b_i - a_i)}, \\
 M^{i*}(t^*) &= \frac{8M_i(t)(1 - \nu_2^2)\sqrt{\zeta_i}}{E_2(t - \tau_2)(b_i - a_i)^2}, \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_0}, \quad m^i(x^*) = \frac{1}{1 - \nu_2^2} \frac{E_0}{R(x)} \frac{h}{b_1 - a_1}, \\
 \mathbf{F}^{ij*} f(x^*, t^*) &= \int_{-1}^1 k_{ij}(x^*, \xi^*) f(\xi^*, t^*) d\xi^*, \quad k^{ij}(x^*, \xi^*) = \frac{\sqrt{\zeta_i \zeta_j}}{\pi} k_{pl} \left(\frac{x - \xi}{H} \right), \\
 \mathbf{V}_2^* f(x^*, t^*) &= \int_1^{t^*} K_2(t^*, \tau^*) f(x^*, \tau^*) d\tau^*, \quad K_2(t^*, \tau^*) = K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\tau_0
 \end{aligned}$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений

$$c(t)m^i(x)q^i(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij} q_j(x, t) = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x - g^i(x), \quad r \in [0, 1] \quad (3)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^1 q^i(\xi, t) d\xi = P^i(t) \quad \int_{-1}^1 q^i(\xi, t) \xi d\xi = M^i(t) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Сведение системы уравнений к операторному уравнению.

Основные определения.

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2([-1, 1])$ функций, интегрируемых с квадратом в области $[-1, 1]$, скалярное произведение и норма которого определяется соотношениями

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(\xi)g(\xi)d\xi, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad f(x), g(x) \in L_2([-1, 1]).$$

Если $\mathbf{L}_2([-1, 1])$ — пространство функций двух переменных, интегрируемых с квадратом в области $\{x, \xi\} \in [-1, 1]$, то скалярное произведение и норма представляются в форме

$$\begin{aligned}
 [k(x, \xi), h(x, \xi)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(x, \xi)h(x, \xi) dx d\xi, \\
 \|k\| &= \sqrt{[k, k]}, \quad k(x, \xi), h(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1]).
 \end{aligned}$$

Пусть $\{p_k^0(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — ортонормированный базис пространства $L_2([-1, 1])$, т. е. $(p_i^0, p_j^0) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда функции $f(x) \in L_2([-1, 1])$ и $k(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1])$ могут быть представлены в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i p_i^0(x), \quad k(x, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} k_{mk} p_m^0(x) p_k^0(\xi).$$

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функций, скалярное произведение и норма в котором введены по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x)) &= \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{g}(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f^i(\xi) g^i(\xi) d\xi, \\
 \|\mathbf{f}\| &= \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}, \quad \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x) \in L_2([-1, 1], V),
 \end{aligned}$$

где здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n , если левая часть формулы не зависит от этого индекса. Ясно, что $\mathbf{f}(x) \in L_2([-1, 1], V)$ тогда и только тогда, когда ее компоненты $f^i(x) \in L_2([-1, 1])$ ($i = \overline{1, n}$). Также можно ввести и гильбертово пространство $\mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ тензор-функций двух переменных со следующими скалярным произведением и нормой

$$[\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{H}(x, \xi)] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{H}(x, \xi) dx d\xi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K^{ij}(x, \xi) H^{ji}(x, \xi) dx d\xi,$$

$$\|\mathbf{K}\| = \sqrt{[\mathbf{K}, \mathbf{K}]}, \quad \mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{H}(x, \xi) \in L_2([-1, 1], V).$$

Очевидно, что тензор-функция $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ тогда и только тогда, когда ее компоненты $K^{ij}(x, \xi) \in L_2([-1, 1])$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Функциональный векторный базис $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}, k = 0, 1, 2, \dots$) пространства $L_2([-1, 1], V)$ можно построить следующим образом:

$$\mathbf{p}_k^i(x) = p_k^i(x) \mathbf{i}^i, \quad (\mathbf{p}_k^i, \mathbf{p}_m^j) = \delta^{ij} \delta_{km},$$

где $\mathbf{i}^i \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор, i -я компонента которого равна 1, а остальные нулю, а $\{p_k^i(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — ортонормированный базис пространства $L_2([-1, 1])$, в общем случае различный для каждого $i = \overline{1, n}$. Тогда вектор-функция $\mathbf{f}(x) \in L_2([-1, 1], V)$ и тензор-функция $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ могут быть представлены в виде

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^i \mathbf{p}_k^i(x), \quad \mathbf{K}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{km}^{ij} \mathbf{p}_k^i(x) \mathbf{p}_m^j(\xi).$$

Произведение (справа) тензор-функции $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ на вектор-функцию $\mathbf{f}(\xi) \in L_2([-1, 1], V)$ введем следующим соотношением:

$$(\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{f}(\xi)) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi.$$

Преобразование уравнения.

Принимая, что (аргументы функций опускаем)

$$\mathbf{q}(x, t) = q^i(x, t) \mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t) \mathbf{i}^i,$$

$$\mathbf{P}(t) = P^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{M}(t) = M^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{k}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi) \mathbf{i}^i \mathbf{i}^j, \quad \mathbf{D}(x) = m^i(x) \mathbf{i}^i \mathbf{i}^i,$$

получим систему интегральных уравнений с симметричными положительно определенными ядрами и преобразованные дополнительные условия. Систему уравнений (3) с дополнительными условиями (4) можно записать в виде операторного уравнения плоских контактных задач

$$c(t) \mathbf{D}(x) \cdot \mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{G} \mathbf{q}(x, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{q}(x, t)) = \mathbf{P}(t), \quad (x \mathbf{E}, \mathbf{q}(x, t)) = \mathbf{M}(t), \quad (6)$$

где $\mathbf{G} \mathbf{f}(x) = (\mathbf{k}(x, \xi), \mathbf{f}(\xi))$, $\mathbf{E} = \text{diag}_n \{1, \dots, 1\}$ — единичный тензор. Так как $\mathbf{D}(x)$ — симметричный положительно определенный тензор, то его можно представить в виде $\mathbf{D}(x) = \mathbf{N}^2(x)$, где в качестве $\mathbf{N}(x)$ можно взять $\mathbf{N}(x) = \sqrt{m^i(x)} \mathbf{i}^i \mathbf{i}^i$. В дальнейшем будем обозначать эту матрицу как $\mathbf{D}^{1/2}(x)$. Домножив уравнение (5) на $\mathbf{D}^{-1/2}(x) = (\mathbf{D}^{1/2}(x))^{-1}$ и введя обозначения

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{D}^{1/2}(x) \cdot \mathbf{q}(x, t), \quad \mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{D}^{-1/2}(x) \cdot \mathbf{k}(x, \xi) \cdot \mathbf{D}^{-1/2}(\xi), \quad (7)$$

получим следующее уравнение и дополнительные условия:

$$c(t) \mathbf{Q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{F} \mathbf{Q}(x, t) = \boldsymbol{\Delta}(x, t), \quad x \in [-1, 1], \quad (8)$$

$$(\mathbf{D}^{-1/2}(x), \mathbf{Q}(x, t)) = \mathbf{P}(t), \quad (\mathbf{D}^{-1/2}(x) \mathbf{X}, \mathbf{Q}(x, t)) = \mathbf{M}(t), \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\Delta}(x, t) = \mathbf{D}^{-1/2}(x) \cdot [\boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x)]$, $\mathbf{F} \mathbf{f}(x) = (\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{f}(\xi))$.

Таким образом, будем исследовать операторное уравнение (8) с дополнительным условием (9), $\mathbf{Q}(x, t)$, $\mathbf{\Delta}(x, t)$ – непрерывные по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функции, $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{M}(t)$ – непрерывные по t вектор-функции. Можно показать, что вполне непрерывный оператор \mathbf{F} является самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$.

Варианты математической постановки.

Рассмотрим варианты постановки контактной задачи о системе штампов, возникающие в плоском случае. Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из четырех типов условий: вдавливающую силу и момент, силу и угол поворота, осадку и момент, осадку и угол поворота. На разных штампах могут быть поставлены разные типы условий. Таким образом получается следующее: 1) если на всех штампах одинаковые условия, то всего 4 варианта постановки; 2) если штампы делятся на две группы с разными типами условий, то тогда будет 6 вариантов постановки; 3) если всего 3 группы штампов с разными условиями в каждой, то таких вариантов 4; 4) и, наконец, если есть 4 группы штампов, то такой вариант всего один. Таким образом, существуют пятнадцать возможных вариантов постановки плоской контактной задачи для системы штампов.

Анализ всех вариантов показывает, что они обладают одной закономерностью. Пространство $L_2([-1, 1], V)$ всегда можно представить в виде суммы ортогональных подпространств $L_2^1([-1, 1], V)$ и $L_2^2([-1, 1], V)$ так, что $L_2([-1, 1], V) = L_2^1([-1, 1], V) \oplus L_2^2([-1, 1], V)$, причем вектор-функция $\mathbf{Q}(x, t)$ имеет вид

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_1(x, t) + \mathbf{Q}_2(x, t),$$

где $\mathbf{Q}_i(x, t)$ непрерывны по t в $L_2^i([-1, 1], V)$ ($i = 1, 2$). Более того, $\mathbf{Q}_1(x, t)$ всегда представляет известную часть решения, а $\mathbf{Q}_2(x, t)$ подлежит определению.

Далее будут рассмотрены лишь 3 варианта постановки задачи. Решения для всех остальных вариантов получаются аналогичным образом.

Решение задачи для одной группы штампов.

Для решения задачи необходимо в первую очередь построить функциональный базис гильбертова пространства $L_2([-1, 1], V)$, для чего требуется рассмотреть последовательность тензор-функций $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$), составляющую базис пространства $L_2([-1, 1], V)$ [15]. При этом необходимо, чтобы в структуру всех базисных функций входили функции из матрицы $\mathbf{D}^{-1/2}(x)$ или в структуру каждой i -й группы функций $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) входила функция $\sqrt{m_i(x)}$. Это позволит учесть ее особенности (осцилляции, разрывность и пр.) уже на этапе формирования базиса, что даст возможность производить расчеты для оснований, неоднородности покрытий которых описываются сложными функциями. В этом случае система базисных функций сможет быть построена по следующему правилу:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_k^i(x), \mathbf{p}_m^j(x)) &= \delta_{km} \delta^{ij}, \quad \mathbf{p}_k^i(x) = \mathbf{D}^{-1/2}(x) \cdot \mathbf{p}_k^{i*}(x), \quad \mathbf{p}_k^{i*}(x) = p_k^{i*}(x) \mathbf{i}^i, \\ p_k^{i*}(x) &= \frac{1}{\sqrt{d_{k-1,i} d_{k,i}}} \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{k-1,i} & J_{k,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{k,i} & J_{k+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ J_{k-1,i} & J_{k,i} & \cdots & J_{2k-2,i} & J_{2k-1,i} \\ 1 & x & \cdots & x^{k-1} & x^k \end{vmatrix}, \quad J_{k,i} = \left(x^k, \frac{1}{m^i(x)} \right), \\ d_{-1,i} &= 1, \quad d_{k,i} = \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{k,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{k+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k,i} & J_{k+1,i} & \cdots & J_{2k,i} \end{vmatrix}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$) составляет базис $L_2([-1, 1], V)$.

Заданные осадки и углы поворота штампов (решение уравнения с известной правой частью).

Пусть система штампов представляет из себя группу с заданными осадками $\delta(t)$ и углами поворота $\alpha(t)$ штампов. Тогда требуются контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$ под каждым из штампов, вдавливающие усилия $\mathbf{P}(t)$ и моменты $\mathbf{M}(t)$.

Тогда решение уравнения (9) следует искать в виде ряда по собственным функциям оператора \mathbf{F} , который является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$. Система его собственных вектор-функций составляет базис пространства $L_2([-1, 1], V)$. Спектральная задача для оператора \mathbf{F} может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\varphi_k(x) &= \gamma_k\varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{P}_m^i(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{K}(x, \xi) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} K_{m_1 m_2}^{ij} \mathbf{P}_{m_1}^i(x) \mathbf{P}_{m_2}^j(\xi). \end{aligned} \quad (11)$$

Представив искомую вектор-функцию $\mathbf{Q}(x, t)$ и $\Delta(x, t)$ в виде разложения по собственным вектор-функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) в $L_2([-1, 1], V)$, то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x), \quad \Delta(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t) \varphi_k(x), \\ \Delta_k(t) &= \delta_k^i \delta^i(t) + \alpha_k^i \alpha^i(t) + \tilde{g}_k, \end{aligned} \quad (12)$$

и подставив эти представления в (8), получим

$$c(t) \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{F} \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t) \varphi_k(x).$$

Коэффициенты разложения δ_k^i , α_k^i и \tilde{g}_k ($i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \dots$) известны. Учитывая представления из спектральной задачи (11), можно получить

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_\ell) \frac{\Delta_k(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k(t, \tau) = \gamma_k K_2(t, \tau) / [c(t) + \gamma_k]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$ под штампами, необходимо воспользоваться формулами (7), (11)–(13). При этом исходные базисные функции необходимо строить по формулам (10). Отметим, что

$$q^i(x, t) = \frac{1}{m^i(x)} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell^{i*}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k\ell}^i z_k(t) \right], \quad i = \overline{1, n},$$

то есть в решении в явном виде выделены функции $m^i(x)$, которые связаны с функциями неоднородности покрытия, а в квадратных скобках стоит сумма гладких функций (многочленов). Это позволяет производить расчеты для случаев, когда неоднородность описывается быстро осциллирующей и даже разрывной функцией.

Для получения векторов вдавливающих усилий $\mathbf{P}(t)$ и моментов $\mathbf{M}(t)$ необходимо воспользоваться уже полученной вектор-функцией $\mathbf{q}(x, t)$, подставив ее в уравнение (6).

Заданные все вдавливающие силы и моменты (решение уравнения с частично известной правой частью).

Пусть система штампов представляет из себя группу с заданными вдавливающими силами $\mathbf{P}(t)$ и моментами $\mathbf{M}(t)$. Тогда требуются контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$ под каждым из штампов, осадки $\delta(t)$ и углы поворота $\alpha(t)$ штампов.

В этом случае пространство $L_2([-1, 1], V)$ необходимо представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2([-1, 1], V) = L_2^{(0)}([-1, 1], V) \oplus L_2^{(1)}(\Omega, V)$, где $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$), а $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}, k = 2, 3, \dots$). Подынтегральная функция и правая часть уравнения (8) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ соответственно, то есть

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_0(x, t) + \mathbf{Q}_1(x, t), \quad \mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_0(x, t) + \mathbf{\Delta}_1(x, t), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0(x, t) &= z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x) + z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x), \\ \mathbf{\Delta}_0(x, t) &= \Delta_{00}^i(t)\mathbf{p}_0^i(x) + \Delta_{01}^i(t)\mathbf{p}_1^i(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Функции разложения $\Delta_{00}^i(t)$ и $\Delta_{01}^i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) включают в себя линейную комбинацию функции угла поворота $\alpha^i(t)$, функции осадки $\delta^i(t)$ и известных коэффициентов разложения $\{\hat{g}_0^i, \hat{g}_1^i\}$ функции формы $\mathbf{g}(x)$ по $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$).

Заметим, что в представлении для $\mathbf{Q}(x, t)$ нам известно слагаемое $\mathbf{Q}_0(x, t)$, функция разложения $z_0^i(t)$ и $z_1^i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) которого определяется дополнительными условиями (9), а слагаемое $\mathbf{Q}_1(x, t)$ требуется найти. Для правой части, наоборот, требуется определить $\mathbf{\Delta}_0(x, t)$, а функция $\mathbf{\Delta}_1(x, t)$ известна.

Введем оператор ортогонального проектирования (ортопроектор), который отображает пространство $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$:

$$\mathbf{P}_0\phi(x, t) = (\phi(x, t), \mathbf{p}_0^i(x))\mathbf{p}_0^i(x) + (\phi(x, t), \mathbf{p}_1^i(x))\mathbf{p}_1^i(x). \quad (16)$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ переводит пространство $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{P}_i\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_i(x, t), \quad \mathbf{P}_i\mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_i(x, t), \quad i = 0, 1.$$

Подействуем на уравнение (8) оператором ортогонального проектирования \mathbf{P}_1 . В результате получим уравнение для определения $\mathbf{Q}_1(x, t)$ с известной правой частью:

$$c(t)\mathbf{Q}_1(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_1(x, t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x, t) + \mathbf{\Delta}_1(x, t) = \tilde{\mathbf{\Delta}}(x, t). \quad (17)$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$, который, как можно показать, является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным из $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ в $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Спектральная задача для оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1\mathbf{F}\varphi_k(x) &= \gamma_k\varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi_{km}^i\mathbf{p}_m^i(x), \quad k = 2, 3, \dots, \\ \mathbf{K}(x, \xi) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} K_{m_1 m_2}^{ij}\mathbf{p}_{m_1}^i(x)\mathbf{p}_{m_2}^j(\xi). \end{aligned} \quad (18)$$

Представив искомую функцию $\mathbf{Q}_1(x, t)$ и правую часть (17) в виде разложения по новым базисным функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$) в $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$, то есть

$$\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x), \quad \tilde{\mathbf{\Delta}}(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} \Delta_k(t)\varphi_k(x), \quad (19)$$

и подставив это представление в (17), получим уравнение для определения неизвестных функций разложения $z_k(t)$ ($k = 2, 3, \dots$):

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta_k(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (20)$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k(t, \tau) = \gamma_k K_2(t, \tau) / [c(t) + \gamma_k]$ ($k = 2, 3, \dots$).

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$ под штампами, необходимо воспользоваться формулами (7), (14), (15), (18)–(20). При этом исходные базисные функции необходимо строить по формулам (10). Как и в случае с заданной правой частью, в выражениях для контактных давлений в явном виде выделены функции $m_i(x)$, которые связаны с функциями неоднородности покрытия:

$$q^i(x, t) = \frac{1}{m^i(x)} \left[p_0^{i*}(x) z_0^i(t) + p_1^{i*}(x) z_1^i(t) + \sum_{\ell=2}^{\infty} p_{\ell}^{i*}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \psi_{k\ell}^i z_k(t) \right], \quad i = \overline{1, n}.$$

Полностью определив контактные давления под штампами, можно найти и неизвестные осадки и углы поворотов. Для этого действуем оператором \mathbf{P}_0 на уравнение (8):

$$c(t) \mathbf{Q}_0(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{P}_0 \mathbf{F} \mathbf{Q}(x, t) = \Delta_{00}^i(t) \mathbf{p}_0^i(x) + \Delta_{01}^i(t) \mathbf{p}_1^i(x).$$

Подставив сюда представления для $\mathbf{Q}(x, t)$ и, в частности, для $\mathbf{Q}_0(x, t)$, получим непосредственное уравнение для определения $\Delta_{00}^i(t)$ и $\Delta_{01}^i(t)$, а следовательно, и $\delta^i(t)$, $\alpha^i(t)$ ($i = \overline{1, n}$).

Замечание.

Решения остальных задач как с одной группой штампов, так и с несколькими, строятся аналогично тому, что было описано выше. Меняется только ортопроектор.

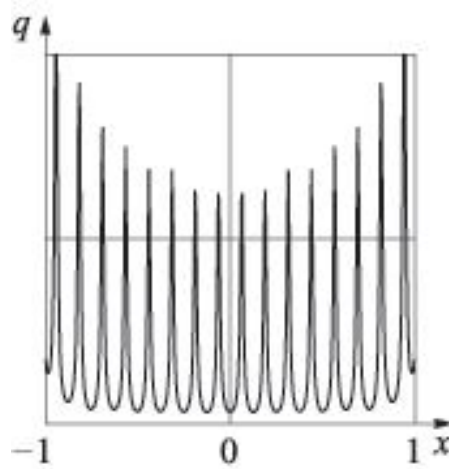


Рис. 2. Неоднородность описывается быстро осциллирующей функцией

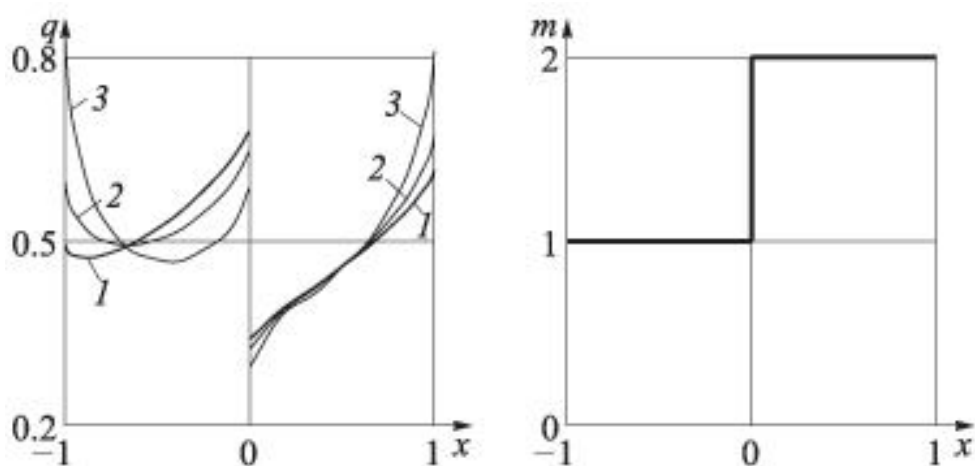


Рис. 3. Неоднородность описывается разрывной функцией

Анализ результатов.

Проведенные расчеты показали эффективность развитого подхода в случае, когда неоднородность задана быстро осциллирующей (рис. 2) и разрывной (рис. 3) функциями, что часто встречается в прикладных задачах. Этого невозможно добиться в рамках известных методов, применение которых дает ошибку в расчетах порядка 100%.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян, Н. Х. Контактные задачи теории ползучести / Н. Х. Арутюнян, А. В. Манжиров. – Ереван : Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
- [2] Manzhirov, A. V. Conformal contact between a punch and a layer with thin coating / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov // Prace IPPT – IFTR Reports. – 2008. – Vol. 2. – С. 248–249.
- [3] Казаков, К. Е. О конформном контакте слоистых оснований и штампов / К. Е. Казаков, А. В. Манжиров // Известия РАН. МТТ. – 2008. – № 3. – С. 227–240.
- [4] Manzhirov, A. V. Conformal contact between foundations and punches / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov // Topical Problems in Solid Mechanics / Ed. by N. K. Gupta, A. V. Manzhirov. – New Delhi : IIT Delhi, 2008. – P. 92–104.
- [5] Манжиров, А. В. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности / А. В. Манжиров, С. П. Курдина, С. Кухарский // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. – 2012. – Т. 12. – Вып. 4. – С. 80–89.
- [6] Манжиров, А. В. Системы смешанных интегральных уравнений с быстро осциллирующими функциями в исходных данных / А. В. Манжиров // Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XVI Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 16–19 октября 2012 г. – Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2012. – С. 66.
- [7] Манжиров, А. В. Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта / А. В. Манжиров, К. Е. Казаков, С. Кухарский // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2013. – С. 280–304.

Манжиров Александр Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва;

заведующий филиалом кафедры "Прикладная математика", МГТУ им. Н. Э. Баумана;
профессор кафедры "Высшая математика", МГУПИ

e-mail: manzh@inbox.ru

A. V. Manzhirov

**CONTACT PROBLEMS FOR FOUNDATIONS
WITH ARBITRARILY NONUNIFORM COVERS**

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences

Bauman Moscow State Technical University

Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science

Abstract. A contact problem of the interaction between a system of rigid punches and a viscoelastic foundation with a thin nonuniform elastic coating in the case of plane strain state is under research. Various versions of mathematical formulation are considered. A principal system of integral equations is obtained. It is reduced to an integral equation with a tensor kernel in a functional vector space. The effective projective spectral method is developed. A model problem is solved. Detailed calculations are performed. Qualitative conclusions are formulated.

Keywords: contact problems, viscoelasticity, coating, non-uniformity, rapid oscillation, system of mixed integral equations.

REFERENCES

- [1] *Арутюнян, Н. Х.* Contact problems of the theory of creep / N. X. Harutyunyan, A. V. Manzhirov. – Yerevan : Publishing House of NAS RA, 1999. – 318 p.
- [2] *Manzhirov, A. V.* Conformal contact between a punch and a layer with thin coating / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov // *Prace IPPT – IFTR Reports.* – 2008. – Vol. 2. – P. 248–249.
- [3] *Kazakov, K. E.* Conformal contact layered grounds and stamps / K. E. Kazakov, A. V. Manzhirov // *Proceedings of the Academy of Sciences. MRB.* – 2008. – № 3. – P. 227–240.
- [4] *Manzhirov, A. V.* Conformal contact between foundations and punches / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov // *Topical Problems in Solid Mechanics / Ed. by N. K. Gupta, A. V. Manzhirov.* – New Delhi : IIT Delhi, 2008. – P. 92–104.
- [5] *Manzhirov, A. V.* On the agreed contact punches and bodies with a coating having a complex surface profile / A. V. Manzhirov, S. P. Kurdina, S. Kukharsky // *Math. Sarat. Univ. New. Ser. Ser. Mat. Meh. Inf.* – 2012. – Vol. 12. – Issue 4. – P. 80–89.
- [6] *Manzhirov, A. V.* Mixed system of integral equations with rapidly oscillating functions in the source data / A. V. Manzhirov // *Contemporary problems of continuum mechanics. Abstracts XVI International Conference, Rostov-on-Don, 16-19 October 2012.* – Rostov-on-Don : Publ SFU, 2012. – P. 66.
- [7] *Manzhirov, A. V.* Mixed system of integral equations in the problem of multiple conformal contact / A. V. Manzhirov, K. E. Kazakov, S. Kukharsky // *Development of ideas in mechanics L. A. Galina.* – Izhevsk : Institute of Computer Science, 2013. – P. 280–304.

Manzhirov, Alexander Vladimirovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department for Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow;

Head of Branch Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University; Professor of Mathematics, Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science