

А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза

НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН
Дальневосточный федеральный университет*

Аннотация. Рассматривается деформирование материала, расположенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами, при повороте внутреннего цилиндра. Материал полагается несжимаемым и проявляющим нелинейные упругие и вязкие свойства. Для математического моделирования используется теория больших деформаций, основанная на дифференциальных определениях для обратимых и необратимых деформаций. Рассчитаны поля перемещений, напряжений, обратимых, необратимых и полных деформаций.

Ключевые слова: большие деформации, упругость, ползучесть, остаточные напряжения, необратимые деформации.

УДК: 539.374

Модель упругопластического тела предполагает независимость механических свойств материалов от времени. Однако у многих современных технологических материалов наблюдается заметное изменение их механических свойств от времени. Явление ползучести выражается либо в возрастании деформаций с течением времени при неизменной нагрузке, либо в падении напряжений при постоянной деформации. Свойство ползучести обнаруживают материалы различной природы. Физические механизмы ползучести у разных материалов различны. Например, бетон и полимеры ползут при нормальной температуре и обладают свойством ограниченной ползучести. Ползучесть металлов не ограничена и требует более высокой температуры. Накопление деформаций в теле, образующихся в результате ползучести, может приводить к искажению или даже разрушению этого тела. Таким образом, изучение процесса ползучести и связанных с ним явлений актуально и представляет значительный интерес для современных теоретических и прикладных наук.

1. Основные модельные соотношения. Для описания движения среды будем использовать модель больших деформаций [2], [3], [5]. В прямоугольной декартовой системе координат

Эйлера x_i кинематика среды задается соотношениями

$$\begin{aligned} d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\ \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij}(e_{ks}, \varepsilon_{ks}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$z_{ij} = A^{-1}[(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})B^2 + B(\varepsilon_{ik}e_{ks}e_{sj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{sj}) + e_{ik}\varepsilon_{ks}e_{st}e_{tj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{st}e_{tj}],$$

$$A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1,$$

$$E_1 = e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}.$$

В формулах (1) d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} и p_{ij} — их обратимая и необратимая составляющие; u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; $\frac{D}{Dt}$ — оператор используемой объективной производной тензоров по времени, которая приведена для произвольного тензора n_{ij} ; r_{ij} — компоненты тензора вращений. Считаем, что необратимые деформации p_{ij} могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями. Источник γ_{ij} в уравнении переноса для необратимых деформаций — скорость их накопления.

Далее полагаем, что необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования и определяются реологическими свойствами материала.

Напряжения полностью определяются обратимыми деформациями и связаны с ними формулой, аналогичной формуле Мурнагана для несжимаемой среды в нелинейной теории упругости:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (2)$$

В зависимости (2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p — добавочное гидростатическое давление, $W(e_{ij})$ — упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии). Зададим данную функцию в виде

$$\begin{aligned} W &= -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1 I_2 - \chi I_1^3 + \dots, \\ I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}. \end{aligned} \quad (3)$$

Формула $W(I_1, I_2)$ задает консервативный механизм деформирования, μ — модуль сдвига, b, χ — постоянные материала.

Считаем, что диссипативный механизм деформирования связан с вязкими и пластическими свойствами материалов. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести (где пластические деформации отсутствуют), и в областях разгрузки (где есть накопленные пластические деформации)

$$\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v.$$

Здесь ε_{ij}^p — скорость пластических деформаций, ε_{ij}^v — скорость деформаций ползучести. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим, введя потенциал

$V(\sigma_{ij})$ в форме степенного закона ползучести Нортонна [1]:

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|, \quad (4)$$

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, постоянные B и n являются параметрами ползучести материала.

Когда напряженное состояние в материале достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования меняется, появляется область пластического течения. В таком случае

$$\varepsilon_{ij}^v = 0, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p.$$

Связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями в таких областях согласно принципу максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad \lambda > 0. \quad (5)$$

Пренебрегая вязкими свойствами материала на стадии его пластического течения, в качестве поверхности нагружения выберем призму Треска

$$f(\sigma_{ij}) = \max|\sigma_i - \sigma_j| - 2k = 0, \quad (6)$$

где k — предел текучести материала.

Согласно уравнению переноса для необратимых деформаций из (1) в области разгрузки компоненты тензора пластических деформаций изменяются как при жестком движении тела, в области пластического течения таким же образом изменяются компоненты тензора деформаций ползучести.

С целью учета вязкости при пластическом течении среды можно воспользоваться соответствующим обобщением условия Треска [4]:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^p|, \quad (7)$$

где ε_k^p — главные значения тензора скоростей пластических деформаций, η — коэффициент вязкости.

2. Постановка задачи. Деформирование материала до начала пластического течения. В настоящей работе в рамках модели, описанной выше, изучается изотермическое деформирование материала, помещенного в зазор между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями (радиус внутренней $r = r_0$, внешней — $r = R$). В качестве примера рассмотрим случай поворота внутреннего жесткого цилиндра за счет приложенного к нему момента закручивания, в то время как внешний является неподвижным. В дальнейшем используется цилиндрическая система координат r, φ, z . На жестких поверхностях выполняется условие прилипания, тогда граничные условия зададим в виде

$$\vec{u}\Big|_{r=R} = \vec{v}\Big|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}\Big|_{r=r_0} = \frac{c(t)}{r_0^2}. \quad (1)$$

Считаем, что в рассматриваемом случае все точки среды движутся по окружностям, тогда согласно соотношениям (1) кинематика задается зависимостями

$$u_r = r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta,$$

$$d_{rr} = -\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad v_\varphi = r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r \partial t}, \quad \omega_{r\varphi} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r \partial t}, \quad r_{r\varphi} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(1 - e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 1},$$

где $\theta = \theta(r, t)$ — центральный угол закручивания.

Напряжения в среде через обратимые деформации согласно формулам (2) и (3) определяются зависимостями

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -(p + 2\mu) + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\varphi\varphi} - (2b + 3\chi)e_{rr}^2 + \mu e_{r\varphi}^2 - \\ &\quad - 2(b + \mu + 3\chi)e_{rr}e_{\varphi\varphi} - (\mu + 3\chi)e_{\varphi\varphi}^2 + \dots, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -(p + 2\mu) + 2(b + \mu)e_{\varphi\varphi} + 2be_{rr} - (\mu + 3\chi)e_{rr}^2 + \\ &\quad + \mu e_{r\varphi}^2 - 2(b + \mu + 3\chi)e_{rr}e_{\varphi\varphi} - (2b + 3\chi)e_{\varphi\varphi}^2 + \dots, \quad (3) \\ \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - (\mu + 3\chi)(e_{rr}^2 + e_{\varphi\varphi}^2) - 2\mu e_{r\varphi}^2 - 6\chi e_{rr}e_{\varphi\varphi} + \dots, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi} - (\mu - 2b)e_{r\varphi}(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) + \dots\end{aligned}$$

Здесь выписаны слагаемые до второго порядка по компонентам обратимых деформаций. Следствием формул (3) является соотношение

$$\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{r\varphi}} = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}.$$

В дальнейшем будем придерживаться квазистатического подхода, тогда уравнения равновесия в рассматриваемом случае можно записать в форме

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (4)$$

Интегрируя второе уравнение (4), сразу найдем, что

$$\sigma_{r\varphi} = c(t)/r^2, \quad (5)$$

то есть, если напряжение $\sigma_{r\varphi}$ задано на внутренней жесткой поверхности, то его распределение будет известно во всей области деформирования.

Используя уравнения переноса, из соотношений (1) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} &= 2p_{r\varphi} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t} \frac{r(1 - e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} - 2Bn\sigma_{r\varphi}Q^{\frac{n}{2}-1} \right) + Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{rr} - e_{\varphi\varphi})Q^{\frac{n}{2}-1} (1 - 2p_{rr}), \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= 2p_{r\varphi} \left(r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t} \frac{r(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} - 2Bn\sigma_{r\varphi}Q^{\frac{n}{2}-1} \right) - Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{rr} - e_{\varphi\varphi})Q^{\frac{n}{2}-1} (1 - 2p_{\varphi\varphi}), \\ \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} &= (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t} \frac{r(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} + 2Bn\sigma_{r\varphi}Q^{\frac{n}{2}-1} (1 - p_{rr} - p_{\varphi\varphi}), \\ \frac{\partial e_{rr}}{\partial t} &= e_{r\varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t} \frac{r(3 - e_{rr} - 2e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} + Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{rr}^2 + 2e_{r\varphi}^2 - e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - e_{rr}e_{\varphi\varphi})Q^{\frac{n}{2}-1}, \\ \frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= e_{r\varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t} \frac{r(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} + Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{\varphi\varphi}^2 + 2e_{r\varphi}^2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi} - e_{rr}e_{\varphi\varphi})Q^{\frac{n}{2}-1}, \\ \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t} \frac{r(e_{\varphi\varphi} - 1)^2}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} + Bn \frac{\sigma_{r\varphi}}{e_{r\varphi}} (e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2)Q^{\frac{n}{2}-1}, \\ Q &= \sigma_{r\varphi}^2 \left(4 + \left(\frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} \right)^2 \right)\end{aligned}$$

с неизвестными $p_{r\varphi}, p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, e_{r\varphi}, e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$ и θ . Эта система замыкается последним уравнением из (3) и соотношением $\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}$ и может быть проинтегрирована численно с использованием конечно-разностной схемы.

Пусть закручивающий момент сначала увеличивается по абсолютной величине ($0 \leq t \leq t_1$), затем уменьшается ($t_1 \leq t \leq t_2$) и далее становится постоянным ($t_2 \leq t$). Тогда функцию $c(t)$ зададим, например, в следующем виде (рис. 1):

$$\begin{cases} c(t) = -tr_0^2(2\sqrt{P_{\max}} - t), & 0 \leq t \leq t_2, \\ c(t) = -t_2r_0^2(2\sqrt{P_{\max}} - t_2), & t_2 \leq t. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $P_{\max} < k$ — максимальное значение закручивающего момента, $t_1 = 2\sqrt{P_{\max}}$.

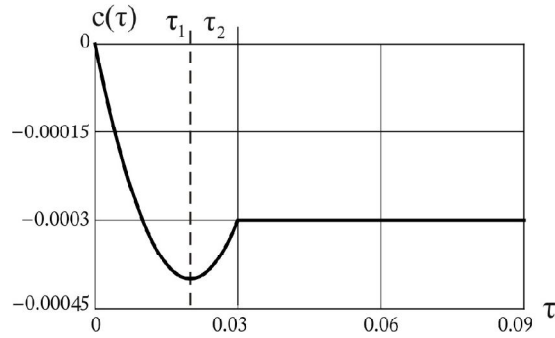


Рис. 1. Нагружающие усилия на $r = r_0$

На рис. 2–4 приведены графики распределения в зависимости от радиуса обратимых и необратимых деформаций и напряжений в моменты времени t_1, t_2 и $t_3 > t_2$, на рис. 5 — зависимость необратимых деформаций от времени при $r = r_0$.

Расчеты проводились в безразмерных переменных

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu} \quad (7)$$

при значении постоянных

$$\frac{k}{\mu} = 0.003, \quad \frac{b}{\mu} = 4, \quad \frac{\chi}{\mu} = 80, \quad \frac{r_0}{R} = 0.5, \quad n = 3, \quad \frac{BnR\mu^{n-1}\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\mu}} = 3.5. \quad (8)$$

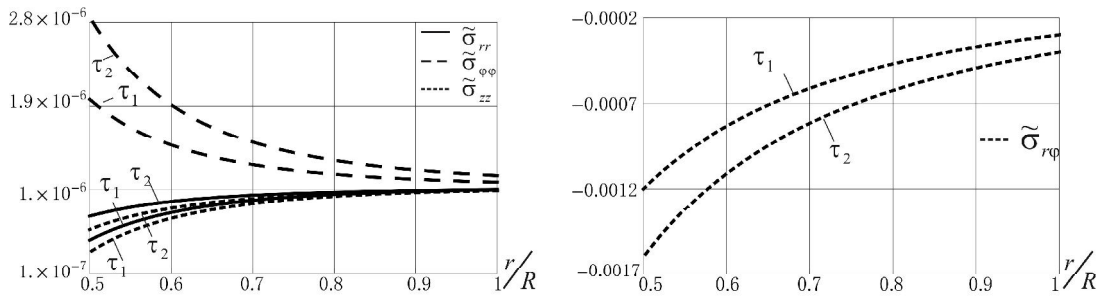


Рис. 2. Распределение напряжений в зависимости от радиуса

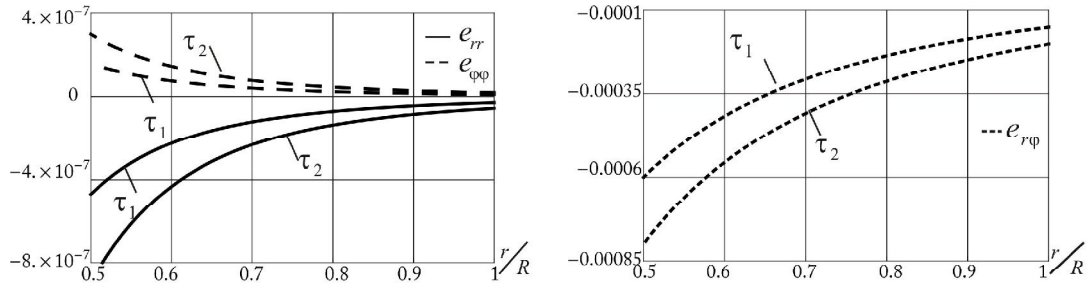


Рис. 3. Распределение обратимых деформаций в зависимости от радиуса

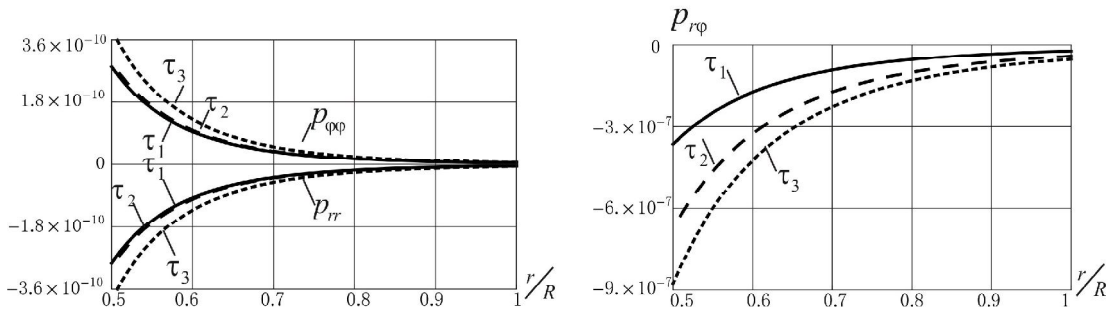


Рис. 4. Распределение необратимых деформаций в зависимости от радиуса

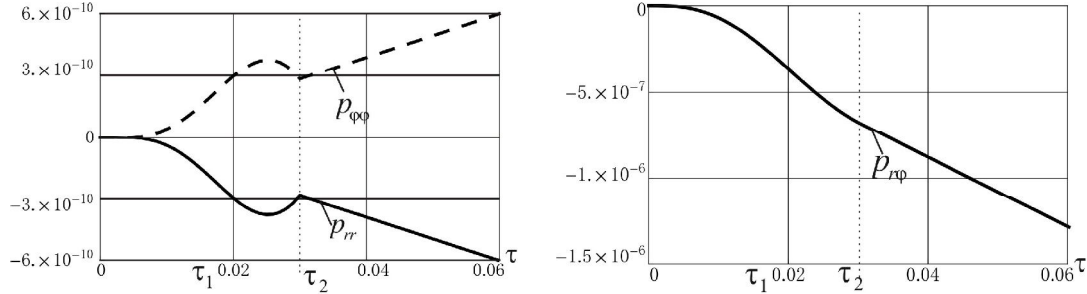


Рис. 5. Необратимые деформации при $r = r_0$

Если в законе нагружения задать $P_{\max} > k$, то в некоторый момент времени на внутренней поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности, при дальнейшем повороте жесткого цилиндра будет развиваться область пластического течения. В рассматриваемом случае оказалось невозможным использовать теорию идеальной пластичности. Классическое условие Треска (6) в нашем случае записывается в виде

$$((\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2) = 4k^2.$$

Согласно формулам Мурнагана компонента напряжений $\sigma_{r\varphi}$ имеет первый порядок малости по обратимым деформациям, а разность $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}$ — второй. Тогда согласно (5) следует, что соотношение условий пластичности не может выполняться сразу во всей пластической области. Таким образом, приходим к необходимости введения в модель дополнительных параметров. Указанную трудность можно преодолеть, например, вводом вязкости. Учёт вязкости на стадии пластического течения представляет интерес для дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Norton, F. N.* The creep steel of high temperature / F. N. Norton. — Y. : Mc Graw Hill, 1929. — 110 с.
- [2] *Бажин, А. А.* О ползучести и релаксации напряжений в окрестности микроструктуры в условиях гидростатического нагружения и разгрузки / А. А. Бажин, Е. В. Мурашкин // ДАН. — 2012. — № 6. — Т. 445. — С. 640–642.
- [3] *Буренин, А. А.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // ДАН. — 1996. — № 2. — Т. 347. — С. 199–201.
- [4] *Знаменский, В. А.* Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1963. — № 6. — С. 114–118.
- [5] *Ковтанюк, Л. В.* О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. — 2006. — № 4. — С. 87–93.

Бегун Александра Сергеевна,

кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории необратимого деформирования, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: asustinova@mail.ru

Ковтанюк Лариса Валентиновна,

доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией необратимого деформирования, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Лемза Александр Олегович,

аспирант, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: al-fencer@mail.ru

A. S. Begun, L. V. Kovtaniuk, A. O. Lemza

IRREVERSIBLE DEFORMATION OF THE MATERIAL BETWEEN THE RIGID COAXIAL CYLINDERS UNDER CREEP

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

Far Eastern Federal University

Abstract. The deformation of the elasticity-creep material between two the rigid cylinders is analyzed. The mathematical model of large deformation is used, which is based on the differential definitions for reversible and irreversible deformations. The field displacements, stresses, reversible, irreversible and total strains are calculated.

Keywords: elasticity, viscoplasticity, large deformations, residual stresses.

REFERENCES

- [1] *Norton, F. N.* The creep steel of high temperature / F. H. Norton. — Y. : Mc Graw Hill, 1929. — 110 c.
- [2] *Bazhin, A. A.* Creep and stress relaxation in the vicinity of a micropore under the conditions of hydrostatic loading and unloading / A. A. Bazhin, E. V. Murashkin // DAN. — 2012. — № 6. — T. 445. — P. 640–642.
- [3] *Burenin, A. A.* A Simple Model of Finite Strains in an Elastoplastic Medium / A. A. Burenin, G. V. Bykovtsev, and L. V. Kovtanyuk // Dokl. Akad. Nauk. — 1996. — Vol. 347. — № 2. — P. 199–201.
- [4] *Znamenskii, V. A.* On the equations a viscoplastic body with piecewise-linear potentials / V. A. Znamenskii, D. D. Ivlev // Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Mashinostroenie. — 1963. — № 6. — P. 114–118.
- [5] *Kovtanyuk, L. V.* On the theory of large elastoplastic deformations of materials with the temperature and rheological effects taken into account / L. V. Kovtanyuk, A. V. Shitikov // Vestnik Dal'nevostochn. Otd. Ross. Akad. Nauk. — 2006. — № 4. — P. 87–93.

Begun, Aleksandra Sergeevna

Candidate of Phys.&Math., Junior Researcher, Laboratory of Irreversible Deformation, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Kovtaniuk, Larisa Valentinovna

Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Lemza, Aleksandr Olegovich

Postgraduate student, Far Eastern Federal University, Vladivostok