Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 22–36

М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОРЕЛЯ В КЛАССЕ КВАЗИЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН

Аннотация. Вводится класс W квазицелых функций и исследуются свойства преобразования Бореля в этом классе. Квазицелые функции экспоненциального типа впервые были рассмотрены А. Пфлюгером в 1935 г. [2]. Более поздние работы в этом направлении нам не известны. Выделение из класса целых функций экспоненциального типа подкласса W функций, суммируемых с квадратом на вещественной оси, позволило Пэли и Винеру получить фундаментальные результаты в теории интеграла Фурье, которые стали затем очень сильным инструментом в теории базиса функций [3]. Подкласс W для квазицелых функций экспоненциального типа вводится так же, как и для целых функций, т. е. к этому подклассу отнесены квазицелые функции, суммируемые с квадратом на вещественной оси. В теории целых функций экспоненциального типа целая функция представляется как преобразование Бореля от некоторой функции, определенной на комплексной плоскости и аналитической вне некоторого круга, по которому берется соответствующий интеграл [3], [4]. Если целая функция принадлежит к классу W, то окружность, по которой происходит интегрирование, можно прижать к отрезку мнимой оси, совпадающему с диаметром окружности. При этом преобразование Бореля превращается в обычное преобразование Фурье на отрезке. Таким путем Пэли и Винеру удалось связать преобразование Фурье на отрезке с мощным аппаратом теории аналитических функций. Для квазицелых функций экспоненциального типа возникает похожая ситуация. Но здесь, для того чтобы сделать функцию, ассоциированную по Борелю с рассматриваемой квазицелой функцией, однозначной, приходится рассматривать ее на римановой поверхности логарифма, где она аналитична вне некоторой спирали определенного радиуса. Если теперь потребовать, чтобы квазицелая функция была суммируемой с квадратом на вещественной оси, то (как и в теории Пэли и Винера) спираль можно прижать к бесконечной системе отрезков, расположенных на мнимой оси на листах римановой поверхности логарифма один над другим. Следующий шаг в построении теории заключается в том, чтобы от римановой поверхности логарифма перейти к обычной комплексной плоскости с одним разрезом на мнимой оси (как в теории Пэли и Винера) вне которого функция, ассоциированная по Борелю с квазицелой функцией, аналитична. Тогда для обеспечения однозначности этой функции на рассматриваемой плоскости в ней нужно провести соответствующий разрез. Этот разрез, как правило, выбирается совпадающим либо с отрицательной, либо с положительной частью вещественной оси. Результаты Пэли-Винера получаются из теории как частный случай.

[1]Статья является дополненным и исправленным вариантом работы [1], которая, по не зависящим от автора причинам, вышла только в электронном виде.

Поступила 10.08.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00118).

Ключевые слова: преобразование Бореля, целая функция, квазицелая функция.

УДК: 517.53

Класс W квазицелых функций

Квазицелую функцию экспоненциального типа $G(\lambda)\quad (\lambda=\xi+i\zeta,\ \lambda=te^{i\theta})$, т. е. [2] аналитическую и однозначную на римановой поверхности логарифма $\{K(\lambda):\ \lambda, 0<|\lambda|<\infty, |\arg\lambda|<\infty\}$, растущую на бесконечности, как целую функцию экспоненциального типа отнесем к классу W, если ее тип равен 1 и если она удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|G(\xi)|^2d\xi<\infty. \tag{1.1}$$

Такое определение класса W для квазицелых функций можно рассматривать как естественное обобщение класса W для целых функций [4].

Через $g(\omega)\quad (\omega=x+iy,\ \omega=ue^{i\phi})$ обозначим функцию, ассоциированную по Борелю [2] с квазицелой функцией $G(\lambda)$. Легко показать (следуя аналогичной выкладке для целых функций [5]), что если квазицелая функция $G(\lambda)\in W$, то функция $g(\omega)$ аналитична и однозначна на римановой поверхности логарифма $\{K(\omega):\ \omega, 0<|\omega|<\infty, |\arg\omega|<\infty\}$, все листы которой разрезаны по отрезкам $\{\overline{\Gamma}:\ x=0,\ |y|\le 1\}$.

Функции $G(\lambda)$ и $g(\omega)$ удобно рассматривать не на римановых поверхностях логарифма $K(\lambda)$ и $K(\omega)$, а в комплексных плоскостях $C(\lambda)$ и $C(\omega)$, на которых проведены соответствующие разрезы, обеспечивающие однозначность этих функций.

Разрез κ в плоскости $C(\lambda)$ может быть проведен по любому лучу, выходящему из начала координат. Будем считать далее, что он совпадает с отрицательной частью вещественной оси, т. е. $\{\kappa:\ \zeta=0,\ \xi\le 0\}$.

В качестве разреза в плоскости $C(\omega)$ выберем T-образный разрез T, образованный отрезком мнимой оси $\overline{\Gamma}$ и лучом $\{\ell:\ y=0,\ x\le 0\}$.

Пусть S произвольный контур, охватывающий разрез T и проходимый в положительном направлении (против часовой стрелки). Тогда в силу свойства (1.1) формулы преобразования Бореля [2] могут быть представлены следующим образом:

$$G(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}g(\omega)e^{\lambda\omega}d\omega\quad (Re\lambda>0), \tag{1.2}$$

$$g(\omega)=\begin{cases}\int\limits_0^\infty G(\xi)e^{-\xi\omega}d\xi(Re\omega>0),\\ -\int\limits_0^\infty G(\xi e^{\mp i\pi})e^{\xi\omega}d\xi\quad (Re\omega<0,\ \frac{\pi}{2}\pm\arg\omega\pi).\end{cases} \tag{1.3}$$

Расположим бесконечные ветви контура S по верхнему и нижнему берегам разреза ℓ и будем стягивать S к разрезу $\overline{\Gamma}$, следуя аналогичным выкладкам в теории целых функций из класса W [3], [4], [5].

Через

$$\begin{gathered} g_y^*(y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{2\pi}[g(iy+\varepsilon)-g(iy-\varepsilon)]\quad (\varepsilon>0),\\ \operatorname{supp}g_y^*(y)\in\overline{\Gamma};\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} g_x^*(-u)=\tfrac{1}{2\pi i}[g(ue^{-i\pi})-g(ue^{i\pi})],\\ \operatorname{supp}g_x^*(-u)\in\ell^-\end{gathered} \tag{1.5}$$

обозначим скачки функции $g(\omega)$ на разрезах $\overline{\Gamma}$ и ℓ соответственно. Тогда вместо формулы (1.2) получим следующее представление для квазицелых функций $G(\lambda)$:

$$G(\lambda) = G_y(\lambda) + G_x(\lambda) \quad (\mathrm{Re}\lambda > 0), \tag{1.6}$$

где функции

$$G_y(\lambda) = \int_{-1}^{1} g_y^*(y) e^{i\lambda y} dy \quad (\lambda \in C(\lambda)), \tag{1.7}$$

$$G_x(\lambda) = \int_{0}^{\infty} g_x^*(-u) e^{-\lambda u} du \quad (\mathrm{Re}\lambda > 0) \tag{1.8}$$

(функция $G_x(\lambda)$, очевидно, аналитически продолжаются во всю область аналитичности и однозначности $C(\lambda)/\ell$).

С помощью второго равенства (1.3) и в соответствии с определением (1.5) функции $g_x^*(-u)$ легко получить формулу обращения интеграла (1.8)

$$g_x^*(-u) = \int_{0}^{\infty} G_x^*(-t) e^{-tu} dt \quad (u > 0), \tag{1.9}$$

где через

$$G_x^*(-t) = \frac{1}{2\pi i}\left[G_x(te^{-i\pi}) - G_x(te^{i\pi})\right] \tag{1.10}$$

обозначен скачок функции $G_x(\lambda)$ на разрезе κ.

Рассмотрим интегралы (1.7)–(1.9). В силу двойственности Пэли–Винера [4], [5] функция $G_y(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.1) тогда и только тогда, когда $g_y^*(y) \in L_2(\Gamma)$.

Подобным свойством обладает и пара функций $G_x(\lambda)$, $g_x^*(-u)$. А именно функция $G_x(\xi) \in L_2(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда $g_x^*(-u) \in L_2(\ell)$. В самом деле, если функция $G_x(\xi) \in L_2(0,\infty)$, то и $G_x^*(-t) \in L_2(0,\infty)$. На основании формулы (1.9) и предельных соотношений для преобразования Лапласа [6] заключаем, что тогда функция $g_x^*(-u) \in L_2(\ell)$. Причем, так как функция $G_x(\lambda)$ имеет не более чем логарифмическую особенность в начале координат и, следовательно, функция $G_x^*(-t)$ ограничена в нуле, то функция $g_x^*(-u)$ убывает на бесконечности, по крайней мере, как $|u|^{-1}$. Обратное утверждение устанавливается так же, только на основании формулы (1.8).

Как отмечалось выше, разрезы κ и ℓ, обеспечивающие однозначность функций $G(\lambda)$ и $g(\omega)$, вообще могут быть проведены по любым лучам, выходящим из начала координат в комплексных плоскостях $C(\lambda)$ и $C(\omega)$ соответственно. В частности, если разрез ℓ направить по лучу $x \geq 0$, а разрез κ — по лучу $\xi \geq 0$, то для функции $G_x(\lambda)$ вместо (1.8) можно получить следующее представление (интеграл берется по лучу $ue^{i\pi}$):

$$G_x(\lambda) = \int_{0}^{\infty e^{i\pi}} g_x^*(u) e^{-\lambda u e^{i\pi}} d(ue^{i\pi}) \quad (Re\lambda < 0). \tag{1.11}$$

Здесь

$$\begin{gathered} g_x^*(u) = \tfrac{1}{2\pi i}[g(u) - g(ue^{2\pi i})], \\ \operatorname{supp} g_x^*(u) \in [0,\infty) \end{gathered} \tag{1.12}$$

— скачок функции $g(\omega)$ на разрезе $x \geq 0$.

Формула обращения интеграла (1.11) на этот раз получается с помощью первого равенства (1.3)

$$g_x^*(u) = \int\limits_0^\infty G_x^*(t) e^{-tu} dt \quad (u > 0), \tag{1.13}$$

где

$$G_x^*(t) = \frac{1}{2\pi i}[G_x(te^{2\pi i}) - G_x(t)] \tag{1.14}$$

— скачок функции $G_x(\lambda)$ на разрезе $\xi \geq 0$.

Ясно, что пара функций $G_x(\lambda)$ и $g_x^*(u)$ (1.11) обладают следующим свойством (аналогичным установленному выше для пары функций $G_x(\lambda)$ и $g_x^*(-u)$ (1.8)): $G_x(\xi) \in L_2(-\infty, 0)$ тогда и только тогда, когда $g_x^*(u) \in L_2(0, \infty)$.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Лемма. *Квазицелая функцию минимального типа $G_x(\lambda)$ удовлетворяет условию (1) тогда и только тогда, когда функция, ассоциированная с ней по Борелю, имеет суммируемые с квадратами скачки $g_x^*(-u) \in L_2(\ell), g_x^*(u) \in L_2(0, \infty)$.*

Так как квазицелую функцию из класса W можно представить в виде суммы целой функции из класса W и квазицелой функции минимального типа (удовлетворяющей условию (1.1)), то на основе теоремы Пэли-Винера и леммы получаем следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы квазицелая функция $G(\lambda) \in W$ необходимо и достаточно, чтобы ассоциированная с ней по Борелю функция $g(\omega)$ имела суммируемые с квадратами скачки (1.4), (1.5) и (1.12).*

Замечание 1. *В соответствии с формулой (1.2), когда контур S стягивается к разрезу $\overline{\Gamma}$, целая функция $G_y(\lambda)$ может быть представлена в виде*

$$G_y(\lambda) = \lim_{r \to 0} \left\{ \int\limits_{-1+r}^{1+r} q_y^*(y) e^{i\lambda y} dy + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_+} q(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_-} q(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega \right\}. \tag{1.15}$$

Контурные интегралы берутся по окружностям c_+ и c_- малого радиуса $r > 0$, охватывающим соответствующие концы $y = \pm 1$ отрезка $\overline{\Gamma}$. Если квазицелая функция $G(\lambda) \in W$, то функция $g(\omega)$ имеет особенности логарифмического типа на концах отрезка $\overline{\Gamma}$, и, следовательно, в этом случае контурные интегралы равны нулю. Если же квазицелая функция $G(\lambda) \notin W$, но не более чем степенного роста на вещественной оси, то ассоциированная с ней по Борелю функция $g(\omega)$ имеет степенные особенности в точках $\{x = 0, y = \pm 1\}$. В этом случае функция $g_y^*(y)$ имеет в точках $y = \pm 1$ разрывы типа δ-функций или ее производных (порядок которых зависит от скорости роста на бесконечности функции $G(\xi)$). Эти утверждения вполне аналогичны известным в теории целых функций экспоненциального типа [7].

Замечание 2. *В теории целых функций аналога леммы нет. Точнее, не существует целой функции минимального типа со свойством (1.1).*

Функция $g(\omega)$, ассоциированная по Борелю с квазицелой функцией $G(\lambda) \in W$, полностью определяется по своим скачкам (1.4), (1.5) (или (1.12)) на разрезе T следующим образом:

$$g(\omega) = g_y(\omega) + g_x(\omega) \quad (\omega \in C(\omega)T), \tag{1.16}$$

где

$$g_y(\omega) = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{g_y^*(y)}{iy - \omega} dy \quad (\omega \in C(\omega)\overline{\Gamma}), \tag{1.17}$$

$$g_x(\omega) = \int\limits_0^\infty \frac{g_x^*(-u)}{u + \omega} du \quad (\omega \in C(\omega)\ell). \tag{1.18}$$

Представление (1.16) получается в результате подстановки равенства (1.6) в формулу (1.3).

Квазицелая функция минимального типа $G_x(\lambda)$ также определяется по своим скачкам $G_x^*(-t)$ или $G_x^*(t)$. В частности, подставляя (1.9) в (1.8), получим

$$G_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{G_x^*(-t)}{\lambda + t}\, dt. \tag{1.19}$$

2. Равенства типа Парсеваля

Пусть функция $h^*(y) \in L_2(-\infty, \infty)$ (носитель функции $h^*(y)$, вообще говоря, может быть любым), а $H(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)$ — ее преобразование Фурье. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} h(u) &= \int_0^\infty H(\xi) e^{-\xi u} d\xi \quad (u > 0), \\ h(-u) &= -\int_{-\infty}^0 H(\xi) e^{\xi u} d\xi \quad (u > 0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тогда имеется следующее равенство типа Парсеваля, которое получается на основании формулы (1.8) и первой формулы (2.1):

$$\int_0^\infty g_x^*(-u)\overline{h(u)}\, du = \int_0^\infty G_x(\xi)\overline{H(\xi)}\, d\xi. \tag{2.2}$$

Примем в (1.11) $\lambda = \xi$ и заменим интегрирование по лучу $ue^{i\pi}$ интегрированием по переменной $u \geq 0$. Тогда получим

$$G_x(-\xi) = -\int_0^\infty g_x^*(u) e^{\xi u} du \quad (\xi < 0). \tag{2.3}$$

Пользуясь формулой (2.3) и второй формулой (2.1), установим еще одно равенство типа Парсеваля:

$$\int_0^\infty g_x^*(u)\overline{h(-u)}\, du = \int_{-\infty}^0 G_x(-\xi)\overline{H(\xi)}\, d\xi. \tag{2.4}$$

Складывая равенства (2.2) и (2.4) и переходя от переменной интегрирования $u \geq 0$ к переменной x, определенной на всей вещественной оси, получим равенство типа Парсеваля вида

$$\int_{-\infty}^\infty g_x^*(-x)\overline{h(x)}\, dx = \int_{-\infty}^\infty G_x(|\xi|)\overline{H(\xi)}\, d\xi. \tag{2.5}$$

Отсюда в силу обычного равенства Парсеваля для функций, интегрируемых с квадратами, следует равенство

$$\int_{-\infty}^\infty g_x^*(-x)\overline{h(x)}\, dx = 2\pi \int_{-\infty}^\infty g_x(y)\overline{h^*(y)}\, dy. \tag{2.6}$$

Заметим, что здесь через $g_x(y)$ обозначено преобразование Фурье функции $G_x(|\xi|)$.

Складывая равенство (2.6) с известным равенством Парсеваля

$$2\pi\int_{-1}^{1} g_y^*(y)\overline{h^*(y)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\xi)\overline{H(\xi)}\,d\xi, \tag{2.7}$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} g_x^*(-x)\overline{h(x)}\,dx + 2\pi\int_{-1}^{1} g_y^*(y)\overline{h^*(y)}\,dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_y(\xi) + G_x(|\xi|)\right]\overline{H(\xi)}\,d\xi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

из которого на основании (2.6) получаем следующее равенство типа Парсеваля:

$$\begin{aligned} &2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \left[g_y^*(y) + g_x(y)\right]\overline{h^*(y)}\,dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_y(\xi) + G_x(|\xi|)\right]\overline{H(\xi)}\,d\xi. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $G(\xi) = ReG(\xi)$ при $\xi \geq 0$ и что функция $ReG(\xi)$ четна. Тогда $G_y(\xi) + G_x(|\xi|) = ReG(\xi)$ и равенство (2.9) приобретает следующий, более компактный вид:

$$\begin{aligned} &2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \left[g_y^*(y) + g_x(y)\right]\overline{h^*(y)}\,dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Re[G(\xi)]\overline{H(\xi)}\,d\xi. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Рассмотрим важные частные случаи полученных равенств типа Парсеваля.

1. Пусть функция $h^*(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-i\lambda y}$, где λ — вещественный параметр. Тогда $H(\xi) = \delta(\xi - \lambda)$— образ Фурье этой функции, а функции $h(u)$ и $h(-u)$, согласно определениям (2.1), равны

$$h(u) = \begin{cases} e^{-\lambda u}(\lambda > 0), \\ 0(\lambda < 0), \end{cases} \qquad h(-u) = \begin{cases} -e^{\lambda u}(\lambda < 0), \\ 0(\lambda > 0). \end{cases} \tag{2.11}$$

В этом случае равенства типа Парсеваля (2.2) и (2.4) превращаются в формулы (1.8) и (2.3) соответственно, а из равенства (2.10) получаем следующую важную формулу:

$$ReG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [g_y^*(y) + g_x(y)]e^{i\lambda y}dy. \tag{2.12}$$

Перейдем в соотношениях (2.11) от переменной $u \geq 0$ к переменной x, определенной на всей вещественной оси. Полученную функцию $h(x)$ обозначим через $E(\lambda x)$. Она, очевидно, равна

$$E(\lambda x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}\,(\lambda, x > 0), \\ -e^{-\lambda x}\,(\lambda, x < 0). \end{cases} \tag{2.13}$$

Тогда, пользуясь равенством (2.8), получим другое представление для функции $ReG(\lambda)$:

$$ReG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g_x^*(-x)E(\lambda x)\,dx + \int_{-1}^{1} g_y^*(y)e^{i\lambda y}dy. \tag{2.14}$$

2. Пусть функция $H(\xi) = e^{-\xi\omega}$. По формуле (2.1) находим $h(u) = (u + \omega)^{-1}$. На основе равенства типа Парсеваля (2.2) получаем

$$
\begin{aligned}
g_x(\omega) &= \int\limits_0^\infty \tfrac{g_x^*(-u)}{u+\omega}\, du = \\
&= \int\limits_0^\infty G_x(\xi) e^{-\xi\omega} d\xi \quad (Re\omega > 0).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Очевидно, что интеграл, стоящий слева в равенстве (2.15), является аналитическим продолжением интеграла, стоящего справа, во всю область аналитичности и однозначности функции $g_x(\omega)$.

3. Примеры

Приведем несколько простых и важных примеров преобразования Бореля в классе квазицелых функций.

1. $G_x(\lambda) = \ln\lambda$ – квазицелая функция минимального типа. По формуле (1.3) находим функцию, ассоциированную с ней по Борелю:

$$
g_x(\omega) = \int\limits_0^\infty \ln t\, e^{-t\omega} dt = -\frac{\ln\omega + \gamma}{\omega} \quad (\mathrm{Re}\omega > 0). \tag{3.1}
$$

Здесь $\gamma = e^C$ (C — постоянная Эйлера). Функция $g_x(\omega)$, очевидно, аналитически продолжается во всю область аналитичности и однозначности $C(\omega)\backslash\ell$ (для определенности считаем, что разрез ℓ направлен по лучу $x \le 0$).

Восстановим функцию $\ln\lambda$. С этой целью рассмотрим следующий интеграл, взятый по контуру, охватывающему разрез ℓ, и составленный из окружности c_r малого радиуса r с центром в начале координат и двух лучей, проведенных по верхнему и нижнему берегам разреза ℓ:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{-r} g_x(ue^{-i\pi}) e^{\lambda u e^{-i\pi}} d(ue^{-i\pi}) - \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{-r} g_x(ue^{i\pi}) e^{\lambda u e^{i\pi}} d(ue^{i\pi}) + \\
&+ \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_r} g(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega = \int\limits_r^\infty g_x^*(-u) e^{-\lambda u} du -
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\ln r + i\phi + \gamma)\, d\phi = -\int\limits_r^\infty \frac{e^{-\lambda u}}{u}\, du - (\ln r + \gamma) = \mathrm{Ei}(-\lambda r) - (\ln r + \gamma).
$$

Здесь через $g_x^*(-u) = -\frac{1}{u}$ обозначен скачок (1.5) функции $g_x(\omega)$ на разрезе $ue^{i\pi} \le r$, а через $\mathrm{Ei}(-\lambda r)$ — интегральная показательная функция. Переходя в (3.2) к пределу при $r \to 0$ (на основе асимптотического представления [8] для функции $Ei(-\lambda r)$), получим искомую функцию $\ln\lambda$.

Скачок $g_x^*(-u)$ функции $g_x(\omega)$ на всем разрезе ℓ можно представить в смысле обобщенных функций следующим образом:

$$
g_x^*(-u) = -\left(\frac{1}{u} + \gamma\delta(u)\right). \tag{3.3}
$$

Подставив (3.3) в формулу (1.8), получим квазицелую функцию $\ln\lambda$, а подстановка (3.3) в формулу (1.18) дает функцию $g_x(\omega)$ (3.1), определенную во всей области $C(\omega)\backslash\ell$.

2. Пусть $G_x(\lambda{+}a)$ ($a > 0$ вещественное) — квазицелая функция минимального типа с точкой ветвления $\lambda = -a$. Обозначим $g_{ax}(\omega)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $G_x(\lambda + a)$. По формуле (1.3) находим

$$
\begin{gathered}
g_{ax}(\omega) = \int\limits_{-a}^\infty G_x(\xi + a) e^{-\xi\omega} d\xi = e^{a\omega} g_x(\omega) \\
(\mathrm{Re}\omega > 0),
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

где $g_x(\omega)$ — функция, ассоциированная по Борелю с квазицелой функцией $G_x(\lambda)$, имеющей точку ветвления в начале координат. Поскольку функция $g_x(\omega)$ аналитична и однозначна в области $C(\omega)\backslash\ell$, то и функция $g_{ax}(\omega)$ аналитична и однозначна в этой же области.

Учитывая равенство (3.4), на основании формулы (1.18) получим следующее представление функции $g_x(\omega)$ в области $C(\omega)\backslash\ell$:

$$g_{ax}(\omega) = e^{a\omega} \int_0^\infty \frac{g_x^*(-u)}{u+\omega}\, d\omega, \tag{3.5}$$

где $g_x^*(-u)$ — скачок функции $g_x(\omega)$ на разрезе ℓ. Кроме того, из равенства (3.4) сразу следует формула для скачка функции $g_{ax}(\omega)$ на разрезе ℓ:

$$g_{ax}^*(-u) = e^{-au} g_x^*(-u). \tag{3.6}$$

Пусть, например, функция $G_x(\lambda + a) = \ln(\lambda + a)$. Тогда функция, ассоциированная с ней по Борелю,

$$g_{ax}(\omega) = -e^{-a\omega}\, \frac{\ln\omega + \gamma}{\omega} \quad (\omega \in C(\omega)\backslash\ell), \tag{3.7}$$

а скачок функции (3.7) на разрезе ℓ равен

$$g_{ax}^*(-u) = -e^{-au}\left(\frac{1}{u} + \gamma\delta(u)\right). \tag{3.8}$$

3. Пусть функция $G_x(t) = \ln|a+t|$ — вещественная часть квазицелой функции $\ln(a+t)$ ($a > 0$ вещественное). Интегрируя по частям, найдем

$$g_{ax}(\omega) = \int_0^\infty \ln|a+t| e^{-t\omega} dt = \frac{\ln a - e^{a\omega}\mathrm{Ei}(-a\omega)}{\omega} \quad (\mathrm{Re}\omega > 0). \tag{3.9}$$

Функция $g_{ax}(\omega)$, очевидно, аналитически продолжается во всю область аналитичности и однозначности $C(\omega)\backslash\ell$ и асимптотически равна при $|\omega| \to 0$ функции (3.7). Следовательно, скачки этих функций на разрезе ℓ совпадают, то есть одному скачку (3.8) соответствуют две разные функции (3.7) и (3.9). На самом деле функции (3.7) и (3.9) определяются по разным формулам: функция (3.7) — по формуле (3.5), а функция (3.9) получается подстановкой (3.8) в формулу (1.8). Заметим, что функции (3.7) и (3.9) отличаются на целую функцию.

4. Функция $G_x(t) = \ln|a - t|$ — вещественная часть квазицелой функции $\ln(a-t)$. По формуле (1.3) находим

$$g_{ax}(\omega) = \frac{\ln a - e^{-a\omega}\,\mathrm{Ei}^*(a\omega)}{\omega} \quad (\omega \in C(\omega)\backslash\ell), \tag{3.10}$$

$\mathrm{Ei}^*(a\omega)$— интегральная показательная функция [8]. При $|\omega| \to 0$ имеется асимптотическое равенство

$$g_{ax}(\omega) \approx -e^{-a\omega}\, \frac{\ln\omega + \gamma}{\omega}. \tag{3.11}$$

Следовательно, скачок функции (3.10) на разрезе ℓ равен

$$g_{ax}^*(-u) = -e^{au}\left(\frac{1}{u} + \gamma\delta(u)\right). \tag{3.12}$$

5. Рассмотрим функцию $G_x(t) = \ln|a^2 - t^2|$ — вещественную часть квазицелой функции $\ln(a^2 - t^2)$.

Ясно, что функция, ассоциированная с ней по Борелю, равна сумме функций (3.9) и (3.10), а ее скачок на разрезе ℓ — сумме скачков (3.8) и (3.12). Учитывая это и приняв в равенстве (2.6) функцию $h^*(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-ity}$, получим следующие две формы представления функции $\ln|a^2 - t^2|$:

$$\ln|a^2 - t^2| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^*_{ax}(-x)E(tx)\,dx, \tag{3.13}$$

где функция

$$g^*_{ax}(-x) = \begin{cases} -2\left(\frac{1}{x} + \gamma\delta(x)\right)\cosh ax & (x > 0), \\ 2\left(\frac{1}{x} + \gamma\delta(x)\right)\cosh ax & (x < 0) \end{cases} \tag{3.14}$$

и

$$\ln|a^2 - t^2| = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\cos ay}{|y|} + 2\gamma\delta(y)\right] e^{ity}dy. \tag{3.15}$$

6. Пусть теперь $P(\lambda) = e^{i\lambda}\ln\lambda$ — квазицелая функция экспоненциального типа, равного 1. Она аналитична и однозначна в области $C(\lambda)\backslash\kappa$ (напомним, что разрез κ совпадает с полуосью $\xi \leq 0$). Функция $P(\lambda)$ является примером простого и важного класса квазицелых функций, представимых в виде произведения целой функции и квазицелой функции минимального типа. Функция $P(\lambda) \notin W$, так как она не удовлетворяет условию (1.1). Примером квазицелой функции, принадлежащей классу W, может служить, например, функция $\frac{\sin\lambda}{\lambda}\ln(\pi^2 - \lambda^2)$.

По формулам (1.3) найдем функцию, ассоциированную по Борелю с $P(\lambda)$:

$$\begin{gathered} p(\omega) = \int\limits_0^{\infty} \ln t\, e^{-(\omega-i)t}dt = -\frac{\ln(\omega-i)+\gamma}{\omega-i} \\ (\mathrm{Re}\omega > 0), \end{gathered} \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered} p(\omega) = -\int\limits_0^{\infty} \ln\left(te^{\mp\pi}\right) e^{-(-\omega+i)t}dt = \frac{\ln(-\omega+i)\pm i\pi+\gamma}{-\omega+i} \\ (\mathrm{Re}\omega < 0,\ \tfrac{\pi}{2} \pm \arg\omega\pi). \end{gathered} \tag{3.17}$$

Полагая в формулах (3.16), (3.17) $\omega = \varepsilon + iy$ $(\varepsilon > 0)$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, определим скачок $p^*_y(y)$ (1.4) функции $p(\omega)$ на мнимой оси. В терминах обобщенных функций его можно представить в виде

$$p^*_y(y) = \frac{1}{y-1} - \left(i\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\delta(y-1) \quad (0 \leq y \leq 1).$$

По формуле (1.5) найдем скачок функции $p(\omega)$ на луче ℓ:

$$p^*_x(-u) = -\frac{1}{i+u}.$$

Таким образом, функция $p(\omega)$ аналитична и однозначна в комплексной плоскости $C(\omega)$, разрезанной по отрезку мнимой оси $0 \leq y \leq 1$ и лучу ℓ.

Теперь по формулам (1.7), (1.8) можно восстановить целую $P_y(\lambda)$ и квазицелую $P_x(\lambda)$ части функции $P(\lambda)$:

$$P_y(\lambda) = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{y-1} - \left(i\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\delta(y-1)\right] e^{i\lambda y}dy = -\left[\mathrm{Ei}(-i\lambda) - \ln\lambda\right] e^{i\lambda} \quad (\lambda \in C(\lambda)),$$

$$P_x(\lambda) = -\int_0^\infty \frac{1}{u+i} e^{-\lambda u} du = \mathrm{Ei}(-i\lambda) e^{i\lambda}$$

$$(\lambda \in C(\lambda)\backslash\kappa).$$

Аналогично рассмотрим другую квазицелую функцию $Q(\lambda) = e^{-i\lambda} \ln\lambda \notin W$. Ассоциированная с ней по Борелю функция $q(\omega)$ имеет вид

$$q(\omega) = -\frac{\ln(\omega+i)+\gamma}{\omega+i}.$$

Ясно, что она будет аналитична и однозначна в комплексной плоскости $C(\omega)$, разрезанной по отрезку мнимой оси $-1 \le y \le 0$ и лучу ℓ.

Точно так же восстановим целую и квазицелую составляющие квазицелой функции $Q(\lambda)$:

$$Q_y(\lambda) = -\left[\mathrm{Ei}(i\lambda) - \ln\lambda\right] e^{-i\lambda} \quad (\lambda \in C(\lambda)),$$

$$Q_x(\lambda) = \mathrm{Ei}(i\lambda) e^{-i\lambda} \quad (\lambda \in C(\lambda)\backslash\kappa).$$

Теперь квазицелую функцию $\frac{\sin\lambda}{\lambda}\ln\lambda \in W$ можно представить в виде суммы (1.6) целой функции из класса W и квазицелой функции минимального типа следующим образом:

$$\frac{\sin\lambda}{\lambda}\ln\lambda = \frac{1}{2i\lambda}[P(\lambda) - Q(\lambda)] =$$

$$= \left\{-\frac{\mathrm{Ei}(-i\lambda)e^{i\lambda} - \mathrm{Ei}(i\lambda)e^{-i\lambda} + i\pi}{2i\lambda} + \frac{\sin\lambda}{\lambda}\ln\lambda\right\} + \frac{\mathrm{Ei}(-i\lambda)e^{i\lambda} - \mathrm{Ei}(i\lambda)e^{-i\lambda} + i\pi}{2i\lambda}.$$

Здесь (по построению) выражение, стоящее в фигурных скобках, — целая функция из класса W, тогда как последняя дробь представляет собой квазицелую функцию минимального типа, удовлетворяющую условию (1.1) (существование квазицелой функции минимального типа с этим свойством утверждалось приведенной выше леммой).

Ясно, что функция, ассоциированная по Борелю с квазицелой функцией $\frac{\sin\lambda}{\lambda}\ln\lambda$, определяется как сумма функций $p(\omega)$ и $q(\omega)$. Следовательно, она аналитична и однозначна в комплексной плоскости $C(\omega)$, разрезанной по отрезку мнимой оси $-1 \le y \le 1$ и лучу ℓ.

4. Обобщения

Пусть квазицелая функция $G(\lambda) \in W$ и $g_\phi(\omega)$ — функция, ассоциированная с ней по Борелю. Будем считать, что разрез ℓ_ϕ, обеспечивающий однозначность функции $g_\phi(\omega)$, совпадает с произвольным лучом $\{re^{i(\phi+\pi)} : r \ge 0, \ -\pi \le \phi \le \pi, \ \phi \ne \pm\frac{\pi}{2}\}$.

Обозначим через $T_\phi = \ell_\phi \cup \overline{\Gamma}$ разрез, составленный из разрезов ℓ_ϕ и $\overline{\Gamma}$, а S_ϕ — произвольный контур, охватывающий T_ϕ, проходимый в положительном направлении и как угодно близко прижатый к T_ϕ. В этом случае вместо (1.2) получаем следующую формулу:

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\phi} g_\phi(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega \quad (\mathrm{Re}\lambda e^{i\phi} > 0). \tag{4.1}$$

Стягивая в представлении (4.1) контур интегрирования S_ϕ к разрезу T_ϕ и обозначая через

$$\begin{aligned} g^*_\phi(-ue^{i\phi}) &= \tfrac{1}{2\pi i}\{g_\phi(ue^{i(\phi-\pi)}) - g_\phi(ue^{i(\phi+\pi)})\}, \\ &\mathrm{supp} g^*_\phi(-ue^{i\phi}) \in \ell_\phi \end{aligned} \tag{4.2}$$

скачок функции $g_\phi(\omega)$ на разрезе ℓ_ϕ, после несложных преобразований получим представление (1.6) функции $G(\lambda)$, в котором целая функция $G_y(\lambda)$ определяется по той же формуле (1.7), а квазицелая функция минимального типа $G_x(\lambda)$ — по формуле

$$G_x(\lambda) = \int\limits_0^{\infty e^{i\phi}} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) e^{-\lambda(ue^{i\phi})} d(ue^{i\phi}). \tag{4.3}$$

Эту формулу можно переписать несколько иначе:

$$G_x(\lambda e^{i\phi}) = e^{i\phi} \int\limits_0^{\infty} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) e^{-u(\lambda e^{i\phi})} du \quad (\mathrm{Re}(\lambda e^{i\phi}) > 0). \tag{4.4}$$

В частности, принимая в выражении (4.4) $\lambda = te^{-i\phi}$, получим

$$G_x(t) = e^{i\phi} \int\limits_0^{\infty} g_\phi^*(-ue^{i\phi}) e^{-ut} du. \tag{4.5}$$

Из формулы (4.4) при $\phi = 0$ и $\phi = \pi$ соответственно получаются формулы (1.8) и (2.3).

Соединим концы контура интегрирования S_ϕ в формуле (4.1) окружностью бесконечного радиуса и обозначим полученный контур через C_∞. Так как функция $g_\phi(\omega)$ аналитична всюду в области $C(\omega)T_\phi$, то справедливо равенство

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\phi} g_\phi(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} g_\phi(\omega) e^{\lambda\omega} d\omega. \tag{4.6}$$

По теореме Коши

$$g_\phi(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} \frac{g_\phi(p)}{p-\omega}\, dp. \tag{4.7}$$

Воспользуемся представлением

$$-\frac{1}{p-\omega} = e^{i\phi} \int\limits_0^{\infty} e^{(p-\omega)te^{i\phi}} dt. \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в (4.7), получим

$$g_\phi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} g_\phi(p) \left(e^{i\phi} \int\limits_0^{\infty} e^{(p-\omega)te^{i\phi}} dt \right) dp =$$
$$= e^{i\phi} \int\limits_0^{\infty} e^{-\omega te^{i\phi}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} g_\phi(p) e^{pte^{i\phi}} dp \right) dt.$$

Замечая, что в скобках в последнем равенстве справа стоит представление (4.6) функции $G(te^{i\phi})$, получим формулу обращения интеграла (4.1):

$$g_\phi(\omega) = e^{i\phi} \int\limits_0^{\infty} G(te^{i\phi}) e^{-te^{i\phi}\omega} dt \quad (Re(\omega e^{i\phi}) > 0) \tag{4.9}$$

или

$$g_\phi(\omega) = \int\limits_0^{\infty e^{i\phi}} G(te^{i\phi}) e^{-te^{i\phi}\omega} d(te^{i\phi}). \tag{4.10}$$

Получим формулу, выражающую функцию $g_\phi(\omega)$ через ее скачок на разрезе T_ϕ, аналогичную формуле (1.16). Так как функция $g_\phi(\omega)$ аналитична всюду в области $C(\omega)\backslash T_\phi$, то из (4.7) следует

$$g_\phi(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\phi} \frac{g_\phi(p)}{p-\omega}\,dp. \tag{4.11}$$

Стягивая контур S_ϕ к разрезу T_ϕ и переходя к скачкам (1.4) и (4.2) функции $g_\phi(\omega)$ на разрезе T_ϕ, получим искомое представление

$$\begin{gathered} g_\phi(\omega) = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{g_y^*(y)}{iy-\omega}\,dy + \int\limits_{0}^{\infty e^{i\phi}} \frac{g_\phi^*(-ue^{i\phi})}{ue^{i\phi}+\omega}\,d(ue^{i\phi}) \\ (\omega \in C(\omega)\backslash T_\phi). \end{gathered} \tag{4.12}$$

Получим теперь некоторые обобщения равенств типа Парсеваля. Пусть функция $h^*(y) \in L_2(-\infty,\infty)$, а $H(\xi) \in L_2(-\infty,\infty)$ — ее преобразование Фурье. Обозначим

$$h_\phi(ue^{i\phi}) = \int\limits_{0}^{\infty e^{-i\phi}} H(te^{-i\phi})e^{-ue^{i\phi}(te^{-i\phi})}d(te^{-i\phi}), \tag{4.13}$$

или несколько иначе

$$h_\phi(ue^{i\phi}) = e^{-i\phi}\int\limits_0^\infty H(te^{-i\phi})e^{-ut}dt. \tag{4.14}$$

Из представлений (4.13) и (4.14), как частные случаи, получаются формулы (2.1).

Будем считать, что $G_x(\lambda)$ — квазицелая функция минимального типа, удовлетворяющая условию (1.1). Воспользовавшись представлением (4.13) функции $h_\phi(ue^{i\phi})$ и формулой (4.4) для функции $G_x(te^{-i\phi})$, в результате простой перемены порядка интегрирования получим равенство типа Парсеваля вида

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{\infty e^{i\phi}} g_\phi^*(-ue^{i\phi})h_\phi(ue^{i\phi})d(ue^{i\phi}) = \\ &= \int\limits_0^{\infty e^{-i\phi}} G(te^{-i\phi})H(te^{-i\phi})\,d(te^{-i\phi}). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Если пользоваться представлением (4.14) для функции $h(ue^{-i\phi})$ и формулой (4.5) для функции $G_x(t)$, то равенство типа Парсеваля приобретает вид

$$\begin{aligned} &e^{i\phi}\int\limits_0^\infty g_\phi^*(-ue^{i\phi})h_\phi(ue^{i\phi})du = \\ &= e^{-i\phi}\int\limits_0^\infty G(t)H(te^{-i\phi})\,dt. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Из него, как частные случаи при $\phi = 0$ и $\phi = \pi$, получаются равенства типа Парсеваля (2.2) и (2.4) (если считать в них, что функции $h(u)$ и $H(\xi)$ вещественны).

Аналогично могут быть получены другие обобщения.

5. Выводы

Теория преобразования Бореля в классе W квазицелых функций играет фундаментальную роль при решении краевых задач двумерной теории упругости в конечных канонических областях с угловыми точками границы [9], [10].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Коваленко, М. Д.* О преобразовании Бореля в классе W квазицелых функций / М. Д. Коваленко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – № 3. – С. 761–774.

[2] *Pflüger A.* Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reichen // Commentarii Mathem. Helv. — 1935/36. — Vol. 8. – P. 89–129.

[3] *Винер, Н.* Преобразование Фурье в комплексной области / Н. Винер, Р. Пэли. – М. : Наука, 1964. – 267 с.

[4] *Ахиезер, Н. И.* Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М. : Наука, 1965. – 407 с.

[5] *Левин, Б. Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.

[6] *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : ГИФМЛ, 1958. – 678 с.

[7] *Хургин, Я. И.* Финитные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с.

[8] *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – 295 с.

[9] *Коваленко, М. Д.* Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.

[10] *Коваленко, М. Д.* Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.

Коваленко Михаил Денисович,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: kov08@inbox.ru

Меньшова Ирина Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: menshovairina@yandex.ru

M. D. Kovalenko, I. V. Menshova

THE BOREL INTEGRAL TRANSFORMATION IN CLASS OF QUASI ENTIRE FUNCTIONS

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

Abstract. The W class of quasi-entire functions is introduced and the properties of the Borel transformation in this class are investigated. It has to be noted that quasi- entire functions of exponential type were for the first time considered apparently by A. Pfluger in 1935 [2], and we have not heard of any other works in this field since then. In essence, the Pfluger's work amounted to the construction of an analog of Borel transform for integer function of exponential type. The extraction of sub-class W – square summable functions on real axis — from the class of integer, exponential type functions allowed Paley and Winer to obtain fundamental results for the theory of Fourier integral, which have proven to be a very powerful tool for the theory of function's basis [3]. Subclass W for quasi- entire, exponential type functions is introduced in the same way as it is introduced for entire functions, i.e. it includes quasi- entire functions which are square summable on real axis. The results thus obtained were used as essential input data in the studies of basic properties of Fadle-Papkovich functions of the elasticity theory. In the theory of entire, exponential type functions, an entire function is presented as a Borel transform of a function which is defined on a complex plane and is analytical outside a circle over which a corresponding integral is taken [3], [4]. If an entire function belongs to the W class, the circle over which integration is made can be fixed to the segment of imaginary axis which coincides with the circle's diameter. In this case, Borel transform turns into an ordinary Fourier transform on a segment. Following this way, Paley and Winer managed to link Fourier transform on a segment with the powerful apparatus of the theory of analytical functions. For quasi- entire, exponential type functions the situation is basically similar, but in order to ensure single-valuedness of the function, associated by Borel with the considered quasi-entire function, it is necessary to consider it on the Riman logarithmic surface where it is analytical; this time, analyticity is observed outside a spiral with a certain radius. Now, if we require this quasi- entire function to be square summable on real axis, then (like in the theory of Paley and Winer), it will be possible to affix it (which is easy to guess) — this time not to a single segment, but to an infinite system of segments located on imaginary axis on the sheets of the Riman logarithmic surface, one over another. A next step in our theory - building is transition from the Riman logarithmic surface to an ordinary complex plane with a single cross-section on the imaginary axis (like in the Paley and Winer theory), outside which the function, associated by Borel with the quasi- entire function, is analytical. Then, in order to ensure that this function is single-valued over the considered plane, a corresponding cross-section needs to be made in it. Cross-section is usually chosen to coincide either with the negative or with the positive segment of real axis. The results obtained by Paley and Winer represent a specific case within the framework of this theory.

Keywords: Borel transformation, entire function, quasi entire function.

REFERENCES

[1] *Kovalenko, M. D.* Borel transformations in the class W quasi-functions / M. D. Kovalenko // Fundamental and Applied mathematics. – 2001. – № 3. – P. 761–774.

[2] *Pflüger A.* Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reichen // Commentarii Mathem. Helv. — 1935/36. — Vol. 8. – P. 89–129.

[3] *Winer, N.* Fourier's transformation in complex area / N. Winer, R. Paley. – M. : Nauka, 1964. – 267 p.

[4] *Akhiyezer, N. I.* Lectures on the theory of approximation / N. I. Akhiyezer. – M. : Nauka, 1965. – 407 p.

[5] *Levin, B. Ya.* Distribution of roots of the whole functions / B. Ya. Levin. – M. : Gostekhizdat, 1956. – 632 p.

[6] *Lavrentyev, M. A.* Methods of the theory of functions of the complex variable / M. A. Lavrentyev, B. V. Sabbath. – M. : GIFML, 1958. – 678 p.

[7] *Hurgin, Ya. I.* Finite functions in the physicist and the technician / Ya. I. Hurgin, V. P. Yakovlev. – M. : Nauka, 1971. – 408 p.

[8] *Beytmen, G.* The highest transcendental functions: in 2 t. T. 2. Bessel's functions, function of the parabolic cylinder, orthogonal polynomials / G. Beytmen, A. Erdey. – M. : Nauka, 1974. – 295 p.

[9] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich's functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.

[10] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.

Kovalenko, Mikhail Denisovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Menchova, Irina Vladimirovna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Senior Research Officer, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow