

Н. М. Калантарлы

ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА, ОСЛАБЛЕННОГО ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ КОГЕЗИОННЫХ ТРЕЩИН

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Исследовано предельно-равновесное состояние неравномерно нагретого кольцевого диска, ослабленного системой прямолинейных трещин с концевыми зонами предразрушения. С помощью деформационного критерия разрушения получено соотношение, позволяющее определить критическое значение интенсивности теплового воздействия на диск, при котором происходит рост трещин.

Ключевые слова: неравномерно нагретый кольцевой диск, трещины со связями между берегами, зона предразрушения, сила сцепления.

УДК: 539.375

Введение. Задачи прочности кольцевых дисков весьма актуальны, и, несомненно, интерес к этим задачам будет повышаться в связи с имеющейся тенденцией развития машиностроения и энергетики. Для анализа надежности кольцевых дисков необходимо проводить исследование их напряженно-деформированного состояния и разрушения. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния в кольцевых дисках имеют особое прикладное значение, в первую очередь, для правильного выбора их конструкции, оптимальных размеров и допустимых величин рабочих нагрузок. Кольцевые диски часто работают в весьма напряженных условиях. Расчетам кольцевых дисков посвящена обширная литература (см. обзор в монографиях [1], [2]). В настоящей работе используется модель трещины со связями между берегами [3], [4], [5].

Постановка задачи. Рассматривается неравномерно нагретый кольцевой диск, поперечное сечение которого заполняет в плоскости $z = x + iy$ область S , ограниченную круговыми границами L_1 и L , представляющими собой окружности радиуса R_1 и R соответственно. В материале неравномерно нагретого диска имеется N произвольно размещенных прямолинейных трещин с концевыми зонами предразрушения. Требуется определить напряженно-деформированное состояние в кольцевой области S , ослабленной теплоизолированной прямолинейной трещиной с концевыми зонами предразрушения при неравномерном температурном поле. Принято, что имеет место плоское напряженное состояние. Распределение температуры $T(r, \theta)$ по сечению кольцевого диска принято известным из решения задачи теории теплопроводности. Считается, что в концевых зонах предразрушения имеют место силы сцепления материала. Размер концевых зон предразрушения заранее неизвестен, однако сравним с длиной трещины.

Отнесем кольцевой диск к полярной системе координат r, θ с началом координат в центре концентрических окружностей L_1 и L . Пусть в центрах прямолинейных термоизолированных

трещин будут начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$, оси x_k которых совпадают с линиями трещин и образуют угол α_k ($k = 1, 2, \dots, N$) с осью x ($\theta = 0$) (рис. 1). Под действием тепловой нагрузки в связях, соединяющих берега трещин в концевых зонах предразрушения, будут возникать нормальные q_{y_k} и касательные $q_{x_k y_k}$ усилия. Таким образом, взаимодействие между берегами в концевых зонах предразрушения при тепловой нагрузке характеризуется q_{y_k} и касательными $q_{x_k y_k}$ напряжениями сил сцепления материала. Во внутренней области трещин (вне концевых зон) их берега будут свободны от внешних усилий.

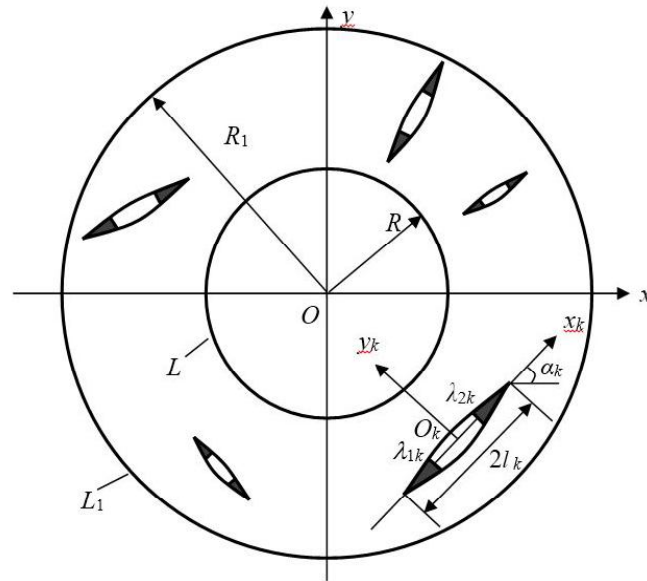


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Для исследования напряжений и деформаций в неравномерно нагретом диске, ослабленном системой трещин с концевыми зонами предразрушения, необходимо решение уравнений термоупругости [6] при следующих граничных условиях:

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{на } L; \quad \sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{на } L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{y_k} = 0; \quad \tau_{x_k y_k} = 0 \quad \text{на } L' \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

$$\sigma_{y_k} = q_{y_k}; \quad \tau_{x_k y_k} = q_{x_k y_k} \quad \text{на } L''.$$

Здесь L' – совокупность свободных от внешней нагрузки берегов трещин; L'' – совокупность берегов трещин в концевых зонах предразрушения.

Дополнительные уравнения, связывающие перемещения раскрытия берегов концевых зон трещин и усилия в связях, принимаем в виде

$$(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) = \Pi(x_k, \sigma_k) [q_{y_k}(x_k) - i q_{x_k y_k}(x_k)], \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$; $(v_k^+ - v_k^-)$ и $(u_k^+ - u_k^-)$ – нормальная и касательная составляющая раскрытия берегов k -той зоны предразрушения соответственно; $\Pi(x_k, \sigma_k)$ представляет собой податливость связей, зависящую от натяжения связей, при $\Pi = const$ закон деформирования связей

– линейный; $\sigma_k = \sqrt{q_{y_k}^2 + iq_{x_k y_k}^2}$ – модуль вектора сил сцепления в связях. В общем случае закон деформирования связей является нелинейным и задан.

Для определения значения интенсивности теплового воздействия, при котором происходит рост трещины, нужно постановку задачи дополнить условием развития трещин. В качестве такого условия принимается деформационный критерий разрушения

$$|(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-)| = \delta_c, \quad (4)$$

где δ_c – трещиностойкость материала кольцевого диска, определяемая опытным путем. Это дополнительное условие позволяет находить параметры кольцевого диска, при которых трещины растут.

Метод решения краевой задачи. Решение краевой задачи (1), (2) ищем в виде суммы двух решений. Определение первого напряженного состояния $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}$ осуществляется с помощью термоупругого потенциала напряжений [6]. Напряженное состояние $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}$ не удовлетворяет краевым условиям (1), (2). Поэтому необходимо найти еще второе напряженное состояние $\bar{\bar{\sigma}}_r, \bar{\bar{\sigma}}_\theta, \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}$, чтобы сумма этих двух напряженных состояний удовлетворяла граничным условиям (1), (2). Для определения второго напряженного состояния имеем следующие граничные условия:

$$\bar{\bar{\sigma}}_r = -\bar{\sigma}_r, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta} = -\bar{\tau}_{r\theta} \quad \text{на } L; \quad \bar{\bar{\sigma}}_r = -\bar{\sigma}_r, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta} = -\bar{\tau}_{r\theta} \quad \text{на } L_1, \quad (5)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{y_k} = -\bar{\sigma}_{y_k}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_k y_k} = -\bar{\tau}_{x_k y_k} \quad \text{на } L' \quad (6)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{y_k} = -\bar{\sigma}_{y_k}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_k y_k} = q_{x_k y_k} - \bar{\tau}_{x_k y_k} \quad \text{на } L''.$$

При использовании формулы Колосова – Мухелишвили [7] краевая задача (5), (6) сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}) \quad \text{при } \tau = R e^{i\theta}, \quad (7)$$

$$\Phi(\tau_1) + \overline{\Phi(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_1\Phi'(\tau_1) + \Psi(\tau_1)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}) \quad \text{при } \tau_1 = R_1 e^{i\theta},$$

$$\begin{aligned} \Phi(x_k) + \overline{\Phi(x_k)} + x_k \overline{\Phi'(x_k)} + \overline{\Psi(x_k)} &= -(\bar{\sigma}_{y_k}(x_k) - i\bar{\tau}_{x_k y_k}(x_k)) \\ \text{на } L' \quad (k = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Phi(x_k) + \overline{\Phi(x_k)} + x_k \overline{\Phi'(x_k)} + \overline{\Psi(x_k)} = q_{y_k} - iq_{x_k y_k} - (\bar{\sigma}_{y_k}(x_k) - i\bar{\tau}_{x_k y_k}(x_k)) \quad \text{на } L''.$$

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, описывающие второе напряженно-деформированное состояние, ищем в виде [7], [8]

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \\ \Phi_1(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g_k(t) dt}{t - z_k}, \end{aligned}$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-l_k}^{l_k} \left[\frac{g_k(t)}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k(t) \right] dt,$$

$$l_k = t e^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad z_k^0 = x_k^0 + i y_k^0, \quad z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0).$$

Здесь $g_k(x_k)$ – искомые функции, характеризующие раскрытие берегов конечных зон предразрушения в сечении неравномерно нагретого кольцевого диска.

$$g_k(x_k) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k + (x_k, 0) - u_k - (x_k, 0) + i(v_k + (x_k, 0) - v_k - (x_k, 0))] \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

Неизвестные искомые функции $g_k(x_k)$ и комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ должны быть определены из краевых условий на берегах зон предразрушения и на контуре $r = R_1$. После некоторых преобразований и вычислений соответствующих интегралов находим

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \left\{ \left(\frac{1}{z\bar{T}_k - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_k e^{i\alpha_k} g_k(t) + \right. \\ \left. + \left[\frac{T_k}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_k - 2z + T_k}{(z\bar{T}_k - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_k} \overline{g_k(t)} \right\} dt; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \left[\frac{e^{i\alpha_k} \bar{T}_k^3}{(z\bar{T}_k - 1)^2} g_k(t) + z^2 \bar{T}_k^2 + 4 - 3z\bar{T}_k + zT_k \bar{T}_k^2 - 3T_k \bar{T}_k + \frac{\bar{T}_k e^{-i\alpha_k}}{(z\bar{T}_k - 1)^3} \overline{g_k(t)} \right] dt.$$

Для отыскания функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ краевые условия (7) записываются в виде

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}) - (f_1^*(\theta) - i f_2^*(\theta)), \quad \tau = R e^{i\theta}; \quad (12)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \overline{\Phi_0(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1)] = -(\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}), \quad \tau_1 = R_1 e^{i\theta},$$

где

$$f_1^*(\theta) - i f_2^*(\theta) = \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)],$$

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

Для отыскания функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ граничные условия (12) записываются в виде

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] = -(\sigma_r - i\tau_{r\theta}) - (f_1^*(\theta) - i f_2^*(\theta)), \quad \tau = R e^{i\theta}; \quad (13)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \overline{\Phi_0(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1)] = -(\sigma_r - i\tau_{r\theta}) \quad \text{при} \quad \tau_1 = R_1 e^{i\theta}.$$

Здесь

$$f_1^*(\theta) - i f_2^*(\theta) = \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)],$$

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

Решение краевой задачи (13) находим методом степенных рядов. Искомые коэффициенты a_k и b_k определяются с помощью формул

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{B_0 R_1^2 - (A_0 - A_0^*) R^2}{2(R_1^2 - R^2)}, \quad a_{-1} = \frac{(\bar{A}_1 - \bar{A}_1^*) R}{1 + \kappa}, \quad \kappa = 3 - 4\nu; \\
 b_{-1} &= -\frac{\kappa(A_1 - A_1^*) R}{1 + \kappa}, \quad a_1 = \frac{\bar{M}_{-1}}{R_1^4 - R^4} - \frac{2(A_1 - A_1^*) R}{(1 + \kappa)(R_1^2 + R^2)}, \\
 a_k &= \frac{(1 + k)(R_1^2 - R^2) M_k - (R_1^{-2k+2} - R^{-2k+2}) \bar{M}_{-k}}{(1 - k^2)(R_1^2 - R^2)^2 - (R_1^{2k+2} - R^{2k+2})(R_1^{-2k+2} - R^{-2k+2})}, \\
 &\quad (k = \pm 2, \pm 3 \pm \dots),
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$M_k = B_k R_1^{-k+2} - (A_k - A_k^*) R_1^{-k+2},$$

$$b_{-2} R_{-2} = 2a_0 - A_0 + A_0^*, \quad b_{k-2} R_1^{k-2} = (1 - k) a_k R_1^k + \bar{a}_{-k} R_1^{-k} - B_k.$$

Удовлетворяя краевым условиям на берегах трещин с концевыми зонами предразрушения при $y_k = 0$, $|x_k| \leq l_k$, после некоторых преобразований получаем систему N комплексных сингулярных интегральных уравнений относительно искомых функций $g_k(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} [R_{nk}(t, x) g_k(t) + S_{nk}(t, x) \overline{g_k(t)}] dt = \pi f(x) \quad (n = 1, 2, \dots, N), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} -(\bar{\sigma}_{y_k} - i\bar{\tau}_{x_k y_k}) + f_0(x) & \text{на } L' \\ q_{y_k} - iq_{x_k y_k} - (\bar{\sigma}_{y_k} - i\bar{\tau}_{x_k y_k}) + f_0(x) & \text{на } L'' \end{array} \right\}, \\
 f_0(x) &= -[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\overline{\Phi'_0(x_1)} + \overline{\Psi_0(x)}].
 \end{aligned}$$

Функции $R_{nk}(t, x)$ и $S_{nk}(t, x)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 R_{nk}(t, x) &= \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} \right) - \\
 &\quad - \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{X_n \bar{T}_k^2}{1 - X_n \bar{T}_k} + \frac{\bar{X}_k^2 T_k - 2\bar{X}_n + \bar{T}_k}{(1 - T_k \bar{X}_n)^2} \right) + \\
 &\quad + e^{-2i\alpha_n} \left(\frac{2X_n (T_k \bar{T}_k - 1) + T_k^2 (\bar{X}_n + \bar{T}_k) (\bar{X}_n T_k - 3) + 4T_k}{(1 - T_k \bar{X}_n)^3} \right), \\
 S_{nk}(t, x) &= \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{1}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} - \frac{T_k - X_n}{(\bar{T}_k - \bar{X}_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right] - \\
 &\quad - \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{T_k^2 \bar{X}_n}{1 - T_k \bar{X}_n} + \frac{X_n^2 \bar{T}_k - 2X_n + T_k}{(1 - \bar{T}_k \bar{X}_n)^2} + \frac{T_k^2 (X_n - T_k) e^{-2i\alpha_n}}{(1 - T_k \bar{X}_n)^2} \right], \\
 X_n &= x_n e^{-i\alpha_n} + z_n^0.
 \end{aligned}$$

Для внутренних трещин с концевыми зонами предразрушения в сечении диска к системе N сингулярных интегральных уравнений добавляются N дополнительных равенств

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (16)$$

обеспечивающих однозначность смещений при обходе контуров трещин с концевыми зонами.

Система (14) с дополнительными условиями (15) с помощью процедуры алгебраизации [8], [9] сводится к конечной алгебраической системе, состоящей из $N \times M$ комплексных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N l_k \left[\varphi_{0k}(t_m) R_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) + \overline{\varphi_{0k}(t_m)} S_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) \right] &= f_n(x_r), \\ \sum_{m=1}^M \varphi_{0n}(t_m) &= 0 \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad r = 1, 2, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M); \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Если в системе (16) перейти к комплексно сопряженным значениям, получим еще $N \times M$ алгебраических уравнений.

Так как напряжения в нагретом диске всюду ограничены, решение системы сингулярных интегральных уравнений (16) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Поэтому необходимо к системе уравнений (16) добавить условия конечности напряжений в окрестности концов зон предразрушения:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (-1)^m \varphi_{0k}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \varphi_{0k}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В правые части системы (16) входят неизвестные значения нормальных $q_{y_k}(x_k)$ и касательных $q_{x_k y_k}(x_k)$ напряжений в узловых точках концевых зон. Условиями, определяющими неизвестные напряжения в связях между берегами концевых зон трещин, являются дополнительные условия (3). Эти дополнительные условия удобнее представить для производной раскрытия берегов зон предразрушения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0) - (u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0))] &= \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} [\Pi(x_k, \sigma_k)(q_{y_k}(x_k) - i q_{x_k y_k}(x_k))] &. \end{aligned}$$

Используя полученное решение, можно записать

$$g_k(x_k) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx_k} [\Pi(x_k, \sigma_k)(q_{y_k}(x_k) - i q_{x_k y_k}(x_k))] \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Эти комплексные уравнения служат для определения неизвестных напряжений $q_{y_k}(x_k)$ и $q_{x_k y_k}(x_k)$ в связях между берегами концевых зон трещин. Для левой части соотношения (3) имеем

$$(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_k}^{x_k} g_k(x_k) dx_k. \quad (19)$$

С учетом (3) соотношение (18) принимает вид

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_k}^{x_k} g_k(x_k) dx_k = \Pi(x_k, \sigma_k) (q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k)). \quad (20)$$

Разделяя в (19) действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_k}^{x_k} v_k(x_k) dx_k &= \Pi(x_k, \sigma_k) q_{y_k}(x_k), \\ -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_k}^{x_k} u_k(x_k) dx_k &= \Pi(x_k, \sigma_k) q_{x_k y_k}(x_k). \end{aligned} \quad (21)$$

Для построения недостающих уравнений, служащих для определения напряжений в связях между берегами концевых зон трещин, требуем выполнения условий (20) в узловых точках t_m , содержащихся в концевых зонах. В результате получаем еще $2 \times N$ системы уравнений для определения приближенных значений $q_{y_k}(t_m)$ и $q_{x_k y_k}(t_m)$:

$$\begin{cases} C_0 v_k^0(t_{1,k}) = \Pi(t_{1,k}, \sigma_k(t_{1,k})) q_{y_k}(t_{1,k}) \\ C_0 (v_k^0(t_{1,k}) + v_k^0(t_{2,k})) = \Pi(t_{2,k}, \sigma_k(t_{2,k})) q_{y_k}(t_{2,k}) \\ \dots \\ C_0 \sum_{m=1}^{M_k} v_k^0(t_{m,k}) = \Pi(t_{M,k}, \sigma_k(t_{M,k})) q_{y_k}(t_{M,k}), \\ \left\{ \begin{aligned} C_0 u_k^0(t_{1,k}) &= \Pi(t_{1,k}, \sigma_k(t_{1,k})) q_{x_k y_k}(t_{1,k}) \\ C_0 (u_k^0(t_{1,k}) + u_k^0(t_{2,k})) &= \Pi(t_{2,k}, \sigma_k(t_{2,k})) q_{x_k y_k}(t_{2,k}) \\ \dots \\ C_0 \sum_{m=1}^{M_k} u_k^0(t_{m,k}) &= \Pi(t_{M,k}, \sigma_k(t_{M,k})) q_{x_k y_k}(t_{M,k}), \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (22)$$

где $C_0 = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_k}{M}$.

Для модуля вектора раскрытия берегов концевых зон трещин при $x_k = \lambda_{1,k}$ получим

$$\begin{aligned} V_{0,k} &= \sqrt{(v_k^+ - v_k^-)^2 + (u_k^+ - u_k^-)^2} = \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_k}{M} \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \\ A &= \sum_{m=1}^{M_{1,k}} v_k(t_m), \quad B = \sum_{m=1}^{M_{1,k}} u_k(t_m), \end{aligned}$$

где $M_{1,k}$ – число узловых точек, содержащихся в интервале $(-l_k, \lambda_{1,k})$.

Для определения предельно-равновесного состояния диска, при котором происходит рост трещин, имеем условие

$$\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_k}{M} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (23)$$

Из-за неизвестных размеров длин концевых зон предразрушения система (16), (17), (21) оказалась нелинейной. Для ее численного решения целесообразно использовать алгоритм метода последовательных приближений и итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [10]. В каждом приближении решается линейная алгебраическая система методом Гаусса с выбором главного элемента.

Используя полученное решение, находим раскрытие берегов трещин у края концевой зоны предразрушения при $x_k = \lambda_{1k}$ и $x_k = \lambda_{2k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$): для левой вершины k -ой трещины у края концевой зоны предразрушения при $x_k = \lambda_{1k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$v_k^+(\lambda_{1k}, 0) - v_k^-(\lambda_{1k}, 0) = -\pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1,k}} v_k^0(t_m),$$

$$u_k^+(\lambda_{1k}, 0) - u_k^-(\lambda_{1k}, 0) = -\pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{1,k}} u_k^0(t_m);$$

для правой вершины k -ой трещины у края концевой зоны предразрушения при $x_k = \lambda_{2k}$:

$$v_k^+(\lambda_{2k}, 0) - v_k^-(\lambda_{2k}, 0) = -\pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{2,k}} v_k^0(t_m),$$

$$u_k^+(\lambda_{2k}, 0) - u_k^-(\lambda_{2k}, 0) = -\pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sum_{m=1}^{M_{2,k}} u_k^0(t_m).$$

Для модуля раскрытия берегов трещины у основания концевой зоны предразрушения в диске находим: для левой вершины k -ой трещины:

$$V_k^\pi = \pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

для правой вершины k -ой трещины

$$V_k^\pi = \pi \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{l_k}{M} \sqrt{C_k^2 + D_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Условие, определяющее критическое значение интенсивности теплового воздействия на кольцевой диск, при котором происходит рост трещины, получаем с помощью критерия критического раскрытия трещины: для левой вершины k -ой трещины:

$$V_k^\pi = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (24)$$

для правой вершины k -ой трещины

$$V_k^\pi = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (25)$$

Проведен параметрический анализ зависимости напряжений q_{y_k} и $q_{x_k y_k}$ в концевых зонах предразрушения от их расположения и физико-механических параметров связей. Численные расчеты проводились применительно к турбинному диску из стали ЭИ417. На рис. 2 показана зависимость относительной длины концевой зоны предразрушения от безразмерного значения интенсивности теплового воздействия q_*/σ_* ($q_* = \alpha E T_0$, T_0 – характерная температура диска) для различных значений угла α_1 . Кривая 1 соответствует $\alpha_1 = 45^\circ$, кривая 2 – $\alpha_1 = 30^\circ$.

При проектировании элементов механизмов и конструкций в виде кольцевого диска его параметры необходимо подбирать таким образом, чтобы максимальная интенсивность теплового воздействия не превышала некоторого критического значения, вызывающего рост трещин. Это условие можно записать в виде

$$q_{* \max} < q_*^c,$$

где $q_{* \max}$ – максимальная интенсивность теплового воздействия в кольцевом диске.

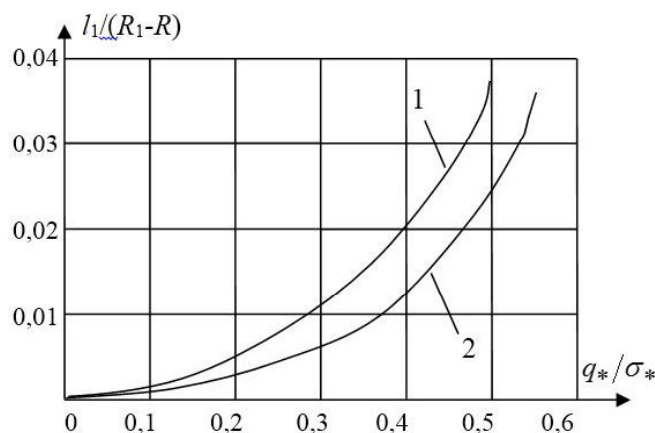


Рис. 2. Зависимость относительной длины концевой зоны от безразмерного значения интенсивности теплового воздействия

Выводы. Знание основных значений критических параметров разрушения и влияния на них свойств материала кольцевого диска дает возможность обоснованно управлять процессом роста трещин путем выбора конструкторско-технологических решений при проектировании. С помощью разработанной математической модели на стадии проектирования возможно оценивать гарантированный ресурс кольцевого диска с учетом ожидаемых дефектов и условий нагружения; устанавливать допустимый уровень дефектности, максимальные значения рабочих нагрузок; выбирать материал диска с требуемыми статическими и циклическими характеристиками трещиностойкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саврук, М. П. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие : в 2 т. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – Киев : Наукова думка, 1988. – 620 с.
- [2] Саврук, М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – Киев : Наукова думка, 1989. – 248 с.
- [3] *The special issue: Cohesive models* // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.
- [4] Мирсалимов, В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 132–151.
- [5] Mirsalimov, M. V. Interaction between Periodic System of Rigid Inclusions and Rectilinear Cohesive Cracks in an Isotropic Medium under Transverse Shear / M. V. Mirsalimov, F. F. Hasanov // Acta Polytechnica Hungarica. – 2014. – Vol. 11. – No. 5. – P. 161–176.
- [6] Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М. : Физматгиз, 1963. – 252 с.
- [7] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [8] Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
- [9] Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [10] Ильющин, А. А. Пластичность / А. А. Ильющин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Калантарлы Наиля Мерадж кызы,

*кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку*

e-mail: nailyak1975@gmail.com

N. M. Kalantarly

LIMIT-EQUILIBRIUM STATE OF NON-UNIFORMLY HEATED ANNULAR DISK, WEAKENED BY AN ARBITRARY SYSTEM OF COHESIVE CRACKS

Institute of mathematics and mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. The limit-equilibrium state of non-uniformly heated annular disk, weakened by a system of rectilinear cracks with end pre-fracture zones is investigated. Using deformation fracture criterion the relation allowing to determine the critical value of the intensity of the heat effect on the disc at which the cracks growth is obtained.

Keywords: non-uniformly heated annular disk, cracks with interfacial bonds, pre-fracture zone, cohesive forces.

REFERENCES

- [1] *Savruk, M. P.* Fracture mechanics and strength of materials. Vol. 2: Stress intensity factors in cracked bodies. – Kiev : Naukova dumka, – 1988. – 620 p.
- [2] *Savruk, M. P.* Numerical analysis in plane problems of cracks theory / M. P. Savruk, P. N. Osiv, I. V. Prokopchuk. – Kiev : Naukova dumka. – 1989. – 248 p.
- [3] *The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech.* – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.
- [4] *Mirsalimov, V. M.* The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair / V. M. Mirsalimov // J. of Applied Math. and Mech. – 2007. – Vol. 71. – P. 120–136.
- [5] *Mirsalimov, M. V.* Interaction between Periodic System of Rigid Inclusions and Rectilinear Cohesive Cracks in an Isotropic Medium under Transverse Shear / M. V. Mirsalimov, F. F. Hasanov // Acta Polytechnica Hungarica. – 2014. – Vol. 11. – No. 5. – P. 161–176.
- [6] *Parkus, H.* Instationare Warmes-Pannungen / H. Parkus. – Springer, Wien, 1959. – 252 p.
- [7] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1977. – 707 p.
- [8] *Panasyuk, V. V.* Stress distribution near cracks in plates and shells / V. V. Panasyuk, M. P. Savruk, A. P. Datsyshyn. – Kiev : Naukova dumka, 1976. – 443 p.
- [9] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [10] *Il'yushin, A. A.* Plasticity / A. A. Il'yushin. – M. ; L. : Gostekhizd, 1948. – 376 p.

Kalantarly, Nailya Merach kizi

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku