Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 48–53

Н. В. Минаева, М. Г. Хвостов

СЖАТИЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Аннотация. В работе рассмотрено деформирование упругой полосы из несжимаемого материала. Отклонение контура сечения от прямоугольника и материала полосы от однородного характеризуется двумя независимыми малыми параметрами, являющимися случайными величинами. С точностью до величин второго порядка малости найдено решение для частного случая поставленной задачи. Проведен анализ влияния учета случайных несовершенств при определении напряженно-деформированного состояния полосы.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, граничные условия, линеаризация, подвижная граница, независимые малые параметры, случайная величина.

УДК: 539.3

Следуя [1], [2], рассмотрим деформирование упругой полосы из несжимаемого материала, поперечное сечение которой мало отличается от прямоугольного. Она находится под воздействием усилий интенсивности p_1 и p_2, приложенных соответственно по горизонтальным и вертикальным кромкам сечения.

Ее напряженно-деформированное состояние описывается решением следующей задачи [1], [3]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}=0;\\ &\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial x}=0;\\ &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0;\end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}&\sigma_x-\sigma_y=4G\frac{\partial u}{\partial x};\\ &\tau=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right);\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}&\sigma_n\left|_{y=g_i}=-p_1;\quad \tau_n\right|_{y=g_i}=0;\ (i=1,2)\\ &\sigma_x\left|_{x=0}=\sigma_x\right|_{x=\ell}=-p_2;\\ &\tau\left|_{x=0}=\tau\right|_{x=\ell}=0\end{aligned}\ , \qquad (3)$$

где u, v – компоненты вектора перемещений, σ_x, σ_y, τ – напряжения в поперечном сечении полосы, g_i – функции, описывающие верхнюю и нижнюю кромки сечения в деформированном состоянии, в недеформированном они характеризуются функциями f_i.

Пусть f_i и G заданы в следующем виде:

$$\begin{aligned}&f_i(x)=h+\varepsilon_1\varphi_1(x)\quad (i=1,2);\\ &G(x)=G_0+\varepsilon_2\varphi_2(x),\end{aligned} \qquad (4)$$

Поступила 10.08.2014

где ε_i – независимые малые параметры, являющиеся случайными величинами, h – половина высоты прямоугольного сечения, G_0 – модуль упругости однородной полосы, $\varphi_i(x)$ – функции, описывающие отклонение реальных характеристик от идеализированных.

Решение задачи (1)–(3) будем искать вблизи однородного состояния ($\varepsilon_i = 0$) в виде рядов по малым параметрам [4]:

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \sigma_x^{(mn)}; \quad \sigma_y = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \sigma_y^{(mn)}; \quad \tau = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \tau^{(mn)}; \\ u = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n u^{(mn)}; \quad v = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n v^{(mn)},\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}\sigma_x^{(00)} = -p_2; \quad \sigma_y^{(00)} = -p_1; \quad \tau^{(00)} = 0; \\ u^{(00)} = \frac{p_1 - p_2}{4G_0} x; \quad v^{(00)} = \frac{p_2 - p_1}{4G_0} y.\end{gathered} \tag{6}$$

Для того чтобы (5) сходились, необходимо провести исследование аналитичности решения задачи (1)–(3) по $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ в окрестности $\varepsilon_i = 0$. Основным требованием, как было получено в [5], является условие непрерывной зависимости решения от f и G в окрестности $f = h,\ G = G^0$. Для проверки этого условия составим вспомогательную задачу относительно функций ζ_i, задаваемых следующим образом:

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_x^{(00)} + \zeta_1; \quad \sigma_y = \sigma_y^{(00)} + \zeta_2; \quad \tau = \tau^{(00)} + \zeta_1; \\ u = u^{(00)} + \zeta_4; \quad v = v^{(00)} + \zeta_5.\end{gathered} \tag{7}$$

Однородная линеаризованная задача, соответствующая (1)–(3), (7), будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} = 0; \\ \zeta_1 - \zeta_2 = 4G\frac{\partial \zeta_4}{\partial x}, \quad \zeta_4 = G\left(\frac{\partial \zeta_4}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial x}\right); \\ \left((p_2 - p_1)\frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \zeta_3\right)_{y=\pm g^0} = 0, \quad \zeta_2(x, \pm g^0) = 0; \\ \zeta_1 \,|_{x=0} = \zeta_1 \,|_{x=\ell} = 0; \quad \zeta_3 \,|_{x=0} = \zeta_3 \,|_{x=\ell} = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

где $g^0(x) = \left(1 + \dfrac{p_2 - p_1}{4G_0}\right) h$ характеризует идеальную границу в деформированном состоянии. Если (8) допускает только тривиальное решение, то решение исходной задачи непрерывно зависит от f и G при $f = h,\ G = G^0$.

Задача (8) с точностью до обозначений совпадает с анализируемой по наличию у нее нетривиального решения из [5]. Следуя этой работе, получаем, что (8) имеет нетривиальное решение, если выполняется условие

$$\mathrm{ch}(2ah(2 + \gamma_2 - \gamma_1)) - (1 + \gamma_2 - \gamma_1)^2 (2 + \gamma_2 - \gamma_1)^2 4a^2 h^2 - 2 = 0, \tag{9}$$

где $\gamma_i = p_i / 4G_0$.

Следовательно, если исходные данные задачи (1)–(3) таковы, что их параметры принадлежат области, ограниченной кривой (9), то в силу аналитичности выражений в (1)–(3) решения будут аналитическими функциями малых параметров ε_i в окрестности $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и ряды (4) будут сходиться.

В дальнейшем считаем, что исходные параметры удовлетворяют полученным условиям. Рассмотрим случай $\left|\dfrac{p_2 - p_1}{4G_0}\right| \ll 1$ и $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \sin ax$.

Составим соотношения для первого и второго приближений. Вид задач, с учетом найденных компонент, вполне аналогичен (1), (2), за исключением соотношений (2) для $^{(01)}$ и $^{(11)}$:

$$\begin{aligned}&\sigma_x^{(01)}-\sigma_y^{(01)}=4G_0\frac{\partial u^{(01)}}{\partial x}+4\varphi_2(x)\frac{\partial u^{(00)}}{\partial x};\\&\tau^{(01)}=G_0\left(\frac{\partial u^{(01)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(01)}}{\partial x}\right)+\varphi_2(x)\left(\frac{\partial u^{(00)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(00)}}{\partial x}\right).\end{aligned}\tag{10}$$

Для приближения $^{(11)}$ следует заменить в (10) индексы $^{(01)}$ на $^{(11)}$, а $^{(00)}$ и $^{(10)}$.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}&\sigma_y^{(10)}\mid_{y=\pm h}=0\\&\left(\tau^{(10)}-(p_1-p_2)\frac{\partial v^{(10)}}{\partial x}\right)_{y=\pm h}=(p_1-p_2)\varphi_1'(x);\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_y^{(01)}\mid_{y=\pm h}=0\\&\left(\tau^{(01)}-(p_1-p_2)\frac{\partial v^{(01)}}{\partial x}\right)_{y=\pm h}=0.\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_y^{(20)}\mid_{y=\pm h}=(p_2-p_1)\left(\frac{dg^{(10)}}{dx}\right)^2-2\tau^{(10)}\frac{dg^{(10)}}{dx}\\&\left(\tau^{(20)}-(p_1-p_2)\frac{\partial v^{(20)}}{\partial x}\right)_{y=\pm h}=(p_1-p_2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v^{(10)}}{\partial y}\varphi_1(x)-\right.\\&\left.-\frac{\partial(\varphi_1+v^{(10)})}{\partial x}u^{(10)}\right)+(\sigma_x^{(10)}-\sigma_y^{(10)})\frac{dg^{(10)}}{dx}-\frac{\partial\tau^{(10)}}{\partial y}g^{(10)},\end{aligned}\tag{13}$$

где $g^{(10)}=\varphi_1(x)+v^{(10)}(x,h)$. Вид соотношений для $^{(11)}$, $^{(02)}$ аналогичен (12). На вертикальных кромках условия будут тривиальными.

В результате решения полученных задач найдены функции, которые с точностью до величин второго порядка малости характеризуют напряженно-деформированное состояние рассматриваемой полосы:

$$\begin{aligned}&u=\frac{p_1-p_2}{4G_0}x+u^{(10)}\varepsilon_1+u^{(01)}\varepsilon_2+u^{(11)}\varepsilon_1\varepsilon_2+u^{(20)}\varepsilon_1^2+u^{(02)}\varepsilon_2^2;\\&v=\frac{p_2-p_1}{4G_0}y+v^{(10)}\varepsilon_1+u^{(01)}\varepsilon_2+v^{(11)}\varepsilon_1\varepsilon_2+v^{(20)}\varepsilon_1^2+v^{(02)}\varepsilon_2^2;\\&\sigma_x=-p_2+\sigma_x^{(10)}\varepsilon_1+u^{(01)}\varepsilon_2+\sigma_x^{(11)}\varepsilon_1\varepsilon_2+\sigma_x^{(20)}\varepsilon_1^2+\sigma_x^{(02)}\varepsilon_2^2;\\&\sigma_y=-p_1+\sigma_y^{(10)}\varepsilon_1+u^{(01)}\varepsilon_2+\sigma_y^{(11)}\varepsilon_1\varepsilon_2+\sigma_y^{(20)}\varepsilon_1^2+\sigma_y^{(02)}\varepsilon_2^2;\\&\tau=\tau^{(10)}\varepsilon_1+u^{(01)}\varepsilon_2+\tau^{(11)}\varepsilon_1\varepsilon_2+\tau^{(20)}\varepsilon_1^2+\tau^{(02)}\varepsilon_2^2,\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}&u^{(10)}=\frac{1}{2a}((aD_1+D_2)\mathrm{sh}ay+aD_2y\mathrm{ch}ay)\cos ax;\\&v^{(10)}=\frac{1}{2}(D_1\mathrm{ch}ay+D_2y\mathrm{sh}ay)\sin ax;\\&\sigma_x^{(10)}=-G_0((aD_1+2D_2)\mathrm{sh}ay+aD_2y\mathrm{ch}ay)\sin ax;\\&\sigma_y^{(10)}=aG_0(D_1\mathrm{sh}ay+D_2y\mathrm{ch}ay)\sin ax;\\&\tau^{(10)}=G_0((aD_1+D_2)\mathrm{ch}ay+aD_2y\mathrm{sh}ay)\cos ax;\\&D_i=D_i(p_1,p_2,h,a)\quad i=1,2.\end{aligned}\tag{15}$$

$$u^{(01)}=v^{(01)}=\sigma_x^{(01)}=\sigma_y^{(01)}=\tau^{(01)}=0.\tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
u^{(11)} &= u(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \sin 2ax; \\
v^{(11)} &= v(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax; \\
\sigma_x^{(11)} &= \sigma_x(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax; \\
\sigma_y^{(11)} &= \sigma_y(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax; \\
\tau^{(11)} &= \tau(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \sin 2ax.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
u^{(20)} &= u(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \sin 2ax + \frac{C(h)}{4G_0} x; \\
v^{(20)} &= v(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax - \frac{C(h)}{4G_0} y; \\
\sigma_x^{(20)} &= \sigma_x(a, G_0 p_1, p_2, h, y) \cos 2ax; \\
\sigma_y^{(20)} &= \sigma_y(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \cos 2ax - C(h); \\
\tau^{(20)} &= \tau(a, G_0, p_1, p_2, h, y) \sin 2ax.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
u^{(02)} = v^{(02)} = \sigma_x^{(02)} = \sigma_y^{(02)} = \tau^{(02)} = 0. \tag{19}
$$

Вид функций $u(a, G_0, p_1, p_2, h, y), ..., \tau(a, G_0, p_1, p_2, h, y), C(h)$ не приводится из-за громоздкости выражений.

Поскольку ε_i являются случайными величинами, то математические ожидания основных характеристик имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&< u >= \frac{p_1 - p_2}{4G_0} x + u^{(20)} < \varepsilon_1^2 >; \\
&< v >= \frac{p_2 - p_1}{4G_0} y + v^{(20)} < \varepsilon_1^2 >; \\
&< \sigma_x >= -p_2 + \sigma_x^{(20)} < \varepsilon_1^2 >; \\
&< \sigma_y >= -p_1 + \sigma_y^{(20)} < \varepsilon_1^2 >; \\
&< \tau >= \tau^{(20)} < \varepsilon_1^2 > .
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Из (20) следует, что если напряженно-деформированное состояние полосы близко к однородному, то при замене характеристик материала и контура сечения их среднестатистическими значениями порядок ошибки не превзойдет порядка ε_1^2. Учет неоднородности материала в этом случае не оказывает значительного влияния на результат.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ишлинский, А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости / А. Ю. Ишлинский // Укр. матем. журнал. – 1954. – Т. 6. – № 2. – С. 140–146.

[2] *Ивлев, Д. Д.* Об устойчивости полосы при сжатии / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов // ДАН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 5. – С. 1047–1049.

[3] *Филоненко-Бородич, М. М.* Теория упругости / М. М. Филоненко-Бородич. – М. : Физматгиз, 1959. – 364 с.

[4] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластических деформаций / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

[5] *Минаева, Н. В.* Метод возмущений в механике деформируемых тел / Н. В. Минаева. – М. : Научная книга, 2002. – 156 с.

Минаева Надежда Витальевна,

доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

e-mail: minaeva@yandex.ru

Хвостов Михаил Геннадьевич,

аспирант, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

N. V. Minaeva, M. G. Khvostov

COMPRESSION STOCHASTICALLY INHOMOGENEOUS INCOMPRESSIBLE STRIPS OF MATERIAL

Voronezh state University of engineering technologies

Abstract. In this work the elastic deformation of the strip of compressible material. The deviation of the contour of the cross section of the rectangle and strip material from a homogeneous characterized by two independent small parameters are random variables. Accurate to quantities of the second order of smallness found the solution of this problem. The analysis of the impact of accounting for random imperfections in the determination of the stress-strain state band

Keywords: stress, strain, elasticity, boundary conditions, linearization, movable boundary, independent small parameters, random variable.

REFERENCES

[1] *Ishlinsky, A. U.* Consideration of questions about the stability of equilibrium of elastic bodies from the point of view of the mathematical theory of elasticity / A. U. Ishlinsky // Ukr. Math. J. – 1954. – V. 6. – No 2. – P. 140–146.

[2] *Ivlev, D. D.* About resistance band compression / D. D. Ivlev, L. V. Ershov // Rep. Ac. Sci. USSR. – 1961. – V. 138. – No 5. – P. 1047–1049.

[3] *Filonenko-Borodich, M. M.* Theory of elasticity / M. M. Filonenko-Borodich. – M. : Fizmatgiz, 1959. – 364 p.

[4] *Ivlev, D. D.* The method of perturbations in the theory of elastic-plastic deformation / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.

[5] *Minaeva N. V.* The method of perturbations in the mechanics of deformable bodies / N. V. Minaeva. – M. : Science book, 2002. – 156 p.

Minaeva Nadezhda Vitalevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh state University of engineering technologies, Voronezh

Khvostov Michael Gennadevich

graduate Voronezh state University of engineering technologies, Voronezh