

Ю. В. Немировский

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ИЗ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Для полиметаллических круглых и кольцевых пластин из пластических материалов с линейным упрочнением разработан метод решения задач о динамическом деформировании при воздействии интенсивных нагрузках взрывного типа. В качестве физических законов деформирования использована модель В. Прагера для линейно упрочняющихся материалов с кусочно-линейным потенциалом Треска. В качестве примеров рассмотрены задачи о деформировании кольцевой свободной на внутреннем контуре и сплошной пластины в случае шарнирного опирания на внешнем контуре.

**Ключевые слова:** круглые и кольцевые пластины, жестко-пластические материалы, нагрузки взрывного типа, модель В. Прагера, линейное упрочнение, полиметаллические конструкции.

УДК: 536.21

**1. Введение.** В последние десятилетия проводятся интенсивные исследования по созданию для различных отраслей промышленности и строительной индустрии эффективных полиметаллических и других гибридных слоистых конструкций. Наиболее простыми и распространенными с технологической точки зрения являются приемы изготовления плоских полиметаллических пластин любых геометрических форм и размеров без серьезных ограничений по выбору материалов. Существующие технологические приемы (склеивание, сварка взрывом и диффузионная сварка, холодное газодинамическое или плазменное напыление, плазменная или механическая резка) позволяют создавать плоские симметричные (рис. 1) и несимметричные (рис. 2) пакетные конструкции из практически любых наборов материалов и сплавов [1]–[3].

В любой такой конструкции сохраняются основные индивидуальные (в частности, пластические) свойства отдельных слоев, но ее несущая способность и деформационная податливость могут существенно изменяться в зависимости от выбора количества материалов, их расположения и относительных параметров толщин слоев. В

---

© Немировский Ю. В., 2016  
*Немировский Юрий Николаевич*  
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102).

Поступила 12.01.2016

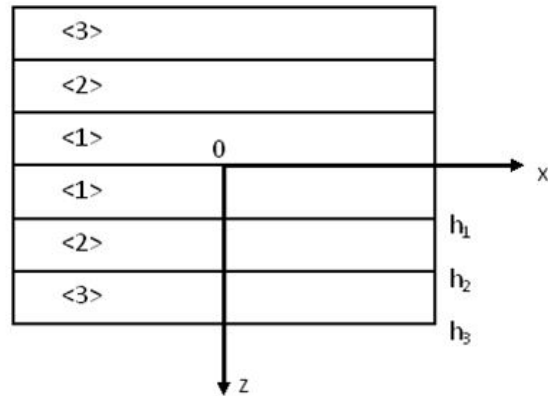


Рис. 1



Рис. 2

рамках модели идеальных жестко-пластических материалов задача рационального подбора материалов была рассмотрена в работе [4]. Однако, многие металлические материалы и сплавы обладают свойством существенного упрочнения и предельные нагрузки полиметаллической конструкции могут оказаться в реальности слишком заниженными. В связи с этим для таких конструкций было предложено ввести второе предельное состояние [5], [6], при котором в соответствии с концепцией слабейшего звена какой-либо из материалов достигнет предельной деформации предразрушения. При квазистатическом нагружении соответствующие решения рассматривались для полиметаллических балок, круглых и кольцевых пластин. В данной работе предлагается рассмотреть динамическое деформирование круглых и кольцевых пластин при воздействии динамических нагрузок взрывного типа.

**2. Формулировка основных уравнений.** Будем рассматривать слоистые пластины симметричной структуры (рис. 1) и считать все материалы жестко-пластическими и линейно-упрочняющимися. Тогда в соответствии с концепцией В. Прагера [7] закон пластического деформирования для круглых и кольцевых пластин при использовании кусочно-линейного потенциала Треска может быть представлен в форме [6], [7]:

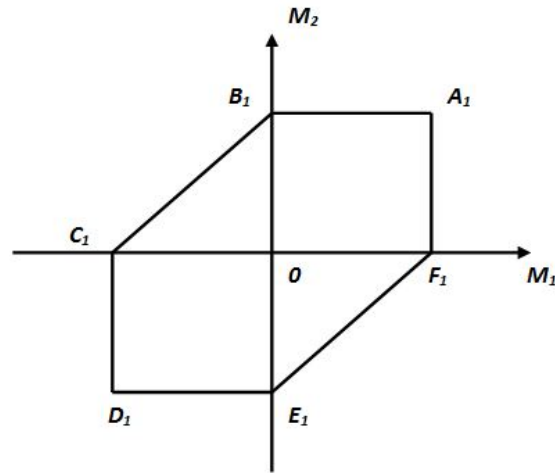


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 A_1 : \quad & M_1 = M_0 + D_0\chi_1, \quad M_2 = M_0 + D_0\chi_2, \\
 & \chi_1 \geq 0, \quad \chi_2 \geq 0, \\
 A_1B_1 : \quad & M_2 = M_0 + D_0\chi_2, \quad 0 \leq M_1 < M_0 + D_0\chi_1, \\
 & \chi_1 = 0, \quad \chi_2 \geq 0, \\
 B_1 : \quad & M_1 = 0, \quad M_2 = M_0 + D_0\chi_2, \\
 & \chi_1 \leq 0, \quad \chi_2 \geq 0, \\
 B_1C_1 : \quad & M_2 - M_1 = M_0 + D_0\chi_2, \\
 & -M_0 - D_0\chi_1 \leq M_1 \leq 0, \\
 & \chi_1 + \chi_2 = 0, \quad \chi_1 \leq 0, \quad \chi_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

В этих выражениях

$$M_0 = \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} (h_i^2 - h_{i-1}^2), \quad D_0 = \sum_{i=1}^n d_i (h_i^2 - h_{i-1}^2)$$

$M_1, M_2, \chi_1, \chi_2$  – безразмерные изгибающие моменты, и кривизны пластин в радиальном и окружном направлениях,  $h_i$  – безразмерные координаты раздела слоистого пакета,  $\sigma_{0i}, d_i$  – безразмерные пределы текучести и модули упрочнения материалов, составляющих слоистый пакет.

Безразмерные кривизны  $\chi_1, \chi_2$  связаны с безразмерным прогибом  $w$  выражениями

$$\chi_1 = -w'', \quad \chi_2 = -\frac{1}{x}w'.$$

Здесь штрих обозначают производную по безразмерной координате  $x$

$$x = \frac{r}{R}; \quad w = \frac{\bar{w}\bar{H}_0}{R^2}; \quad M_i = \frac{\bar{M}_i}{\sigma_0\bar{H}_0^2},$$

где  $\bar{w}$ ,  $r$ ,  $R$  – прогиб, текущий и внешний радиус пластинки,  $\bar{H}_0$  – безразмеривающий параметр толщины пластинки.

Уравнения динамического движения пластины имеют вид:

$$\begin{aligned} (xM_1)' - M_1 &= xQ, \\ (Qx)' + x(p - m\ddot{w}) &= 0 \\ Q &= \frac{\bar{Q}R}{\bar{M}_0}, \quad M_1 = \frac{\bar{M}_r}{\bar{M}_0}, \quad M_2 = \frac{\bar{M}_\varphi}{\bar{M}_0}, \\ \bar{M}_0 &= \bar{\sigma}_0 \bar{H}_0^2, \quad t = \frac{t}{T}, \quad m = \frac{\bar{m}}{m_0}. \\ m &= 2 \sum_{i=1}^n \rho_i (h_i - h_{i-1}), \quad \rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_0}. \end{aligned}$$

Точка обозначает частную производную по безразмерному времени  $t$ ,  $p$  и  $m$  – безразмерные распределенная нагрузка и поверхностная масса,  $Q$  – безразмерная перерезывающая сила.

При решении конкретных задач должны быть заданы граничные условия, соответствующие условиям закрепления пластинки и начальные условия движения

$$\dot{w}(x, 0) = w(x, 0) = 0.$$

**3. Кольцевая шарнирно-опертая по наружному контуру пластинка со свободным внутренним контуром  $x_0$ .** Рассмотрим в качестве примера задачу о равномерно нагруженной по поверхности кольцевой пластинке  $x_0 \leq x \leq 1$ , шарнирно опертой на наружном контуре  $x = 1$ . В этом случае граничные условия будут иметь вид:

$$Q(x_0, t) = 0, \quad M_1(x_0, t) = 0, \quad M_1(1, t) = 0, \quad w(1, t) = 0.$$

Решение задачи в области  $x_0 \leq x \leq 1$  будет соответствовать режиму  $A_1B_1$ , для которого

$$w''(x, t) = 0, \quad M_2(x, t) = M_0 + D_0\chi_2, \quad \chi_2(x, t) = -\frac{1}{x}w'(x, t).$$

Тогда, учитывая выражения (5) для пластинки со слоями постоянной толщины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой

$$p(t) = p_0\psi(t)$$

получим выражения:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1-x}{(1-x_0)}w_0(t), \quad \chi_2(x, t) = \frac{w_0(t)}{(1-x_0)x}, \\ M_2(x, t) &= M_0 + D_0\frac{w_0(t)}{(1-x_0)x}, \\ Q(x, t) &= -\frac{p_0\psi(t)}{2}(x^2 - x_0^2) + \frac{m\ddot{w}_0(t)}{6(1-x_0)}[3(x^2 - x_0^2) - 2(x^3 - x_0^3)], \\ (xM_1)' &= M_0 + \frac{D_0w_0(t)}{(1-x_0)x} - \frac{p_0\psi(t)}{2}(x^2 - x_0^2) + \frac{m\ddot{w}_0(t)}{6(1-x_0)}[3(x^2 - x_0^2) - 2(x^3 - x_0^3)], \\ xM_1(x, t) &= M_0(x-1) + \frac{D_0w_0(t)}{(1-x_0)}\ln x - \frac{p_0\psi(t)}{6}[x^3 - 1 - 3x_0^2(x-1)] + \\ &+ \frac{m\ddot{w}_0(t)}{6(1-x_0)}\left\{x^3 - 1 - 3x_0^2(x-1) - \left[\frac{x^4-1}{2} - 2x_0^3(x-1)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь условием  $M_1(x_0, t) = 0$ , получим уравнение для  $w_0(t)$ :

$$\ddot{w}_0 - \frac{12D_0}{m}f_1(x_0) \cdot w_0 = \frac{2p_0\psi(t)}{m}f_2(x_0) - \frac{12M_0}{m}f_3(x_0), \quad (1)$$

где

$$f_1(x_0) = \frac{\ln x_0}{(1-x_0)(3x_0^4 - 10x_0^3 + 6x_0^2 - 1)},$$

$$f_2(x_0) = \frac{(1 + 2x_0^3 - 3x_0^2)(1 - x_0)}{(3x_0^4 - 10x_0^3 + 6x_0^2 - 1)}, \quad (2)$$

$$f_3(x_0) = \frac{(1 - x_0)^2}{(3x_0^4 - 16x_0^3 + 6x_0^2 - 1)}.$$

Начальные условия для этого уравнения имеют вид:

$$\dot{w}_0(0) = w_0(0) = 0. \quad (3)$$

Функция  $\psi(t)$  для нагрузок взрывного типа чаще всего используется в форме

$$\psi(t) = e^{-\alpha t}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – заданный параметр для конкретного взрывного вещества.

Время окончания движения  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{w}_0(t_f) = 0 \quad (5)$$

и остаточный прогиб  $w^*$  будет равен

$$w^* = \dot{w}_0(t_f). \quad (6)$$

**4. Шарнирно-опертая пластинка без отверстия** ( $x_0 = 0$ ). Поскольку для сплошной пластинки без отверстия в центре  $x = 0$  имеем

$$w'(0, t) = 0, \quad (7)$$

то в окрестности центра  $0 \leq x \leq x_1$  должно реализоваться состояние, соответствующее вершине  $A_1$  на рисунке 3, а в окрестности опоры  $x_1 \leq x \leq 1$  – состояние, соответствующее стороне  $A_1B_1$ .

Таким образом в области  $0 \leq x \leq x_1$  будем иметь

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + D_0\chi_1, \quad M_2 = M_0 + D_0\chi_2 \\ \chi_1 &= -w'', \quad \chi_2 = -\frac{1}{x}w'. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключая  $Q$  из уравнений (8), (9), получим уравнение

$$(xM_1)'' - M_2' = -x(p_0\psi(t) - m\ddot{w}). \quad (9)$$

Подставляя в него значения (8) получим уравнение для прогиба  $w(x, t)$  в области  $0 \leq x \leq x_1$ :

$$D_0 \left( w^{IV} + 2\frac{w'''}{x} - \frac{w''}{x^2} + \frac{w'}{x^3} \right) = p_0\psi(t) - m\ddot{w}. \quad (10)$$

Если все материалы являются идеально пластическими (неупрочняющимися), то  $D_0 = 0$  и уравнение (10) будет иметь вид:

$$\ddot{w} = \frac{p_0}{m}\psi(t). \quad (11)$$

Если хотя бы один из материалов будет упрочняющимся, то  $D_0 \neq 0$  и уравнение (10) в области  $0 \leq x \leq x_1$  будет иметь вид:

$$w^{IV} + 2\frac{w'''}{x} - \frac{w''}{x^2} + \frac{w'}{x^3} + \frac{m}{D_0}\ddot{w} = p_0\psi(t). \quad (12)$$

Представим решение этого уравнения в форме

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t), \quad (13)$$

где  $w_2(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{w}_2 = p_0\psi(t). \quad (14)$$

Тогда для  $w_1(x, t)$  получим уравнение

$$w_1^{IV} + 2\frac{w_1'''}{x} - \frac{w_1''}{x^2} + \frac{w_1'}{x^3} + \frac{m}{D_0}\ddot{w} = 0. \quad (15)$$

В области  $x_1 \leq x \leq 1$  реализуется состояние, соответствующее отрезку  $A_1B_1$  на рис. 3 и должны выполняться условия

$$\begin{aligned} M_1(x_1, t) &= M_0, & M_1(1, t) &= 0 \\ w(1, t) &= 0, & w(x_1, t) &= v_1(t). \end{aligned} \quad (16)$$

В соответствии с этим будем иметь

$$w = \frac{(1-x)}{(1-x_1)}v_1(t), \quad \chi_2 = \frac{v_1(t)}{(1-x_1)x},$$

$$M_2(x, t) = M_0 + D_0 \frac{\nu_1(t)}{(1-x_1)x}$$

$$\begin{aligned} M_1(x, t) &= M_0 + Q_1 \frac{x_1(x-x_1)}{x} - \frac{p_0\psi(t)}{12} \frac{[2(x^3-x_1^3)-3x_1^2(x-x_1)]}{x} + \\ &+ \frac{m\dot{v}_1}{6(1-x_1)x} [3(x^2-x_1^2) - 6(x-x_1) - (x^3-x_1^3) + 3x_1^2(x-x_1)] + \frac{D_0v_1}{x(1-x_1)} \ln \frac{x}{x_1}. \end{aligned}$$

Из условия  $M(1, t)$  получим равенство

$$\begin{aligned} M_0 + Q_1x_1(1-x_1) - \frac{P_0\psi(t)}{12} [2(1-x_1^3) - 3x_1^2(1-x_1)] + \\ + \frac{m\dot{v}_1}{6(1-x_1)} [3(1-x_1^2) - 6x_1(1-x_1) - (1-x_1^3) + 3x_1^2(1-x_1)] + \frac{D_0v_1}{2(1-x_1)} \ln \frac{1}{x_1} = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для уравнения (10) имеют вид:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w_0(t)_1, & w'(0, t) &= 0, \\ w''(x_1, t) &= 0, & \kappa_1(0, t) &= \kappa_2(0, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, на границе  $x = x_1$  должны выполняться условия

$$[w(x_1, t)] = 0, \quad [w'(x_1, t)] = 0, \quad [Q(x_1, t)] = 0. \quad (18)$$

Получающаяся в итоге система нелинейных дифференциальных уравнений требует разработки специальных алгоритмов численного счета, которые здесь обсуждаться не могут.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive Welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3. № 4. P. 669–701.

[2] Король В. К., Гилдергорг М. С. Основы производства многослойных материалов. М.: Металлургия, 1978. 277 с.

[3] Дерibas А. А. Физика прочности и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1977. 188 с.

[4] Немировский Ю. В. Рациональное проектирование плоских преград при воздействии взрывных нагрузок // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: Труды VII Всероссийской научной конференции (Красноярск, 13–17 октября 2003 г.). Красноярск, 2003. Т. 1. С. 191–194.

[5] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159.

[6] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние полиметаллических круглых и кольцевых пластин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(9). С. 189–195.

[7] Прагер В. Новый метод анализа напряжений и деформаций в пластических телах, обладающих упрочнением // Механика. 1957. № 5. С. 124–129.

*Yu. V. Nemirovskii*

### DYNAMIC BEHAVIOR POLYMETALLIC CIRCULAR PLATE OF REINFORCING MATERIALS

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** For polymetallic circular and annular plates of plastic material with linear hardening developed a method for solving problems of dynamic deformation when subjected to intensive loads explosive. As the physical laws of deformation model is used for the linear B. Prager hardening materials with piecewise linear potential Cod. As examples, the problem of the deformation of the ring free on the domestic circuit and solid plate in the case of hinged support on the external circuit.

**Keywords:** circular and annular plates, rigid-plastic materials, explosive load, W. Prager model, a linear hardening, metallurgy designs.

### REFERENCES

[1] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive Welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3. № 4. P. 669–701.

[2] Korol' V. K., Gildergorg M. S. Osnovy proizvodstva mnogoslojnyh materialov. M.: Metallurgija, 1978. 277 s. (in Russian).

[3] Deribas A. A. Fizika prochnosti i svarki vzryvom. Novosibirsk: Nauka, 1977. 188 s. (in Russian).

[4] Nemirovskij Ju. V. Racional'noe proektirovanie ploskih pregrad pri vozdeystvii vzryvnyh nagruzok // Sovremennye metody matematicheskogo modelirovaniya prirodnyh i antropogennyh katastrof: Trudy VII Vserossijskoj nauchnoj konferencii (Krasnojarsk, 13–17 oktjabrja 2003 g.). Krasnojarsk, 2003. Vol. 1. P. 191–194. (in Russian).

[5] Nemirovskij Ju. V. Vtoroe predel'noe sostojanie odnorodnyh i kompozitnyh balok // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojaniya. 2009. № 1. P. 150–159. (in Russian).

---

*Nemirovsky Yuri Vladimirovich*

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

[6] Nemirovskij Ju. V. Vtoroe predel'noe sostojanie polimetallicheskih kruglyh i kol'cevych plastin // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 1(9). P. 189–195. (in Russian).

[7] Prager V. Novyj metod analiza naprjazhenij i deformacij v plasticheskikh telah, obladajushhij uprochneniem // Mehanika. 1957. № 5. P. 124–129. (in Russian).