Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 11–40

В. А. Ковалев[1], *Ю. Н. Радаев*[2]

КАНОНИЧЕСКАЯ ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОУПРУГОГО КОНТИНУУМА С ТРЕМЯ ПОЛЯРНЫМИ ДИРЕКТОРАМИ

[1]*Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия*

[2]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

Аннотация. Рассматривается каноническая теоретико-полевая модель нелинейного термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой, определяемой, в частности, тремя векторными полярными директорами. Построение модели осуществляется в терминах 4-ковариантного полевого лагранжева формализма. «Тонкая» микроструктура континуума задается микроструктурными d-векторами и d-тензорами произвольно высоких рангов. d-тензоры вводятся в теоретико-полевую схему как экстра-полевые переменные (d-переменные). Микроструктурные векторные и тензорные экстра-полевые переменные могут быть подчинены уравнениям связей (ограничениям), конечным или дифференциальным. Указывается плотность вариационного интегрального функционала термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. При этом выполнен учет инерционности микроструктурной «составляющей» поля. Ковариантные уравнения термоупругого поля в континууме с микроструктурой получаются в канонической форме Эйлера – Лагранжа. Возможные связи между микроструктурными переменными учтены с помощью правила множителей Лагранжа. Вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия применяются для построения ковариантных канонических тензоров термомеханики и 4-токов. Даны канонические формы дивергентных законов сохранения термоупругого поля в плоском 4-пространстве-времени. Рассматриваются вопросы, касающиеся инвариантности интегрального функционала действия относительно сдвигов эйлеровых полевых переменных, времени и температурного смещения, а также трехмерных вращений эйлеровой координатной системы. Исследуется проблема ротационной инвариантности «естественной» плотности микрополярного термоупругого действия. Сформулированы дифференциальные и функциональные условия ротационной инвариантности лагранжиана.

УДК: 533.374

Ковалев Владимир Александрович
`e-mail:` vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Поступила 12.01.2016

Последние затем используются с целью поиска ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Найдена система независимых ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Дается формальное доказательство ее полноты. Получена удовлетворяющая принципу объективности форма свободной энергии Гельмгольца. Указанная форма содержит явные вхождения ротационно-инвариантных векторов и тензоров экстра-деформации. Построены удовлетворяющие принципу объективности формы определяющих уравнений гиперболического микрополярного термоупругого континуума, соответствующие ротационно-инвариантному лагранжиану. Рассматривается альтернативная возможность построения полной системы независимых ротационно-инвариантных аргументов.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, поле, экстра-поле, действие, ковариантность, закон сохранения, d-тензор, 4-ток, тензор энергии-импульса, связь, множитель Лагранжа, ротационная инвариантность, принцип объективности, тензор экстра-деформации.

Вводные замечания. Последние годы отмечены весьма интенсивным развитием механики метаматериалов, обладающих весьма необычной микроструктурой и аномальным механическим поведением. Под микроструктурой континуума обычно понимается существование нескольких различных физических масштабов (структурных уровней), определяющих состояние континуума, их самосогласованное взаимодействие и возможность передачи энергии с одного структурного уровня на другой. Теория таких континуумов основывается на необходимости допустить существование дополнительных (экстра) степеней свободы и возможности исследовать физически бесконечно малый объем не как материальную точку, а как существенно более сложный объект, с присущими ему дополнительными степенями свободы (ротационными, осцилляционными), как своего рода микроконтинуум, обладающий возможностью дополнительной (экстра) микродеформации. Поиск нелинейных представлений для лагранжианов, гамильтонианов, экстра-напряжений и экстра-деформаций, справедливых в самом общем случае конечных деформаций и поворотов, для континуумов с микроструктурой выступает в настоящее время как одна из важнейших задач теории и механики сплошных сред.

Вопросы, связанные с изучением континуума с микроструктурой, находятся в русле тех течений в механике деформируемого твердого тела, которые отдают приоритет структурному моделированию. При этом необходимо учитывать, что существенной особенностью современного состояния естественных наук является явно просматриваемая тенденция решения нелинейных проблем (в том числе и проблем механики деформируемого твердого тела) вне рамок имеющегося физически надежно обоснованного набора математических моделей. Конечной целью математического моделирования обычно ставится формулировка замкнутых систем уравнений, без чего в принципе невозможны постановка и решение прикладных задач. Корректное построение новых математических моделей континуума, в свою очередь, должно опираться на проверенные временем принципы и методы. Не последняя роль здесь принадлежит методам теории поля. Часто эти методы выступают как единственный инструмент вывода физически приемлемых уравнений.

Для решения проблем анализа и синтеза материалов с заданными свойствами существенна развитая иерархия математических моделей. Именно в связи с этим обстоятельством по-прежнему актуальны методы построения и исследования математических моделей сред с микроструктурой. Один из них состоит в обобщении континуальной модели, выражающемся в расширении понятия представительного объема среды (RVE) и учета дополнительных (экстра) внутренних степеней свободы — микроповоротов и аффинных деформаций мезообьема (континуум Коссера, микроморфная среда).[1]

Нелинейные термомеханические модели сложных континуумов с микроструктурой, в частности, микрополярные среды и метаматериалы, в решающей степени определяются термодинамическими параметрами состояния, которые формируются из независимых объективных (т. е. выдерживающих повороты эйлеровой пространственной координатной системы в трехмерном пространстве) скалярных, векторных и тензорных переменных, определяющих термодинамическое состояние микроэлемента. Подобные системы термодинамических параметров состояния мы будем называть также термодинамическими базисами. Термодинамический базис должен обладать необходимыми свойствами полноты относительно тензорных мер состояния континуума.

Целью настоящей работы является построение нелинейной теоретико-полевой модели термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой, представляемой конечным набором тензоров, ранг которых может быть сколь угодно высоким. Значительный прогресс в этой области связан прежде всего с тем, что в качестве базисных переменных допускаются не только термодинамические переменные состояния (так называемые «медленные переменные»), ассоциированные с термическими и микроструктурными свойствами континуума, но и их референциальные градиенты («быстрые переменные»). При этом переменные состояния и их градиенты считаются функционально-независимыми. Именно следуя по этому пути, удается создать новую термомеханику континуума с гиперболическими уравнениями транспорта тепла. Последнее обстоятельство вполне соответствует новой гиперболической парадигме развития теории и механики континуума [1], [2].

Современная механика и физика сплошных деформируемых сред в целом ряде важных прикладных направлений должна развиваться только на основе теоретико-полевого подхода, только в этом случае обеспечиваются физически приемлемые уравнения. Это обстоятельство характерно прежде всего для сложных континуумов с экстрастепенями свободы, приписываемыми микроэлементам; в частности, для микрополярных сред, когда допустимы дополнительные повороты и аффинные деформации микроэлементов. Теории поля обладают одним неоспоримым аналитическим преимуществом — возможностью их систематического вывода из одного вариационного функционала. Указанный вариационный функционал называется действием. Принцип наименьшего действия отделяет действительные процессы и состояния от всех

[1]Необходимо заметить, что континуум Коссера с «нежестким» репером микрополярных директоров, по существу, предполагает возможной произвольную аффинную деформацию микроэлемента и поэтому может трактоваться и как микроморфный континуум. Такие среды мы будем также называть микрополярными.

других, кинематически и термодинамически допустимых. Преимущества теоретико-полевой точки зрения в механике микрополярных континуумов убедительно продемонстрированы в статье [3]. Важными элементами теоретико-полевого подхода являются также ковариантность дифференциальных уравнений поля и вариационные симметрии поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля и выполняются в силу уравнений поля, т. е. на решениях дифференциальных уравнений поля.

Последовательное применение теоретико-полевого подхода в механике континуума приводит к естественным формулировкам определяющих уравнений. Задание плотности действия позволяет однозначно сформулировать определяющие уравнения континуума, причем сразу же в ковариантной форме, без всякого дополнительного конструирования. То же самое касается соотношений совместности сильных разрывов на волновых поверхностях. Однако дополнительные рассмотрения все же необходимы, если вести речь об объективизации независимых функциональных аргументов плотности действия. Переход к ротационно-инвариантным функциональным аргументам лагранжиана, наряду с требованием галилеевой трансляционной инвариантности, окончательно определяет его «общую» форму и соответствующие общие формы объективных определяющих уравнений.

Теоретико-полевые формулировки всегда подразумевают существенное и интенсивное использование понятий и формализма вариационного исчисления [4]. С формальной точки зрения принцип наименьшего действия принадлежит к классу основных (и простейших) задач вариационного исчисления. Однако по существу это не в полной мере соответствует действительности, поскольку в механике символ вариации традиционно обозначает виртуальную вариацию, т. е. не произвольное сколь угодно малое изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния. Виртуальные вариации определяющих переменных являются произвольными, только если они независимы друг от друга. В противном случае принцип наименьшего действия следует отнести к классу *связанных* задач вариационного исчисления. Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа [4]. Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления (calculus of variations with constraints). Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств. Решение подобного рода задач обычно выполняется с помощью правила множителей Лагранжа (см., например, [5, с. 114–129]). Рассмотрение вариационных задач для интегрального функционала с ограничениями типа равенств и неравенств на уровне необходимых условий сводится к проблеме безусловного экстремума с помощью правила Лагранжа. Оказывается, что этот принцип распространяется на задачи весьма сложной природы.

Структуру настоящей работы можно охарактеризовать следующим образом. После данных выше вводных замечаний, во втором разделе, излагаются основы теоретико-полевого подхода, пригодного, как хорошо известно, для описания механических и физических полей различной природы. Здесь же формулируется принцип наименьшего действия и следующие из него дифференциальные уравнения поля, дается понятие об инвариантности интегрального функционала действия, основы теории вариационных симметрий действия и дивергентных законов сохранения, выполняющихся в силу уравнений поля. В третьем разделе обсуждается одна теоретико-полевая модель термоупругого континуума второго типа с «тонкой» микроструктурой, которая представляеется конечным набором тензоров, выступающих как экстра-полевые переменные. Указанным экстра-полевым переменным соответствуют экстра-деформации и экстра-напряжения. В самом простом, но в то же время весьма интересном случае, микроструктура континуума задается системой трех «нежестких» векторных директоров. В этом же разделе получены дифференциальные уравнения поля и определяющие уравнения. Четвертый раздел посвящен построению тензора энергии-импульса термоупругого континуума второго типа с «тонкой» микроструктурой, с помощью которого получены канонические полевые величины (энергия, канонический импульс, вектор Умова – Пойнтинга и тензор напряжений Эшелби) и канонические законы сохранения. В пятом разделе правило множителей Лагранжа применяется для вывода уравнений поля при наличии связей между микроструктурными переменными. Связи могут быть конечными и дифференциальными. В каждом их этих случаев получены уравнения поля. В качестве примера рассматривается микрополярный континуум с жестким репером директоров, определяющих его микроструктуру. Шестой раздел включает вопросы, связанные с построением ротационно-инвариантных лагранжианов связанного микрополярного термоупругого поля. Здесь получены функциональные условия ротационной инвариантности действия и плотности действия, независимые ротационно-инвариантные аргументы образующие полную систему (при этом особое внимание уделяется формальному доказательству ее полноты), и удовлетворяющая принципу объективности наиболее общая функциональная форма свободной энергии Гельмгольца. Кроме того, рассматривается альтернативная возможность построения полной системы независимых ротационно-инвариантных аргументов, основанная на полярном разложении градиента деформации. Наконец, заключительный седьмой раздел работы посвящен выводу объективных форм определяющих уравнений микрополярного термоупругого континуума.

Целью настоящей работы является обобщение результатов полученных в области связанной микрополярной термоупругости, которые частично также представлены в публикациях Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного термоупругого континуума второго типа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 96–102; и Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Объективные ротационно-инвариантные формы термоупругих лагранжианов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 10, № 2. С. 325–340.

Теоретико-полевой подход в механике континуума, вариационные симметрии действия и дивергентные законы сохранения. Ключевое положение классической теории поля (см., например, монографии [6], [7]) заключается в том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом $\Im$, который по историческим причинам называется действием (action):

$$\Im = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \,\ldots, X^\beta) d^4 X. \tag{1}$$

Здесь характерная для теории поля символика, развитая в [6], [7], имеет следующий смысл:

$\mathcal{L}$ — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия);

φ^k — упорядоченный массив физических полевых переменных;

X^β $(\beta = 1, 2, 3, 4)$ — четыре пространственно-временные координаты;

d^4X — «естественный» элемент объема четырехмерного пространства-времени.

Заметим, что в традиционных текстах, посвященных классической теории поля, действие и функционал действия обычно обозначаются через S.

Символ d^4X в (1) указывает на «естественный» пространственно-временной элемент объема и представляет собой обычное произведение дифференциалов пространственно-временных координат:

$$d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \tag{2}$$

Через ∂_β в математическом оформлении действия, данном (1) и далее, обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\mathrm{expl}} + \sum_{s\geq 0} \left(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s}\partial_\beta\varphi^l\right) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s}\varphi^l)}, \tag{3}$$

где символом $\partial_\beta^{\mathrm{expl}}$ указывается оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β.

Четвертую по счету координату в дальнейшем будем ассоциировать со временем, которое, возможно, будет трансформироваться с помощью размерной постоянной так, чтобы уравнять физические размерности всех четырех пространственно-временных координат. Полное дифференцирование по времени будет обозначаться как символом ∂_4, так и традиционной точкой.

В теориях поля лагранжиан $\mathcal{L}$ всегда приходится рассматривать как функцию следующего набора переменных:

$$\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \,\ldots, X^\gamma. \tag{4}$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или конструируют, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение принципиально новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы, является, в известном смысле, достаточно сложным видом искусства.

Вариационное описание поля не может быть осуществлено без предварительного указания пространственно-временного многообразия с возможностью измерения в нем элементарных длин и объемов. Пространство-время обладает рядом фундаментальных особенностей: пространство и время однородны (отсутствуют привилегированные места в пространстве и избранные точки отсчета времени); пространство изотропно (нет избранных преимущественных направлений); четырехмерное пространство-время изотропно; пространство, возможно, обладает некоторыми скрытыми симметриями; направление хода времени не регламентировано. Перечисленные свойства пространства-времени могут быть сформулированы на языке групп преобразований пространственно-временных координат.

Преобразование пространственно-временных координат и физических полевых переменных

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) \tag{5}$$

порождает, очевидно, преобразование всего комплекса переменных (4)

$$\begin{array}{c} X^{\gamma}, \varphi^{s}, \partial_{\alpha_1}\varphi^{s}, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^{s}, \ ... \\ \downarrow \\ \widetilde{X}^{\gamma}, \widetilde{\varphi}^{s}, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\varphi}^{s}, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\widetilde{\varphi}^{s}, \ ... \,. \end{array} \tag{6}$$

Чаще всего предполагается, что преобразования (5) образуют однопараметрическую группу преобразований (группу Ли преобразований).

Полные вариации полевых переменных и пространственно-временных координат, отвечающие их преобразованию в соответствии с (5), вычисляются согласно

$$\delta X^{\beta} = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^{\beta}(\varphi^{s}, X^{\gamma}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \qquad \delta \varphi^{k} = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^{k}(\varphi^{s}, X^{\gamma}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

Для теории поля числовая *величина* действия не столь важна, как его *форма*, задаваемая лагранжианом $\mathcal{L}$, который определяется (помимо всего прочего) выбором тех или иных координатных систем в пространственно-временном многообразии и математического представления полевых переменных. В новых переменных, вообще говоря, изменяется форма лагранжиана $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}},$$

где $\widetilde{\mathcal{L}}$ — "естественная" плотность лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат $\widetilde{X}^{\beta}$ и физических полей $\widetilde{\varphi}^{k}$. Однако величина действия должна оставаться неизменной (так называемая эквивалентность действия относительно группы преобразований (5)). Таким образом, функционалы

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^{k}, \partial_{\alpha}\varphi^{k}, \partial_{\gamma}\partial_{\alpha}\varphi^{k}, ..., X^{\beta}) d^4 X, \tag{7}$$

$$\widetilde{\Im} = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^{k}, \widetilde{\partial}_{\alpha}\widetilde{\varphi}^{k}, \widetilde{\partial}_{\gamma}\widetilde{\partial}_{\alpha}\widetilde{\varphi}^{k}, ..., \widetilde{X}^{\beta}) d^4 \widetilde{X} \tag{8}$$

называются эквивалентными при их преобразовании группой (5) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\widetilde{\Im} = \Im.$$

Математическое описание поля представляет собой вариационный принцип, который по соображениям исторического характера, называется вариационным принципом Гамильтона – Остроградского (или принципом наименьшего действия). Действительное поле реализуется в пространстве-времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^{k} при неварьируемых пространственно-временных координатах и четырехмерной области, выступающей в качестве носителя поля:

$$\delta \Im = 0. \tag{9}$$

В аналитической механике такому способу варьирования отвечают так называемые изохронные вариации.

Из принципа наименьшего действия получаются ковариантные дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\mathcal{E}_{k}(\mathcal{L}) = 0, \tag{10}$$

где

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \cdots \tag{11}$$

есть один из важнейших дифференциальных операторов математической физики — оператор Эйлера.

Действительные физические поля (при условии их гладкости) обязаны удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа (10).

Структура дифференцирований в операторе Эйлера становится более понятной и обозримой, если ввести обозначения (см. [8])

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^l} = \underset{0}{\partial}_l, \qquad \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s}\varphi^l)} = \underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s} \tag{12}$$

и записать его символически в форме

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s\geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s} \underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}. \tag{13}$$

Здесь в сумме при $s = 0$ подразумевается слагаемое $\underset{0}{\partial}_l$, обозначающее частное дифференцирование по полевой переменной φ^l.

Заметим, что принцип наименьшего действия ограничивает физически допустимые лагранжианы. Так, недопустимы лагранжианы, для которых соответствующие интегральные функционалы не имеют экстремалей ни при каких вещественных полевых переменных или для которых дифференциальные уравнения поля (10) противоречивы.

В современной научной литературе часто говорится об инвариантности уравнений Эйлера – Лагранжа. Однако это противоречит действительному положению дел. Математически строгое определение инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно группы преобразований известно из группового анализа и означает сохранение формы уравнений при их преобразовании к новым переменным согласно (5). Относительно произвольной однопараметрической геометрической группы преобразований (5) уравнения Эйлера – Лагранжа, вообще говоря, не инвариантны, но они ковариантны (при условии, что действие удовлетворяет принципу эквивалентности, гарантирующему при, возможно, изменяющейся «естественной» плотности лагранжиана постоянство величины действия относительно произвольных геометрических преобразований пространственно-временных координат и полевых переменных), поскольку в новых переменных правило их составления остается прежним.

Исключительный интерес в теории вариационных симметрий представляют однопараметрические геометрические группы преобразований, которые при неизменности формы функционала действия сохраняют его величину при преобразовании координат и полей согласно (5) и соответствии пространственно-временных 4-областей интегрирования в переменных X^β и $\widetilde{X}^\beta$. Указанные группы обычно называют геометрическими группами абсолютной инвариантности функционала действия, а также абсолютными геометрическими симметриями действия по Гамильтону (или просто вариационными симметриями действия). Таким образом, в том случае, когда преобразование (5) является вариационной симметрией действия, выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, ..., X^\beta)d^4X = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, ..., \widetilde{X}^\beta)d^4\widetilde{X}. \qquad (14)$$

Инвариантность интегрального функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической геометрической группы преобразований (5) порождает, как известно, некоторый дивергентный закон сохранения. Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые получаются как уравнения Эйлера – Лагранжа некоторой вариационной задачи, следующих из существования геометрических вариационных симметрий действия, излагается, например, в [8, с. 377–386]. Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального уравнения

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \qquad (15)$$

где

$$J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\mu)$$

— 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля. Вектор J^β — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньшего порядка уравнений поля; этот вектор называется вектором тока (или 4-током).

Классический метод поиска законов сохранения с помощью вариационных симметрий действия кратко может быть описан следующим образом.

Критерий инвариантности интегрального функционала действия (1) относительно геометрической группы преобразований (5) имеет вид:

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \qquad (16)$$

где вариация лагранжиана $\delta\mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, ..., \widetilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, ..., X^\beta). \qquad (17)$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, вариация лагранжиана, очевидно, равна

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\delta\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\delta(\partial_\beta\varphi^k).$$

Учитывая затем формулу для полной вариации первых градиентов поля

$$\delta(\partial_\beta\varphi^k) = \partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) + (\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)\delta X^\gamma,$$

где вариации $\delta\varphi^k$ (полная) и $\overline{\delta}\varphi^k$ (частичная) связаны уравнением

$$\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\varphi^k)\delta X^\gamma,$$

получаем

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) \qquad (18)$$

или

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k\right). \tag{19}$$

В результате, когда вариационная симметрия действия известна и лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, уравнение (16) преобразуется к

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L})\bar{\delta}\varphi^j + \partial_\beta\left(\mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k\right) = 0. \tag{20}$$

Разделив затем левые и правые части (20) на параметр ε и обозначая

$$\mathcal{Q}^j = \frac{\bar{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}, \qquad J^\beta = \mathcal{L}\frac{\delta X^\beta}{\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\frac{\bar{\delta}\varphi^k}{\varepsilon},$$

приходим к равенству

$$\mathcal{Q}^j\mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \partial_\beta(-J^\beta). \tag{21}$$

Таким образом, при выполнении уравнений поля (10) будет справедлив дивергентный закон сохранения (15).

Физическая полевая теория термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой. Одним из самых распространенных подходов к изучению деформации континуума является концепция сравнения пространственных положений составляющих его точек. В этом плане необходимы инструменты, позволяющие однозначно идентифицировать все точки, совокупность которых образует континуум. В качестве одного из способов индивидуализации, широко используемых в механике деформируемого твердого тела, обычно выступают метки, частным вариантом которых являются лагранжевы координаты-метки. Однако в некоторых случаях механизм идентификации заранее может быть не вполне ясным, как это видно на примере перемещения тени, отбрасываемой некоторым движущимся от системы источников света телом.

Сделаем одно важное замечание. Индивидуальные точки континуума в механике континуума представляются специальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, которая, в свою очередь, идентифицируется с помощью координат ξ^α (так называемые материальные координаты). Референциальная координата $\mathbf{X}$ всегда взаимно-однозначно связана с материальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, поэтому референциальную переменную $\mathbf{X}$ можно рассматривать как материальную и попросту отождествить переменные $\mathbf{X}$ и $\boldsymbol{\xi}$. То же самое относится к координатам X^α и ξ^α.

Ясно, что в наиболее общей форме деформацию континуума можно выразить отображением

$$\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{x}, \tag{22}$$

которое в каждый данный момент времени t указывает пространственное положение $\mathbf{x}$ индивидуальной точки континуума $\boldsymbol{\xi}$. В силу сказанного выше, отображение (22) может быть заменено

$$\mathbf{X} \to \mathbf{x}. \tag{23}$$

В теориях континуума с микроструктурой (см., например, [3]) произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием позиционных переменных, т. е. преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{24}$$

положения $\mathbf{X}$ отсчетной (референциальной) конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$ пространства, сопровождается экстра-деформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некомпланарных полярных d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$, связанных с микроэлементом:

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t). \tag{25}$$

Деформация и экстра-деформация в координатах X^α, x^j имеют следующий вид:

$$x^j = x^j(X^\alpha, t), \tag{26}$$

$$\underset{\mathfrak{a}}{d^j} = \underset{\mathfrak{a}}{d^j}(X^\alpha, t). \tag{27}$$

Система трех пространственных полярных d-векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, задает микрополярную структуру континуума. Эта система в самом общем случае предполагается «нежесткой».

Переменные $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ (и позиционные координаты X^α, x^j) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума [9], [10]. С этими переменными связаны метрики: отсчетная (лагранжева) метрика ${}^\backprime g_{\alpha\beta}$ и пространственная (эйлерова) метрика g_{ij}. Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и, в отличии от метрик ${}^\backprime g_{\alpha\beta}$ и g_{ij}, определяется деформацией (24).

Как ясно из предложенных обозначений эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы. Индексы, имеющие начертания $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... , применяются для идентификации d-вектора. Обратным штрихом (backprime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием. Так, например, в силу принятого выше соглашения о референциальном и актуальном положениях точек континуума должно выполняться равенство

$$^\backprime\mathbf{x} = \mathbf{X}.$$

В такого рода равенствах латинский индекс у координаты x^j может трансформироваться в греческий. Кроме того, референциальное положение d-векторов часто удобнее вместо ${}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d^j}$ указывать компонентами с греческим индексом

$$^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d^\alpha}, \qquad {}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d^j} = \frac{\partial\,{}^\backprime x^j}{\partial X^\alpha}\,{}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d^\alpha} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j,\ \alpha = 1, 2, 3).$$

Следуя известным схемам построения математических теорий континуумов, введем градиент «конечной» деформации (градиент места, position gradient) или «дисторсию» [5], [11]

$$\partial_\alpha x^j \qquad (j, \alpha = 1, 2, 3) \tag{28}$$

и соответствующий якобиан

$$J = \det(\partial_\alpha x^j). \tag{29}$$

Дисторсия, как хорошо известно, характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Она никогда не вырождается, поэтому якобиан деформации J сохраняет свой знак.

Конвективная метрика вычисляется с помощью градиента деформации согласно следующей формуле:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j) \tag{30}$$

и в силу своего определения ротационно-инвариантна при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы x^j. Последнее справедливо и для отсчетной метрики ${}^\backprime g_{\alpha\beta}$, поскольку

$$ {}^\backprime g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha {}^\backprime x^i)(\partial_\beta {}^\backprime x^j). \tag{31}$$

Заметим, что лагранжевы переменные X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), дополненные четвертой временной координатой, выступают в развиваемой ниже теории как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные x^j ($j = 1, 2, 3$) представляют собой физические поля. То же самое относится и к «нежесткой» системе d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$). Но они классифицируются нами как экстра-полевые (сверх переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$). Таким образом, полевыми переменными в данной модели будут выступать переменные

$$x^j \quad (j = 1, 2, 3); \qquad \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^k \quad (k = 1, 2, 3;\ \mathfrak{a} = 1, 2, 3). \tag{32}$$

Как указывалось выше, система трех d-векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, собственно и задает микроструктуру континуума. С теоретико-полевой точки зрения наличие микроструктуры приводит лишь к увеличению числа полевых переменных и, возможно, повышению максимального порядка дифференцирований в списке функциональных аргументов «естественной» плотности лагранжиана. Более «тонкая» (fine) микроструктура континуума представляется экстра-полями контравариантных тензоров (d-тензоров) сколь угодно высоких рангов

$$\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots} \qquad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots). \tag{33}$$

Экстра-деформация, обусловленная наличием «тонкой» микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (25), т. е.

$$\underset{\mathfrak{c}}{\mathbf{d}} = \underset{\mathfrak{c}}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t) \qquad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots) \tag{34}$$

или в координатном представлении —

$$\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots} = \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots}(X^\alpha, t) \qquad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots). \tag{35}$$

Поведение репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$) характеризуется как его возможной «чистой» деформацией (сдвигами трехгранника и удлинениями его ребер), так и поворотом, поэтому становится ясно, что каждый элемент континуума с микроструктурой обладает большим числом степеней свободы, чем классический континуум, деформация которого сводится лишь к трансформации позиционных координат (24). С дополнительными степенями свободы, которыми обладает микроэлемент, связаны естественно и дополнительные (экстра) инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие (кинетическая энергия и свободная энергия). Трансформация репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$) может сводиться только к его «жестким» поворотам в пространстве; в этом случае [12] помимо трех трансляционных степеней свободы микроэлемент будет обладать лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы.

Полевые переменные (32) в любой термомеханической модели должны дополняться термическими переменными. В дальнейшем будет развиваться термомеханика с единственной термической переменной. В качестве основной термической полевой переменной примем температурное смещение ϑ, которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ:

$$\vartheta = \int \theta dt. \tag{36}$$

Именно такой подход характерен для теоретико-полевых формулировок термомеханики континуума [13]–[20].

Перечислим далее все определяющие переменные термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой. Помимо переменных x^j и ϑ и их скоростей $\partial_4 x^j = \dot{x}^j$, $\partial_4\vartheta = \dot{\vartheta}$, к ним относятся:

градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ $(j, \alpha = 1,2,3)$;
d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$;
d-тензоры $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1,2,3,\ \ldots;\ j_1, j_2, \cdots = 1,2,3)$;
референциальные градиенты d-векторов $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j$
$(\mathfrak{a} = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3)$;
референциальные градиенты d-тензоров $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$
$(\mathfrak{c} = 1,2,3,\ \ldots;\ \alpha = 1,2,3;\ j_1, j_2, \cdots = 1,2,3)$;
референциальный градиент температурного смещения $\partial_\alpha\vartheta$ $(\alpha = 1,2,3)$.

Для связанного термомеханического поля в терминах отсчетных переменных X^α $(\alpha = 1,2,3)$, эйлеровых переменных x^j $(j = 1,2,3)$, экстра-полевых d-переменных и температурного смещения ϑ «естественная» плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии принимается в следующей форме:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha\vartheta). \tag{37}$$

Данная выше форма термомеханического лагранжиана $\mathcal{L}$ по необходимости является весьма общей. Более специальная форма получается, если рассматривать плотность действия как разность плотности кинетической энергии и плотности свободной энергии Гельмгольца

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{ij} \overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{J}} \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^i \underset{\mathfrak{b}}{\dot{d}}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} \sum_\kappa g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \cdots \underset{\kappa}{\overset{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{J}}} \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots} \underset{\mathfrak{d}}{\dot{d}}^{k_1 k_2 \cdots} \cdots - \\ -\psi(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha\vartheta).\end{aligned} \tag{38}$$

Здесь точкой в верхней позиции обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах X^α, которое мы будем обозначать также с помощью оператора ∂_4; ρ_{R} — референциальная плотность; $\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{J}}$, $\underset{\kappa}{\overset{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{J}}}$ – тензоры инерции микроэлемента. Первые три слагаемых в (38) составыляют кинетическую часть плотности действия.

Вариационный интеграл термомеханического действия в силу указанной формулой (37) плотности действия будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha\vartheta) d^4X. \\ (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \mathfrak{c} = 1,2,3,\ \ldots;\ \alpha,\ \beta = 1,2,3;\ j, j_1, j_2, \cdots = 1,2,3).\end{gathered} \tag{39}$$

Соответствующие вариационному интегралу (39) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля получаются в ковариантной форме и распадаются на следующие четыре группы:

$$
\begin{aligned}
&\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2\cdots} + \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2\cdots} - \partial_4 \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2\cdots} = 0,\\
&(\mathfrak{c} = 1,2,3,\ \ldots;\ \alpha = 1,2,3;\ j_1, j_2, \cdots = 1,2,3)\\
&\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3).
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Лагранжев полевой формализм исключительно удобен тем, что *определяющие* уравнения континуума выступают просто как обозначения для полевых частных производных, которые вводятся для записи дифференциальных уравнений поля (40):

$$
\begin{aligned}
&P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^j}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2\cdots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}{}^{j_1 j_2\cdots}},\\
&S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2\cdots} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2\cdots})},\\
&\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2\cdots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2\cdots}},\\
&s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad j^\alpha_{\mathrm{R}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \vartheta)}.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

В приведенных выше определяющих уравнениях (41) приняты следующие обозначения:

P_j — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы;

$\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2\cdots}$ — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным степеням свободы;

$S^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$ — первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа;

$\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2\cdots}$ — «первые» тензоры экстранапряжений;

$\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2\cdots}$ — обобщенные силы, сопряженные экстра-полевым переменным $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ ($\mathfrak{a} = 1,2,3$; $j = 1,2,3$), $\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2\cdots}$ ($\mathfrak{c} = 1,2,3,\ \ldots$; $j_1, j_2, \cdots = 1,2,3$);

s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии);

j^α_{R} — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Скалярное полевое уравнение в последней строке системы (40) выражает баланс энтропии. Если плотность действия $\mathcal{L}$ не содержит явных вхождений температурного смещения ϑ, то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в гиперболической термоупругости [7].

Рассмотрим важный и сравнительно простой случай, когда параметрами микрострукутры являются только d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1,2,3;\ j = 1,2,3$), не подчиняющиеся никаким дополнительным кинематическим ограничениям. В этом случае система дифференциальных уравнений поля (40) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\ &\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\ &\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3). \end{aligned} \tag{42}$$

Уравнения поля (42) несколько упрощаются, если считать, что лагранжиан $\mathcal{L}$ обладает свойством трансляционной инвариантности относительно произвольных сдвигов эйлеровых переменных x^j и температурного смещения ϑ. В этом случае явная зависимость лагранжиана от переменных x^j и ϑ исключается и вместо (42) приходим к системе уравнений поля

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = 0 \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\ &\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\ &\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = 0 \qquad (\alpha = 1,2,3). \end{aligned} \tag{43}$$

Плоское пространство-время. Трансляции пространственно-временных координат. Законы сохранения. В дальнейшем будем считать пространство-время плоским. В этом случае выполняется условие трансляционной инвариантности действия. Поэтому можно ввести 4-ковариантный тензор энергии-импульса и сформулировать с его помощью законы сохранения, соответствующие независимым сдвигами всех четырех пространственно-временных координат [7]. Следуя [7], определим компоненты канонического тензора энергии-импульса термоупругого поля $T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$ ($\lambda,\ \mu = 1,2,3,4$) в континнуме с микроструктурой. Всего имеется следующие четыре группы соотношений:

$$\begin{aligned} T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathcal{L}\delta^\mu_\lambda + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}^l) + \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2\cdots}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2\cdots}) - j^\mu_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda\vartheta);&\\ (\lambda,\ \mu = 1,2,3)& \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\cdot}_{\cdot 4} = S^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}\underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^l + \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2\cdots}\underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2\cdots} - j^\mu_{\mathrm{R}}\dot{\vartheta};&\\ (\lambda = 4;\ \mu = 1,2,3)& \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} T^{4\cdot}_{\cdot\lambda} = -(\partial_\lambda x^l)P_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}^l)\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2\cdots})\overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2\cdots} - s(\partial_\lambda\vartheta);&\\ (\lambda = 1,2,3;\ \mu = 4)& \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} T^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathcal{L} - \dot{x}^l P_l - \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^l \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l - \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2\cdots}\overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2\cdots} - s\dot{\vartheta}.&\\ (\lambda = 4;\ \mu = 4)& \end{aligned} \tag{47}$$

Приведенные выше компоненты тензора энергии-импульса термоупругого поля позволяют быстро найти полный гамильтониан поля $\mathcal{H}$, вектор псевдоимпульса поля $\mathcal{P}_\lambda$, вектор Умова – Пойнтинга Γ^μ и тензор напряжений Эшелби $P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$.

Так, компонента (47) тензора энергии-импульса представляет собой взятую с отрицательным знаком плотность гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \dot{x}^l P_l + \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}^l \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l + \dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}^{j_1 j_2 \cdots} \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \cdots} + \dot{\vartheta} s - \mathcal{L}. \tag{48}$$

Компоненты (46) определяют ковариантный вектор псевдоимпульса поля согласно формуле:

$$\mathcal{P}_\lambda = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}^l) \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}) \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \cdots} - s(\partial_\lambda \vartheta). \qquad (\lambda = 1, 2, 3) \tag{49}$$

Из компонент (45) формируется контравариантный вектор Умова – Пойнтинга:

$$\Gamma^\mu = S^{\mu\cdot}_{\cdot l} \dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l} \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}^l + \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}{}^{\mu \cdot \cdot \cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots} \dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}^{j_1 j_2 \cdots} - j^\mu_{\mathrm{R}} \dot{\vartheta}. \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{50}$$

Компоненты (44) тензора энергии-импульса, взятые с противоположным знаком, дают возможность вычислить тензор напряжений Эшелби:

$$-P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathcal{L}\delta^\mu_\lambda + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}^l) + \overset{\mathfrak{c}}{\mathcal{M}}{}^{\mu \cdot \cdot \cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}) - j^\mu_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda \vartheta). \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \tag{51}$$

4-ковариантный закон сохранения, соответствующий вариационным симметриям действия в форме трансляций пространственно-временных координат

$$\partial_\mu T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = 0 \qquad (\lambda,\ \mu = 1, 2, 3, 4), \tag{52}$$

естественным образом распадается на два симметричных канонических уравнения баланса энергии и псевдоимпульса термоупругого поля:

$$-\dot{\mathcal{H}} + \partial_\mu \Gamma^\mu = 0, \tag{53}$$

$$-\dot{\mathcal{P}}_\lambda + \partial_\mu P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = 0. \tag{54}$$

Теоретико-полевой подход (и лагранжев формализм) применим только к тем полям, в которых сохраняется постоянной полная энергия. Он не отражает того обстоятельства, что в реальном эволюционирующем поле полная энергия убывает, трансформруясь в другие виды энергии, например, в тепловую энергию, т. е. происходит рассеяние энергии, сопровождающееся возрастанием энтропии. Однако не стоит и сужать возможности такого подхода. Возможность освобождения (стока) энергии может быть учтена не столько в уравнениях поля, сколько сингулярностями поля.

Уравнения поля при наличии связей между микроструктурными переменными. Как уже упоминалось, с формальной точки зрения принцип наименьшего действия принадлежит к классу простейших основных задач вариационного исчисления о поиске безусловного экстремума интегрального функционала. Однако по существу это не в полной мере соответствует действительности, поскольку в аналитической механике и термомеханике символ вариации δ согласно исторически сложившейся традиции обозначает *виртуальную вариацию*, т. е. не произвольное сколь угодно малое изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния механической или термомеханической системы. Виртуальные вариации определяющих состояние континуума переменных являются произвольными, только если они независимы друг от друга. В противном случае принцип наименьшего действия следует отнести к классу так называемых *связанных* задач вариационного исчисления (см., например, [4]). Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа. Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления. Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств.

Связанные задачи вариационного исчисления весьма часто встречаются в механике. Их решение чаще всего опирается на правило множителей Лагранжа (см., например, [4], [5]).

Мы будем рассматривать только двусторонние связи, которые могут быть заданы либо конечными уравнениями (голономные связи), либо уравнениями, которые содержат явные вхождения первых производных от полевых переменных (дифференциальные, неголономные связи). Ограничимся пока только связями между экстра-полевыми d-переменными и, возможно, эйлеровыми координатами x^j.

В наиболее общей форме голономные связи между микроструктурными d-переменными $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ ($\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots$; $j_1, j_2, \cdots = 1, 2, 3$) и переменными x^j задаются конечными уравнениями

$$\underset{\mathfrak{h}}{\mathcal{F}}(x^j, \underset{1}{d}^j, \underset{2}{d}^j, \underset{3}{d}^j, \underset{1}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \underset{2}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \ldots) = 0. \tag{55}$$

Число таких уравнений должно быть меньше, чем число независимых контравариантных полевых d-переменных и эйлеровых координат x^j

$$x^j, \qquad \underset{\mathfrak{a}}{d}^j \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \qquad \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots} \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots;\ j_1, j_2, \cdots = 1, 2, 3).$$

Далее рассмотрим вывод дифференциальных уравнений поля в том случае, когда d-векторы подчинены конечным (голономным) ограничениям

$$\underset{\mathfrak{h}}{\mathcal{F}}(x^j, \underset{1}{d}^j, \underset{2}{d}^j, \underset{3}{d}^j) = 0. \tag{56}$$

Воспользуемся правилом множителей Лагранжа. С этой целью введем множители Лагранжа $\overset{\mathfrak{h}}{\lambda}$ и новый лагранжиан $\mathcal{L}^\star$ согласно

$$\mathcal{L}^\star = \mathcal{L} - \overset{\mathfrak{h}}{\lambda} \underset{\mathfrak{h}}{\mathcal{F}}. \tag{57}$$

Заметим, что множители Лагранжа $\overset{\mathfrak{h}}{\lambda}$ представляют собой функции только пространственно-временных координат X^α.

В уравнениях поля (42) лагранжиан $\mathcal{L}$ подлежит замене на новый лагранжиан $\mathcal{L}^\star$. Выполняя замену, в результате приходим к уравнениям поля

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \overset{\mathfrak{h}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^j} \underset{\mathfrak{h}}{\mathcal{F}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3),\\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = \overset{\mathfrak{h}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} \underset{\mathfrak{h}}{\mathcal{F}} \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3),\\
&\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{58}$$

Дифференциальные связи между микроструктурными d-переменными $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1,2,3$; $j = 1,2,3$), $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1j_2\cdots}$ ($\mathfrak{c} = 1,2,3,\ldots$; $j_1,j_2,\dots = 1,2,3$) и переменными x^j задаются неинтегрируемыми уравнениями следующего вида:

$$\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}}(x^j, \underset{1}{d}^j, \underset{2}{d}^j, \underset{3}{d}^j, \underset{1}{d}^{j_1j_2\cdots}, \underset{2}{d}^{j_1j_2\cdots}, \ldots, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{1}{d}^j, \partial_\beta \underset{2}{d}^j, \partial_\gamma \underset{3}{d}^j, \partial_\alpha \underset{1}{d}^{j_1j_2\cdots}, \partial_\beta \underset{2}{d}^{j_1j_2\cdots}, \ldots) = 0. \tag{59}$$

Дифференциальные связи также могут быть учтены в уравнениях поля с помощью правила множителей. Вводя множители Лагранжа $\overset{\mathfrak{n}}{\lambda}$ и новый лагранжиан $\mathcal{L}^\star$ согласно

$$\mathcal{L}^{\star\star} = \mathcal{L} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}}, \tag{60}$$

заменим в уравнениях поля (42) лагранжиан $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^\star$; в итоге после ряда преобразований можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -(\partial_4\overset{\mathfrak{n}}{\lambda})\frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\partial_4\frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} - \\
&- (\partial_\alpha\overset{\mathfrak{n}}{\lambda})\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha x^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\partial_\alpha\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha x^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^j} + \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^j}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} \quad (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j - \partial_4\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = -(\partial_4\overset{\mathfrak{n}}{\lambda})\frac{\partial}{\partial(\partial_4\underset{\mathfrak{a}}{d}^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\partial_4\frac{\partial}{\partial(\partial_4\underset{\mathfrak{a}}{d}^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} - \\
&- (\partial_\alpha\overset{\mathfrak{n}}{\lambda})\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\underset{\mathfrak{a}}{d}^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\partial_\alpha\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\underset{\mathfrak{a}}{d}^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} + \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j}\underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{F}} \quad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
&\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3).
\end{aligned} \tag{61}$$

Полученные уравнения принципиально отличаются от (58), поскольку множители Лагранжа входят в них также в форме частных производных первого порядка.

Оставшуюся часть этого раздела работы посвятим уравнениям поля для жесткого репера d-векторов. В случае простейшей голономной связи, когда трансформация репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1,2,3$) сводится только к его «жестким» поворотам в пространстве, имеем следующие конечные ограничения:

$$g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}^i\underset{\mathfrak{b}}{d}^j = \underset{\mathfrak{ab}}{\delta} \qquad (\mathfrak{a},\ \mathfrak{b} = 1,2,3), \tag{62}$$

где g_{ij} — компоненты эйлеровой пространственной метрики, $\underset{\mathfrak{ab}}{\delta}$ — символ Кронекера.

В том важном и сравнительно простом случае, когда параметрами микрострукутры являются только d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1,2,3$; $j = 1,2,3$), а кинематические связи задаются уравнениями (62), система дифференциальных уравнений поля (42) подлежит некоторой модификации, поскольку согласно правилу множителей лагранжиан $\mathcal{L}$ подлежит замене на новый лагранжиан $\mathcal{L}^\star$:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}^\star = \mathcal{L} - \frac{1}{2}\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}\left(g_{kl}\underset{\mathfrak{c}}{d}^k\underset{\mathfrak{b}}{d}^l - \underset{\mathfrak{cb}}{\delta}\right) \qquad (\mathfrak{c},\ \mathfrak{b} = 1,2,3).$$

Здесь $\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}$ — множители Лагранжа, которые представляют собой функции пространственно-временных координат. Их можно считать симметричными при перестановке индексов:

$$\overset{\mathfrak{bc}}{\lambda} = \overset{\mathfrak{cb}}{\lambda} \qquad (\mathfrak{c},\, \mathfrak{b} = 1,2,3).$$

Вычислим сначала требуемые для модификации уравнений поля (42) полевые производные.

Прежде всего нас интересует производная лагранжиана $\mathcal{L}^\star$ по полевой переменной x^j:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^\star}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\underset{\mathfrak{c}}{d^k}\underset{\mathfrak{b}}{d^l}.$$

Полученное выражение преобразуем, принимая во внимание (Γ^s_{kj} — символы Кристоффеля второго рода пространственной метрики)

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \Gamma^s_{kj} g_{sl} + \Gamma^s_{lj} g_{ks},$$

а также симметрию множителей $\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}$. В итоге приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^\star}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}\Gamma^s_{kj}\underset{\mathfrak{c}}{d^k}\underset{\mathfrak{b}}{d_s}.$$

Интерес представляет также производная лагранжиана $\mathcal{L}^\star$ по экстраполевой переменной $\underset{\mathfrak{a}}{d^j}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^\star}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d^j}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d^j}} - \frac{1}{2}\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}(g_{kl}\delta^k_j \underset{\mathfrak{b}}{d^l}\underset{\mathfrak{ac}}{\delta} + g_{kl}\delta^l_j \underset{\mathfrak{c}}{d^k}\underset{\mathfrak{ab}}{\delta}).$$

Привлекая затем соглашение о симметрии множителей $\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}$, получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}^\star}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d^j}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d^j}} - \frac{1}{2}\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}(g_{jl}\underset{\mathfrak{b}}{d^l}\underset{\mathfrak{ac}}{\delta} + g_{jk}\underset{\mathfrak{c}}{d^k}\underset{\mathfrak{ab}}{\delta})$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}^\star}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d^j}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d^j}} - \overset{\mathfrak{ab}}{\lambda}\underset{\mathfrak{b}}{d_j}.$$

В результате вместо (42) дифференциальные уравнения поля получаются в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{kj}\overset{\mathfrak{bc}}{\lambda}\underset{\mathfrak{b}}{d_s}\underset{\mathfrak{c}}{d^k} \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j,s,k = 1,2,3),\\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}{}^\star_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
&\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3),
\end{aligned} \tag{63}$$

где

$$\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}{}^\star_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d^j}} - \overset{\mathfrak{ab}}{\lambda}\underset{\mathfrak{b}}{d_j}.$$

Сворачивая обе левую и правую части последнего равенства с вектором $\underset{\mathfrak{a}}{d^j}$, на основании уравнений связей

$$g_{kl}\underset{\mathfrak{c}}{d^k}\underset{\mathfrak{b}}{d^l} - \underset{\mathfrak{cb}}{\delta} = 0$$

находим

$$(\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}{}^{\star}_j - \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j)\underset{\mathfrak{a}}{d}^j = -\overset{\mathfrak{ab}}{\lambda}\underset{\mathfrak{ab}}{\delta}.$$

Ротационная инвариантность действия и плотности действия относительно поворотов эйлеровой координатной системы. Объективные ротационно-инвариантные формы лагранжиана. «Естественная» плотность действия в форме (37) пока еще не позволяет вести речь о ее объективности в том смысле, что в разных эйлеровых координатных системах эта форма будет сохраняться. Ясно, что вывод объективных форм лагранжиана представляет собой первый и весьма важный шаг на пути построения объективных форм определяющих уравнений, первоначально задаваемых уравнениями (41). Ограничимся случаем, когда параметрами микроструктуры являются только d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$). При этом «естественная» плотность действия микрополярного термоупругого континуума второго типа может быть представлена в виде следующей функции с явно перечисленными вхождениями определяющих переменных:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta). \tag{64}$$

В теориях континуумов лагранжиан имеет несколько более специальную форму, чем (64), разности плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{ij}\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}}\underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^i\underset{\mathfrak{b}}{\dot{d}}^j - \\ -\psi(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta).\end{aligned} \tag{65}$$

Для изображения состояний и процессов в механике континуума используется трехмерное плоское пространство-время и независимое время. Поскольку выбор эйлеровых координат произволен и не должен никак сказываться на физических следствиях дифференциальных уравнений поля, то действие и лагранжиан обязаны обладать определенными свойствами инвариантности по отношению к выбору эйлеровой координатной системы и начала отсчета времени, т. е. по отношению к так называемым «движениям» эйлерова пространства. Существуют два принципиально различных вида «движений»: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в эйлеровом пространстве. Спинорные «движения» определяются заданием тензорных функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три (тензоры поворота).

Вводя в пространстве прямоугольные декартовы координаты x^j, заметим, что одно из таких свойств инвариантности проявляется в форме трансляционной инвариантности интегрального функционала действия относительно произвольных сдвигов переменных x^j и времени t. Другое, как хорошо известно, — ротационной инвариантности относительно произвольных поворотов эйлеровой координатной системы x^j.

Инвариантность действия относительно поворотов эйлерова координатного репера является проявлением изотропии эйлерова координатного пространства, т.е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Инвариантность действия относительно преобразований лагранжевых переменных связана с симметрией физических свойств континуума. Так, трансляционная инвариантность действия относительно произвольных сдвигов координат X^α означает, что континуум однороден. Ротационная инвариантность относительно произвольных поворотов лагранжевой координатной системы указывает на изотропность континуума.

Таким образом, действие, в частности, должно быть инвариантно относительно преобразований сдвигов и поворотов координатной системы наблюдателя (принцип объективности) и сдвигов времени:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}^i = R^i_j x^j + C^i,\\
&\underset{\mathfrak{a}}{\widetilde{d}}^i = R^i_j \underset{\mathfrak{a}}{d}^j,\\
&\widetilde{t} = t + C.
\end{aligned} \tag{66}
$$

В приведенных выше формулах преобразования C^i, C есть произвольные постоянные; R^i_j — произвольная постоянная собственно ортогональная матрица.

Действие и плотность действия $\mathcal{L}$ инвариантны относительно преобразований (66) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = 0,\\
&\partial_4^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0,\\
&\mathcal{K}_{[ij]} = 0,
\end{aligned} \tag{67}
$$

где тензор $\mathcal{K}_{ij}$ определяется согласно

$$
\mathcal{K}_{ij} = x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \underset{\mathfrak{a}}{d}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} + \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} + \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j} + (\partial_\alpha x_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} + (\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j)} \tag{68}
$$

и в (67) по индесам, заключенным в квадратные скобки, выполняется антисимметризация.

Заметим, что в силу (67) и в обозначениях (41) тензор $\mathcal{K}_{ij}$ сводится к

$$
\mathcal{K}_{ij} = \underset{\mathfrak{a}}{d}_i \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j + \dot{x}_i P_j + \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}_i \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j - (\partial_\alpha x_i) S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - (\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}_i) \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j}. \tag{69}
$$

Ясно, что в том случае, когда плотность действия не зависит явно от директоров $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$, их производных по времени $\underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j$ и референциальных градиентов $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j$, последнее в группе условий (67) позволяет сразу же установить *симметрию* тензора напряжений Коши

$$
T^{l\cdot}_{\cdot k} = -J^{-1} (\partial_\beta x^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta x^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3). \tag{70}
$$

Инвариантность действия относительно трансляций эйлеровых координат, известная как принцип галилеевой инвариантности действия (принцип относительности Галилея), мы *дополним* требованием инвариантности действия относительно сдвигов температурного смещения (C' — произвольная постоянная):

$$
\widetilde{\vartheta} = \vartheta + C', \tag{71}
$$

что обеспечивается выполнением следующего условия:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0. \tag{72}
$$

Поскольку кинетическая составляющая плотности действия инвариантна относительно преобразований (66), (71), то плотность свободной энергии Гельмгольца (α, β=1,2,3)

$$\psi = \psi(X^\beta, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta),$$

в свою очередь, обязана выдерживать преобразования вида (66), (71), т. е.

$$\psi(X^\beta, R^i_j \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \dot{\vartheta}, R^i_j \partial_\alpha x^j, R^i_j \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta) = \psi(X^\beta, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta). \tag{73}$$

Последнее обстоятельство означает, что свободная энергия Гельмгольца является некоторой функцией от переменных

$$X^\beta, \ \ \dot{\vartheta}, \ \ \partial_\alpha \vartheta, \tag{74}$$

в запись которых не входят эйлеровы индексы, а также следующих независимых инвариантных относительно вращений эйлеровой координатной системы аргументов:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), \\ \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_\alpha &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \\ \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j). \end{aligned} \tag{75}$$

Каждая из величин, перечисленных в (75), действительно инвариантна относительно произвольных вращений эйлеровой координатной системы, поскольку по всем эйлеровым индексам производится сворачивание с помощью эйлеровых метрических коэффициентов g_{ij}.

Заметим, что в списке инвариантных аргументов (75) отсутствуют тензоры

$$\begin{aligned} \underset{\mathfrak{ab}}{\mathcal{R}} &= g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}^i \underset{\mathfrak{b}}{d}^j, \\ \underset{\mathfrak{ab}}{\mathcal{R}}_\alpha &= g_{ij}(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)\underset{\mathfrak{b}}{d}^j, \\ \underset{\mathfrak{ab}}{\mathcal{T}}_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{b}}{d}^j). \end{aligned} \tag{76}$$

Рациональной основой для этого выступает требование того, чтобы экстрадеформация континуума была невозможна, если отсутствует деформация ($g_{\alpha\beta} = {}^{\backprime}g_{\alpha\beta}$).

Полноту системы ротационно-инвариантных аргументов (75) с учетом данного выше замечания (т. е. с исключенными внутренними произведениями (76)) можно доказать, опираясь на известные результаты теории алгебраических инвариантов[2] системы (эйлеровых векторов)

$$\partial_\alpha x^i, \ \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \ \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j. \tag{77}$$

Во-первых, полная система инвариантов векторов (77) включает их попарные внутренние произведения, что приводит к эйлеровым инвариантам (75), (76).

Во-вторых, указанная система инвариантов содержит также всевозможные 3×3-определители, в столбцах которых расположены эйлеровы компоненты всевозможных троек векторов системы (77). A priori ясно, что интересующие нас определители

[2]См., например: Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.

должны содержать по меньшей мере один столбец из эйлеровыых компонент градиента деформации $\partial_\alpha x^i$. Такие определители, размещая эйлеровы компоненты градиента деформации $\partial_\alpha x^j$ в первом столбце, можно разбить на следующие шесть групп:

$$[(\partial_\alpha x^j)\,\underset{\mathfrak{a}}{d^j}\,\underset{\mathfrak{b}}{d^j}] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \underset{\mathfrak{a}}{d^1} & \underset{\mathfrak{b}}{d^1} \\ \partial_\alpha x^2 & \underset{\mathfrak{a}}{d^2} & \underset{\mathfrak{b}}{d^2} \\ \partial_\alpha x^3 & \underset{\mathfrak{a}}{d^3} & \underset{\mathfrak{b}}{d^3} \end{vmatrix} \qquad (\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}), \tag{I}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\,(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^j})\,\underset{\mathfrak{b}}{d^j}] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^1} & \underset{\mathfrak{b}}{d^1} \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^2} & \underset{\mathfrak{b}}{d^2} \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^3} & \underset{\mathfrak{b}}{d^3} \end{vmatrix}, \tag{II}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\,(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^j})\,(\partial_\gamma \underset{\mathfrak{b}}{d^j})] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^1} & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{b}}{d^1} \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^2} & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{b}}{d^2} \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^3} & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{b}}{d^3} \end{vmatrix} \quad (\beta \neq \gamma \text{ и } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \text{ одновременно}), \tag{III}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\,(\partial_\beta x^j)\,\underset{\mathfrak{a}}{d^j}] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \underset{\mathfrak{a}}{d^1} \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \underset{\mathfrak{a}}{d^2} \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \underset{\mathfrak{a}}{d^3} \end{vmatrix} \qquad (\beta \neq \alpha), \tag{IV}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\,(\partial_\beta x^j)\,(\partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d^j})] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d^1} \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d^2} \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d^3} \end{vmatrix} \qquad (\beta \neq \alpha), \tag{V}$$

$$[(\partial_\alpha x^j)\,(\partial_\beta x^j)\,(\partial_\gamma x^j)] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \partial_\gamma x^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \partial_\gamma x^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \partial_\gamma x^3 \end{vmatrix}. \tag{VI}$$

Вычисление всех шести определителей можно осуществить с помощью правила Грама – Шмидта, т. е. через определители, элементы которых представляют собой всевозможные внутренние произведения эйлеровых векторов, расположенных в столбцах исходных определителей, и метрические коэффициенты ${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}$. Таким образом, каждый из приведенных выше определителей вычисляется через внутренние произведения в соответствии с данной ниже схемой:

(I) $\quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{e}}{d^j},\ g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d^i}\underset{\mathfrak{b}}{d^j};$

(II) $\quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^j}),\ g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{b}}{d^j},\ g_{ij}(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^i})\underset{\mathfrak{b}}{d^j};$

(III) $\quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\omega \underset{\mathfrak{e}}{d^j}),\ g_{ij}(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d^i})(\partial_\gamma \underset{\mathfrak{b}}{d^j});$

(IV) $\quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j),\ g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{a}}{d^j};$

(V) $\quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j),\ g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d^j});$

(VI) $$g_{\alpha\beta}.$$

Хорошо видно, что определители (I)–(VI) вычисляются только через тензорные и векторные величины, перечисленные в (75) и (76), что и доказывает полноту ротационно-инвариантных аргументов (75) с учетом исключения аргументов (76).

Заметим также, что кинематическое ограничение

$$\underset{\mathfrak{ab}}{\mathcal{R}} = \underset{\mathfrak{ab}}{\delta}$$

устанавливает, что d-векторы составляют «жесткий» репер, поэтому экстра-деформация континуума сводится лишь к вращениям составляющих его элементов.

В итоге, считая, что континуум однороден, т. е.

$$\partial_\beta^{\mathrm{expl}}\mathcal{L} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, 3), \tag{78}$$

и, следовательно, все лагранжевы переменные X^β являются циклическими (игнорируемыми), получаем следующую, удовлетворяющую принципу объективности, ротационно-инвариантную форму свободной энергии Гельмгольца: ($\mathfrak{a}$=1,2,3; α, β=1,2,3)

$$\psi = \psi(g_{\alpha\beta}, \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_\alpha, \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\alpha\beta}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha\vartheta). \tag{79}$$

Мы неявно подразумеваем, что приведенная форма (79) должна зависеть также от отсчетной метрики ${}^\backprime g_{\alpha\beta}$ и референциального положения d-векторов ${}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ ($\mathfrak{a}$=1,2,3).

В форме (79) ротационно-инвариантный аргумент $g_{\alpha\beta}$ без ограничения общности может быть заменен на

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - {}^\backprime g_{\alpha\beta}). \tag{80}$$

Компоненты $\epsilon_{\alpha\beta}$ преобразуются по тензорному закону при заменах лагранжевых координат. Тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ называется тензором деформации Грина. Использование тензора деформации Грина в качестве ротационно-инвариантного аргумента лагранжиана исключительно удобно, т. к. он в силу своего определения учитывает только ту часть деформации континуума (24), которая наблюдается относительно некоторой фиксированной референциальной конфигурации.

По аналогичным соображениям вместо векторной меры экстра-деформации $\underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_\alpha$ следует использовать относительный вектор экстра-деформации

$$-\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\alpha = \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_\alpha - g_{\alpha\beta}{}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^\beta. \tag{81}$$

Здесь векторы ${}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^\beta$ указывают референциальное состояние системы d-векторов. Отметим следующее равенство:

$${}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i = \frac{\partial {}^\backprime x^i}{\partial X^\alpha}{}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^\alpha.$$

Вектор $\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\alpha$ оказывается нулевым, только если каждый из d-векторов поворачивается и удлиняется так, как это в точности предписывается деформацией континуума (24). Если последнее обстоятельство действительно имеет место, то ${}^\backprime d$-векторы и d-векторы будут связаны зависимостями

$$\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i - (\partial_\alpha x^i){}^\backprime\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^\alpha = 0;$$

умножая обе части полученного равенства на компоненты дисторсии $\partial_\beta x^j$ и сворачивая с g_{ij}, находим

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_\beta - g_{\beta\alpha}{}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^\alpha = 0,$$

т. е. относительный вектор экстра-деформации становится равным нулю:

$$\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta = 0.$$

Таким образом, окончательно ротационно-инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде

$$\psi = \psi(\epsilon_{\alpha\beta}, \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\alpha, \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\alpha\beta}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha\vartheta) \quad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha,\beta = 1,2,3). \tag{82}$$

Полученная форма указывает на явную зависимость свободной энергии Гельмгольца от одного скалярного аргумента $\dot{\vartheta}$; четырех отсчетных векторных аргументов $\partial_\alpha\vartheta$, $\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\alpha$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3; \alpha = 1,2,3)$; и четырех отсчетных тензорных аргументов $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\alpha\beta}$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha,\beta = 1,2,3)$, три из которых являются несимметричными тензорами второго ранга.

В принципе, существует еще только один способ построения системы независимых ротационно-инвариантных аргументов, отличный от изложенного выше. Он связан с полярным разложением градиента деформации $(\partial_\alpha x^i)$ $(i,\ \alpha = 1,2,3)$ и градиентов микрополярных директоров $(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i)$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3; i,\ \alpha = 1,2,3)$.

Известно, что градиент деформации всегда может быть представлен как произведение симметричного положительно определенного тензора $|x|_{\alpha\beta}$ $(|x|_{\alpha\beta} > 0)$ и ортогонального тензора $\lambda^{i\beta}$:

$$\partial_\alpha x^i = |x|_{\alpha\beta}\lambda^{i\beta}. \tag{83}$$

Тензор $|x|_{\alpha\beta}$ называется модулем градиента деформации, тензор $\lambda^{i\beta}$ — тензором поворота. Симметрия модуля градиента деформации и ортогональность тензора $\lambda^{i\beta}$ выражаются следующими соотношениями:

$$|x|_{\alpha\beta} = |x|_{\beta\alpha}; \tag{84}$$

$$g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = {}^{\backprime}g^{\beta\gamma}, \quad {}^{\backprime}g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = g^{ij}. \tag{85}$$

То же самое относится и к градиентам микрополярных директоров $(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i)$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3;\ i,\ \alpha = 1,2,3)$. Полярные разложения градиентов директоров $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3)$ имеют вид

$$\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i = |\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{i\beta}, \tag{86}$$

где тензоры $|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}$ симметричны и положительны, а тензоры $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{i\beta}$ ортогональны.

Тензоры $|x|_{\alpha\beta}$ и $|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}$, очевидно, ротационно-инвариантны. С тем, чтобы получить полную систему независимых ротационно-инвариантных аргументов, к ним следует добавить следующие ротационно-инвариантные внутренние произведения (обязательно содержащие множитель $\lambda^{i\beta}$):

$$g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i\lambda^{j\beta}, \qquad g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = {}^{\backprime}g^{\beta\gamma}, \qquad g_{ij}\lambda^{i\beta}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{j\gamma}.$$

Таким образом, еще одна ротационно-инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде

$$\psi = \psi(|x|_{\alpha\beta}, |\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}, {}^{\backprime}g_{\alpha\beta}, g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i\lambda^{j\alpha}, g_{ij}\lambda^{i\alpha}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{j\beta}) \quad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha,\beta = 1,2,3). \tag{87}$$

Наконец, установим связь между двумя системами ротационно-инвариантных аргументов. Она становится понятной, если принять во внимание следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta} = g_{ij}|x|_{\alpha\sigma}|x|_{\beta\kappa}\lambda^{i\sigma}\lambda^{j\kappa} = {}^{\backprime}g^{\sigma\kappa}|x|_{\alpha\sigma}|x|_{\beta\kappa},\\
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_{\alpha} = g_{ij}|x|_{\alpha\beta}\lambda^{i\beta}\underset{\mathfrak{a}}{d}^{j} = |x|_{\alpha\beta}\underset{\mathfrak{a}}{d}_{j}\lambda^{j\beta},\\
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\alpha\beta} = g_{ij}|x|_{\alpha\sigma}\lambda^{i\sigma}|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\beta\gamma}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{j\gamma} = |x|_{\alpha\sigma}|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\beta\gamma}g_{ij}\lambda^{i\sigma}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}^{j\gamma}.
\end{aligned}
\tag{88}
$$

Отметим еще одно интересное соотношение. Вычисляя длины векторов $\underset{\mathfrak{a}}{d}_{j}\lambda^{j\beta}$ в отсчетной метрике ${}^{\backprime}g_{\beta\gamma}$, имеем:

$$
{}^{\backprime}g_{\beta\gamma}\underset{\mathfrak{a}}{d}_{i}\lambda^{i\beta}\underset{\mathfrak{a}}{d}_{j}\lambda^{j\gamma} = g^{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}_{i}\underset{\mathfrak{a}}{d}_{j},
$$

где величина справа есть длина d-директора с указателем $\mathfrak{a}$.

Определяющие уравнения в терминах объективного термодинамического базиса. Как показано в предыдущем разделе работы, объективный термодинамический базис для микрополярного термоупругого континуума, распространение тепла в котором не сопровождается производством энтропии, состоит из следующего набора функционально-независимых переменных

$$
\epsilon_{\alpha\beta},\ \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_{\alpha},\ \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\alpha\beta},\ \dot{\vartheta},\ \partial_{\alpha}\vartheta \qquad (\mathfrak{a}=1,2,3;\quad \alpha,\beta=1,2,3).
\tag{89}
$$

Определяющие уравнения микрополярного термоупругого континуума (41) были получены в термодинамическом базисе, который не удовлетворяет принципу ротационной инвариантности. Поэтому естественно поставить задачу о преобразовании определяющих уравнений (41) к объективным формам, диктуемым ротационно-инвариантными аргументами лагранжиана. Далее рассмотрим вывод объективных форм определяющих уравнений, исходя из ротационно-инвариантной формы свободной энергии (82). На основании

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})} = g_{jk}(\partial_{\beta}x^{k}\delta_{\sigma}^{\alpha} + \partial_{\sigma}x^{k}\delta_{\beta}^{\alpha}),\\
&\frac{\partial \epsilon_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})} = \frac{1}{2}g_{jk}(\partial_{\mu}x^{k}\delta_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\nu}x^{k}\delta_{\mu}^{\alpha}),\\
&\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}\underset{\mathfrak{e}}{d}^{j})} = g_{jk}\partial_{\mu}x^{k}\delta_{\nu}^{\alpha}\overset{\mathfrak{e}}{\underset{\mathfrak{a}}{\delta}},\\
&\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_{\beta}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})} = g_{jk}\delta_{\beta}^{\alpha}\underset{\mathfrak{a}}{d}^{k},\\
&\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})} = g_{jk}\delta_{\mu}^{\alpha}\partial_{\nu}\underset{\mathfrak{a}}{d}^{k},\\
&\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_{\beta}}{\partial \underset{\mathfrak{e}}{d}^{j}} = g_{ij}\partial_{\beta}x^{i}\overset{\mathfrak{e}}{\underset{\mathfrak{a}}{\delta}}
\end{aligned}
$$

и

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\epsilon_{\mu\nu}}\frac{\partial\epsilon_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_{\beta}}\frac{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_{\beta}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_{\beta}}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})}{}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}^{\sigma} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}}\frac{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_{\alpha}x^{j})},
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{e}}{d}^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}} \frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{e}}{d}^j)},
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{e}}{d}^j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta} \frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{R}}_\beta}{\partial \underset{\mathfrak{e}}{d}^j}
$$

можно получить следующие объективные формы определяющих уравнений (41):

$$
\begin{gathered}
-S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_{\mu\alpha}} g_{jk} \partial_\mu x^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta} g_{jk} \underset{\mathfrak{a}}{d}^k \delta^\alpha_\beta + \\
+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta} g_{jk} (\partial_\beta x^{k\backprime} \underset{\mathfrak{a}}{d}^\alpha + \partial_\sigma x^k \delta^{\alpha\backprime}_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^\sigma) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}} g_{jk} \partial_\nu \underset{\mathfrak{a}}{d}^k,
\end{gathered}
\tag{90}
$$

$$
-\overset{\mathfrak{e}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{e}}{d}^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{e}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}} g_{jk} \partial_\mu x^k \delta^\alpha_\nu, \tag{91}
$$

$$
\overset{\mathfrak{e}}{\mathcal{A}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{e}}{\gamma}_\beta} g_{jk} \partial_\beta x^k. \tag{92}
$$

Определяющее уравнение (90) после очевидных преобразований представляется в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
-S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_{\mu\alpha}} g_{jk} \partial_\mu x^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\alpha} g_{jk} (\partial_\sigma x^{k\backprime} \underset{\mathfrak{a}}{d}^\sigma - \underset{\mathfrak{a}}{d}^k) + \\
+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta} g_{jk} \partial_\beta x^{k\backprime} \underset{\mathfrak{a}}{d}^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathcal{T}}_{\mu\nu}} g_{jk} \partial_\nu \underset{\mathfrak{a}}{d}^k.
\end{gathered}
\tag{93}
$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Радаев Ю. Н. Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела / Международная конференция «Современные проблемы механики», посв. 100-летию Л. А. Галина, 20-21 сентября 2012 г., г. Москва. Тезисы докл. М., 2012. С. 75–76.

[2] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболические теории и задачи механики континуума/ Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения», 25 августа – 1 сентября, 2014 г., г. Самара: Материалы межд. конференции (под ред. чл.-корр. РАН И.В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. В.П. Радченко). Самара: СамГТУ, 2014. С. 289–290.

[3] Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 5. P. 85–112.

[4] Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.

[5] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.

[6] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.

[7] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

[8] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[9] Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.

[10] Ильюшин А. А. Механика сплошных сред. М.: Изд-во Московского университета, 1978. 287 с.

[11] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.

[12] Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 pp.

[13] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Вывод тензоров энергии-импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2011. № 5. С. 58–77.

[14] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4. С. 71–79.

[15] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d-тензоры термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 1. С. 60–68.

[16] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного континуума второго типа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 4. Ч. 1. С. 96–102.

[17] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Об одной форме первой вариации интегрального функционала действия по растущей области // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 2. С. 199–209.

[18] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 1(34). С. 66–85.

[19] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболическая термомеханика континуума // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов (Казань, 20–24 августа 2015 г.) Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 3173–3174.

[20] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Объективные ротационно-инвариантные формы термоупругих лагранжианов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2015. Т. 19, № 2. С. 325–340.

V. A. Kovalev[1], *Y. N. Radayev*[2]

CANONICAL FIELD THEORY OF THERMOELASTIC CONTINUUM WITH THREE POLAR DIRECTORS

[1]*Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow, Russia*

[2]*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. A canonical non-linear mathematical model of type-II (GN II) thermoelastic (TE) continuum with fine microstructure is discussed. The model is presented in terms of the canonical 4-covariant field theoretical formalism. The fine microstructure of the thermoelastic continuum is determined by *d*-vectors and *d*-tensors thus playing role of extra field variables. By virtue of proposed action density for type-II TE continuum with fine microstructure the least action principle is formulated. Virtual microstructural inertia is added to the action density. Corresponding 4-covariant field equations of type-II thermoelasticity are obtained. Constitutive equations of type-II microstructural thermoelasticity are discussed. Variational symmetries of the thermoelastic action are used to formulate covariant conservation laws. Following the usual procedure for type-II micropolar TE Lagrangians functionally independent rotationally invariant arguments are obtained. A formal proof of the completness of the system of rotationally invariant arguments is given. An alternative approach of constructuing a complete system of independent rotationally invariant arguments is discussed. Objective forms of the Lagrangians satisfying the frame indifference principle are given. Those are derived by using extra strain vectors and tensors.

Keywords: thermoelasticity, microstructure, field, extra field, action, covariance, conservation law, *d*-tensor, 4-current, energy–momentum tensor, constraint, Lagrange multiplier, rotation, frame indifference principle, extrastrain tensor.

REFERENCES

[1] Radaev Ju. N. Giperbolicheskie teorii i zadachi mehaniki deformiruemogo tverdogo tela / Mezhdunarodnaja konferencija «Sovremennye problemy mehaniki», posv. 100-letiju L. A. Galina, 20-21 sentjabrja 2012 g., g. Moskva. Tezisy dokl. M., 2012. S. 75–76. (in Russian).

[2] Radaev Ju. N., Kovalev V. A. Giperbolicheskie teorii i zadachi mehaniki kontinuuma/ Chetvertaja mezhdunarodnaja konferencija «Matematicheskaja fizika i ee prilozhenija», 25 avgusta – 1 sentjabrja, 2014 g., g. Samara: Materialy mezhd. konferencii (pod red. chl.-korr. RAN I.V. Volovicha i d.f.-m.n., prof. V.P. Radchenko). Samara: SamGTU, 2014. S. 289–290. (in Russian).

[3] Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 5. P. 85–112.

[4] Gjunter N. M. Kurs variacionnogo ischislenija. M., L.: Gostehteoretizdat, 1941. 308 s. (in Russian).

Kovalev Vladimir Alexandrovich

`e-mail:` vlad_koval@mail.ru, DSc. (Phys.&Math.), Prof., Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow, Russia.

Radayev Yuri Nikolayevich

`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Leading Researcher, DSc., Prof., Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

[5] Berdichevskij V. L. Variacionnye principy mehaniki sploshnoj sredy. M.: Nauka, 1983. 448 s. (in Russian).

[6] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Jelementy teorii polja: variacionnye simmetrii i geometricheskie invarianty. M.: FIZMATLIT, 2009. 156 s. (in Russian).

[7] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Volnovye zadachi teorii polja i termomehanika. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2010. 328 s. (in Russian).

[8] Ovsjannikov L. V. Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij. M.: Nauka, 1978. 400 s. (in Russian).

[9] Sedov L. I. Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred. M.: Fizmatgiz, 1962. 284 s. (in Russian).

[10] Il'jushin A. A. Mehanika sploshnyh sred. M.: Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1978. 287 s. (in Russian).

[11] Grin A., Adkins Dzh. Bol'shie uprugie deformacii i nelinejnaja mehanika sploshnoj sredy. M.: Mir, 1965. 456 s. (in Russian).

[12] Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.

[13] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Vyvod tenzorov jenergii—impul'sa v teorijah mikropoljarnoj giperbolicheskoj termouprugosti // Izv. RAN. Meh. tverd. tela. 2011. № 5. S. 58–77. (in Russian).

[14] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Tochno sohranjajushhiesja invarianty svjazannogo mikropoljarnogo termouprugogo polja // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. 2012. Vol. 12. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika. Vyp. 4. S. 71–79. (in Russian).

[15] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Polevye uravnenija i d-tenzory termouprugogo kontinuuma s «tonkoj» mikrostrukturoj // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika. 2013. Vol. 13. Vyp. 2. Ch. 1. S. 60–68. (in Russian).

[16] Radaev Ju. N., Kovalev V. A. Rotacionnaja invariantnost' i obektivnye formy lagranzhianov nelinejnogo mikropoljarnogo kontinuuma vtorogo tipa // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika. 2013. Vol. 13. Vyp. 4. Ch. 1. S. 96–102. (in Russian).

[17] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Ob odnoj forme pervoj variacii integral'nogo funkcionala dejstvija po rastushhej oblasti // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika. 2014. Vol. 14. Vyp. 2. S. 199-209. (in Russian).

[18] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. O nelinejnyh tenzorah i vektorah jekstradeformacii v teorii i mehanike kontinuuma // Vestnik Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. №1(34). S. 66–85. (in Russian).

[19] Radaev Ju. N., Kovalev V. A. Giperbolicheskaja termomehanika kontinuuma / XI Vserossijskij sezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoj i prikladnoj mehaniki. Sbornik trudov. (Kazan', 20-24 avgusta 2015 g.) Kazan': Izd-vo Kazanskogo (Privolzhskogo) federal'nogo universiteta, 2015. S. 3173–3174. (in Russian).

[20] Kovalev V. A., Radaev Ju. N. Obektivnye rotacionno-invariantnye formy termouprugih lagranzhianov // Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 2015. Vol. 19, № 2. S. 325–340. (in Russian).