Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 50–59

А. А. Алексеев, Е. Г. Алексеева, В. Н. Ведерников, В. И. Гультяев

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ МОРА И ВВЕДЕНИИ УТОЧНЯЮЩИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ ПЕРЕМНОЖЕНИИ ЭПЮР

Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Аннотация. Приводится критический анализ результатов, получаемых при вычислении интегралов Мора по способу Верещагина с использованием «метода уточненных коэффициентов», предложенного в [1]. Показано, что данный метод является ошибочным и не рекомендуется к использованию в инженерной практике.

Ключевые слова: сопротивление материалов, метод Мора, графоаналитический способ Верещагина, перемножение эпюр, перемещения.

УДК: 539.384.2

Вычисление интегралов в формуле Мора графоаналитическим способом Верещагина является, пожалуй, самым удобным способом определения перемещений точек стержневых систем, состоящих из прямолинейных стержней постоянной жесткости, в пределах силовых участков. Этот способ часто называют способом перемножения эпюр, так как в нем площади одной из эпюр умножаются на ординаты другой под центрами тяжести первой. Та эпюра, с которой берется ордината, в пределах силового участка должна быть линейной и не иметь излома, что выполняется для эпюр от единичных факторов. В большинстве случаев при определении перемещений в балках и плоских рамах учитывают и определяют только перемещения, вызванные изгибающим моментом.

Алексеев Андрей Алексеевич
`e-mail:` alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.
Алексеева Елена Геннадьевна
`e-mail:` super_aeg@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.
Ведерников Владимир Николаевич
`e-mail:` kafsm@yandex.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.
Гультяев Вадим Иванович
`e-mail:` vig0@mail.ru, доктор технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 10.07.2016

Сам метод и рекомендации по его применению приводятся в различных учебниках и справочниках по сопротивлению материалов, например в [2], [3], однако до сих пор появляются работы [1], предлагающие его «уточнение». Перед тем как перейти к анализу этого «уточнения», также хочется заметить, что авторы в [1] метод Мора и способ Верещагина называют «методом сил». Это, мягко говоря, странно, так как метод сил является одним из методов получения дополнительных уравнений для раскрытия статической неопределимости стержневых систем и не используется для определения перемещений. В методе сил способ перемножения эпюр используется для определения коэффициентов канонических уравнений, он также позволяет находить перемещения в системах, в которых уже раскрыта статическая неопределимость и построена эпюра изгибающих моментов. Поэтому такое отождествление метода сил и способа перемножения эпюр нам кажется некорректным.

Далее в [1] говорится, что при определении «линейных и угловых перемещений методом сил возникают некоторые трудности в виде ошибок расчетов, превышающих 5%» и это иллюстрируется при определении прогиба (вертикального перемещения) в балке постоянной изгибной жесткости ($EI_x = \mathrm{const}$) с тремя силовыми участками. Для определения прогиба используются два метода: метод начальных параметров и метод Мора по способу Верещагина. Разница в полученных результатах составила 126%, при этом прогиб методом начальных параметров был определен верно, а по способу Верещагина – ошибочно, и полученное его значение было завышенным. И тут дело вовсе не в арифметических ошибках, а в непонимании того, что при использовании способа Верещагина сложные эпюры нужно разбивать или расслаивать на элементарные фигуры, для которых известны величина площади и положение центра тяжести.

В работе [1] рассматриваются фигуры, ограниченные квадратичной зависимостью (рис. 1).

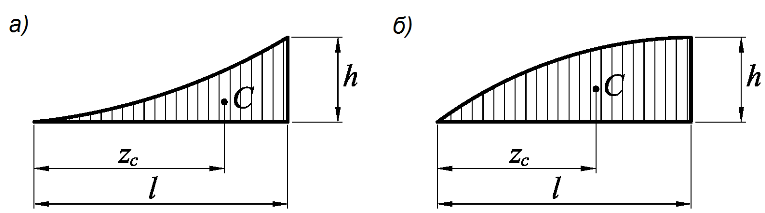

Рис. 1

Табличные значения [2], [3] для квадратичной параболы (рис. 1*а*)

$$A = \frac{1}{3}hl, \quad z_c = \frac{3}{4}hl, \tag{1}$$

а для половины квадратичной параболы (рис. 1*б*)

$$A = \frac{2}{3}hl, \quad z_c = \frac{5}{8}hl. \tag{2}$$

Авторы в [1] ошибочно используют эти значения площадей и координат центров тяжестей для элементарных квадратичных парабол, получаемых от действия только распределенной нагрузки, применительно к сложным эпюрам, получаемым при совместном действии распределенной нагрузки и сосредоточенных сил или моментов. Такой подход, несомненно, приведет к ошибочным результатам.

Для примера рассмотрим консоль (рис. 2*а*) длиной a постоянной изгибной жесткости $EI_x = \text{const}$ под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q и сосредоточенной силы $F = kqa$, где $k \geq 0$. Изгибающий момент в поперечных сечениях

$$M_x = \frac{1}{2}qz^2 + kqaz, \tag{3}$$

тогда площадь эпюры M_x (рис. 2*б*) будет равна

$$A = \int\limits_A dA = \int\limits_0^a M_x dz = \int\limits_0^a \left(\frac{1}{2}qz^2 + kqaz\right)\, dz = \frac{qa^3}{6}(3k+1). \tag{4}$$

Определив статический момент площади сечения

$$S_y = \int\limits_0^a zM_x dz = \int\limits_0^a \left(\frac{1}{2}qz^3 + kqaz^2\right)\, dz = \frac{qa^4}{24}(8k+3),$$

найдем координату центра тяжести эпюры

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{a(8k+3)}{4(3k+1)}. \tag{5}$$

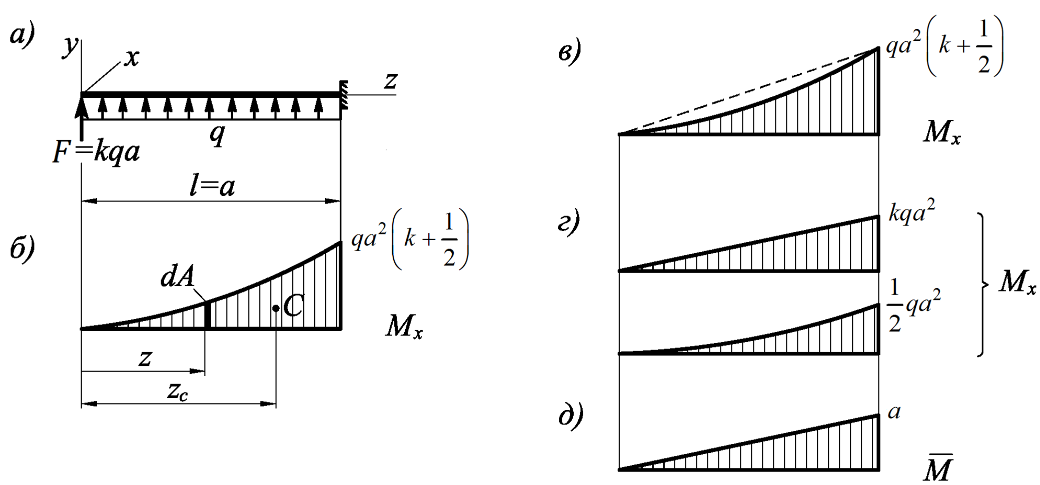

Рис. 2

Как видно, площадь по (4) и положение центра тяжести по (5) зависят от коэффициента k. При $k = 0$ с учетом $l = a$ и максимальной ординаты на эпюре $h = \dfrac{qa^2}{2}$ имеем

$$A = \frac{1}{6}qa^3 = \frac{1}{3}hl, \quad z_c = \frac{3}{4}l,$$

что совпадает с табличными значениями (1). При $k = 1$ с учетом значения ординаты $h = \dfrac{3}{2}qa^2$ получаем

$$A = \frac{2}{3}qa^3 = \frac{4}{9}hl, \quad z_c = \frac{11}{16}l,$$

что не совпадает с табличными значениями (1), как и при любом другом значении $k > 0$.

Для перемножения эпюру M_x можно разбить на простые составные части (элементарные фигуры), как показано на рис. 2*в*, либо расслоить, т. е. вместо суммарной эпюры построить эпюры от каждого силового фактора по отдельности (рис. 2*г*). Рассмотрим перемножение эпюры M_x на единичную $\overline{M}$ (рис. 2*д*), построенную для определения прогиба свободного торца консоли. В первом варианте перемножения, разбив эпюру на треугольник и квадратичную параболу – «горбушку», с табличным значением площади $\dfrac{2}{3}hl = \dfrac{qa^3}{12}$, получим

$$v = \frac{1}{EI_x}\left[\frac{1}{2} \cdot qa^2\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot a \cdot \frac{2}{3}a - \frac{qa^3}{12} \cdot \frac{1}{2}a\right] = \frac{qa^4}{24EI_x}(8k+3).$$

Для второго варианта перемножения, пользуясь табличным значением для треугольной квадратичной параболы (1), получаем аналогичный результат

$$v = \frac{1}{EI_x}\left[\frac{1}{2} \cdot kqa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}qa^2 \cdot a \cdot \frac{3}{4}a\right] = \frac{qa^4}{24EI_x}(8k+3).$$

При ошибочном перемножении эпюр, отождествляя площади элементарных и сложных фигур, как это сделано в [1], получим

$$v_{\text{ош}} = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{3} \cdot qa^2\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{qa^4}{4EI_x}\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

В дальнейшем такое перемножение будем рассматривать как приближенное решение. Абсолютное отношение результатов

$$\frac{v}{v_{\text{ош}}} = \frac{8k+3}{6k+3}. \tag{6}$$

При $k = 0$ имеем $v = v_{\text{ош}} = \dfrac{qa^4}{8EI_x}$, то есть результаты совпадают и отношение (6) равно 1; при $k > 0$ отношение (6) увеличивается, таким образом, приближенное решение в данном примере даст завышенные значения перемещений по сравнению с точным. Относительная погрешность

$$\Delta = \left|\frac{v - v_{\text{ош}}}{v}\right| = \frac{1}{4} - \frac{3}{4(8k+3)}$$

и при $k \to \infty$ она составит 25 %.

Для уточнения приближенного решения при перемножении эпюр от квадратичных функций в [1] вводится некоторый поправочный коэффициент на основе эвристического выражения

$$K = \frac{4}{6}\frac{M_{mid}}{M_{\max}} + \frac{1}{6}, \tag{7}$$

где M_{mid} — ордината M_x в середине эпюры при $z = l/2$; $M_{\max}$ — максимальная ордината на эпюре M_x. В нашем примере при $z = a/2$ из (3) имеем

$$M_{mid} = \frac{1}{8}qa^2 + \frac{1}{2}kqa^2 = \frac{qa^2}{8}(4k+1),$$

тогда

$$\frac{M_{mid}}{M_{\max}} = \frac{k+1/4}{2k+1}$$

и поправочный коэффициент из (7)

$$K = \frac{4}{6}\left(\frac{k+1/4}{2k+1}\right) + \frac{1}{6} = \frac{k+1/3}{2k+1}.$$

Уточненное значение прогиба составит

$$v_{\text{ут}} = Kv_{\text{ош}} = \frac{qa^4}{24EI_x}(3k+1).$$

Относительная погрешность по сравнению с точным решением будет равна

$$\Delta = \left|\frac{v - v_{\text{ут}}}{v}\right| = \frac{1}{64k+24} + \frac{5}{8}.$$

Получается удивительный результат, что при $k = 0$ правильное значение перемещения умножается на коэффициент $K = 1/3$, в результате уточненное значение перемещения становится еще меньше $v_{\text{ут}} = \dfrac{qa^4}{24EI_x}$ и отличается от точного уже на 66,6 %. При $k \to \infty$, $K = 0,5$ и $\Delta = 62,5$ % графики зависимости прогиба v и относительных погрешностей Δ от коэффициента k при малых его значениях представлены на рис. 3.

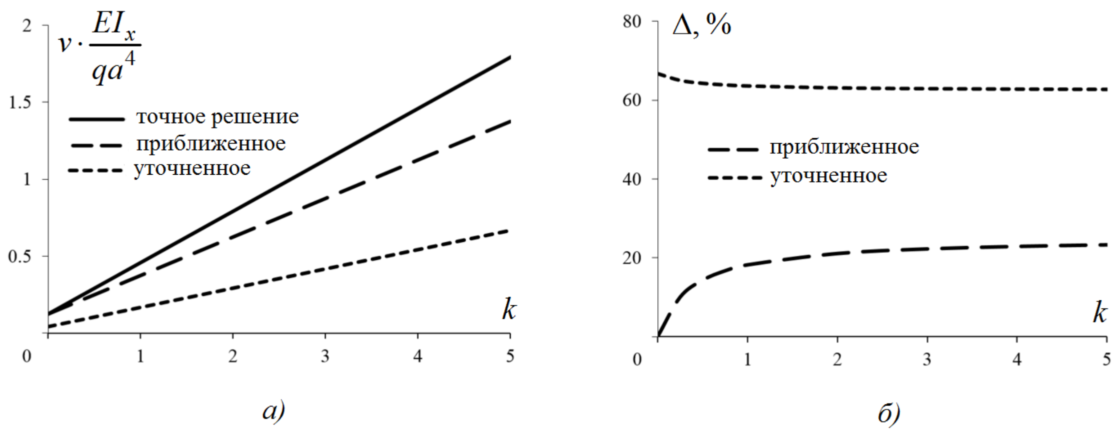

Рис. 3

Теперь рассмотрим однопролетную балку (рис. 4*а*) постоянной изгибной жесткости $EI_x = \text{const}$ длиной a под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q и сосредоточенной силы $F = kqa$ в центре.

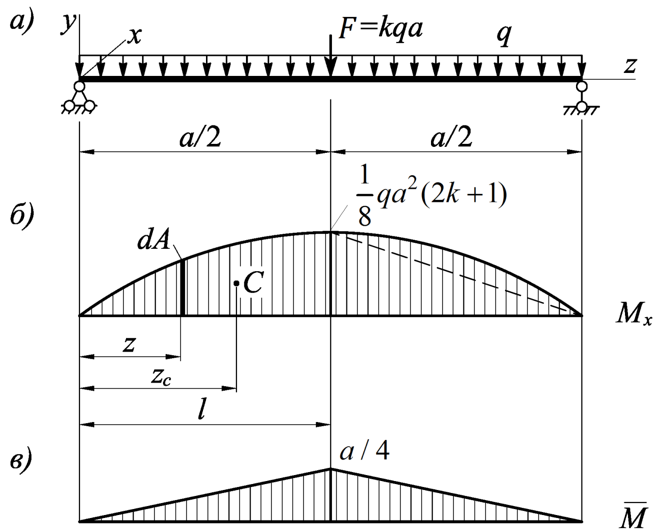

Рис. 4

Изгибающий момент в поперечных сечениях

$$M_x = \frac{1}{2}qa(k+1)z - \frac{1}{2}qz^2, \tag{8}$$

при $z = a/2$ имеем $M_{\max} = \dfrac{1}{8}qa^2(2k+1)$.

Площадь половины параболы длиной $l = a/2$ составит (рис. 4 *б*)

$$A = \int\limits_A dA = \int\limits_0^{a/2} M_x dz = \int\limits_0^{a/2} \left(\frac{1}{2}qa(k+1)z - \frac{1}{2}qz^2\right) dz = \frac{qa^3}{48}(3k+2)\,. \tag{9}$$

С учетом значения статического момента площади

$$S_y = \int\limits_A z dA = \int\limits_0^{a/2} zM_x dz = \frac{qa^4}{384}(8k+5)$$

координата центра тяжести половины параболы будет равна

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{a(8k+5)}{8(3k+2)}. \tag{10}$$

При $k = 0$ с учетом $l = a/2$ и максимальной ординаты на эпюре $h = \dfrac{qa^2}{8}$ из (9), (10) имеем

$$A = \frac{qa^3}{24} = \frac{2}{3}hl, \quad z_c = \frac{5}{16}a = \frac{5}{8}l,$$

что соответствует табличным значениям (2). Очевидно, что при $k > 0$ площадь и координата центра тяжести будут иметь другие значения.

Определим прогиб в середине пролета балки, перемножив эпюру M_x с единичной эпюрой $\overline{M}$ (рис. 4*в*). Для этого разобьем эпюру на элементарные фигуры: срезаем «горбушку» и выделяем треугольник. Перемножение ввиду симметрии ведем только для половины балки

$$v = \frac{2}{EI_x}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}qa^2(2k+1)\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{a}{4}+\frac{q(a/2)^3}{12}\cdot\frac{a}{8}\right] = \frac{qa^4}{384EI_x}(8k+5).$$

Приближенное решение дает результат

$$v_{\text{ош}} = \frac{2}{EI_x}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}qa^2(2k+1)\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{5}{8}\frac{a}{4}\right) = \frac{5qa^4}{384EI_x}(2k+1).$$

Отношение

$$\frac{v}{v_{\text{ош}}} = \frac{8k+5}{10k+5}, \tag{11}$$

а относительная погрешность составит

$$\left|\frac{v-v_{\text{ош}}}{v}\right| = \frac{2k}{8k+5}.$$

При $k=0$ имеем $v = v_{\text{ош}} = \dfrac{5qa^4}{384EI_x}$, что совпадает с известным табличным решением [2]. С ростом k отношение (10) уменьшается, то есть в данном случае приближенное решение дает завышенное значение прогиба по сравнению с точным. При $k\to\infty$ погрешность составляет 25 %.

Уточнение приближенного решения с учетом

$$M_{mid} = \frac{qa^2}{32}(4k+3), \quad \frac{M_{mid}}{M_{\max}} = \frac{k+3/4}{2k+1}$$

дает значение поправочного коэффициента (7)

$$K = \frac{4}{6}\cdot\left(\frac{k+3/4}{2k+1}\right)+\frac{1}{6} = \frac{k+2/3}{2k+1},$$

тогда уточненное значение прогиба

$$v_{\text{ут}} = Kv_{\text{ош}} = \frac{5qa^4}{384EI_x}\left(k+\frac{2}{3}\right).$$

Относительная погрешность

$$\Delta = \left|\frac{v-v_{\text{ут}}}{v}\right| = \frac{9k+5}{3(8k+5)}.$$

Значение $k=0$ дает $K=2/3$, при $k\to\infty$ имеем $K=0,5$. В результате коэффициент K понижает завышенное значение приближенного решения настолько, что оно оказывается меньше точного значения, при этом погрешность, как и в первом примере, только увеличивается. При $k=0$ имеем $\Delta = 33,33$ %, а при $k\to\infty$ $\Delta = 37,5$ %. Графики зависимостей $v-k$ и $\Delta-k$ представлены на рис. 5.

Как видно из рассмотрения простейших примеров, предложенный в [1] «метод использования уточняющих коэффициентов» при определении перемещений не только не уточняет приближенное решение, а наоборот, увеличивает его погрешность. Хорошее совпадение результатов расчета для рассмотренной расчетной схемы балки [1] с использованием этого метода с точным решением можно трактовать только лишь

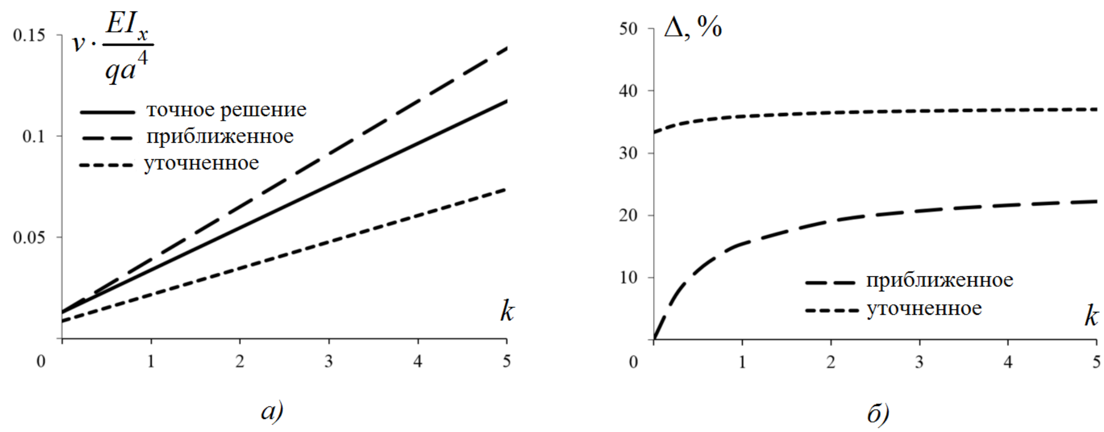

Рис. 5

как удачное стечение обстоятельств, при котором сумма ошибочно вычисленных слагаемых дала близкий к правильному результат. Применение этого метода к другим расчетным схемам даст недостоверные результаты, таким образом, мы не рекомендуем использовать этот метод в инженерной практике.

В завершение статьи приведем правильное решение при определении прогиба торца балки, рассмотренной в [1]. Расчетная схема, грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов представлены на рис. 6.

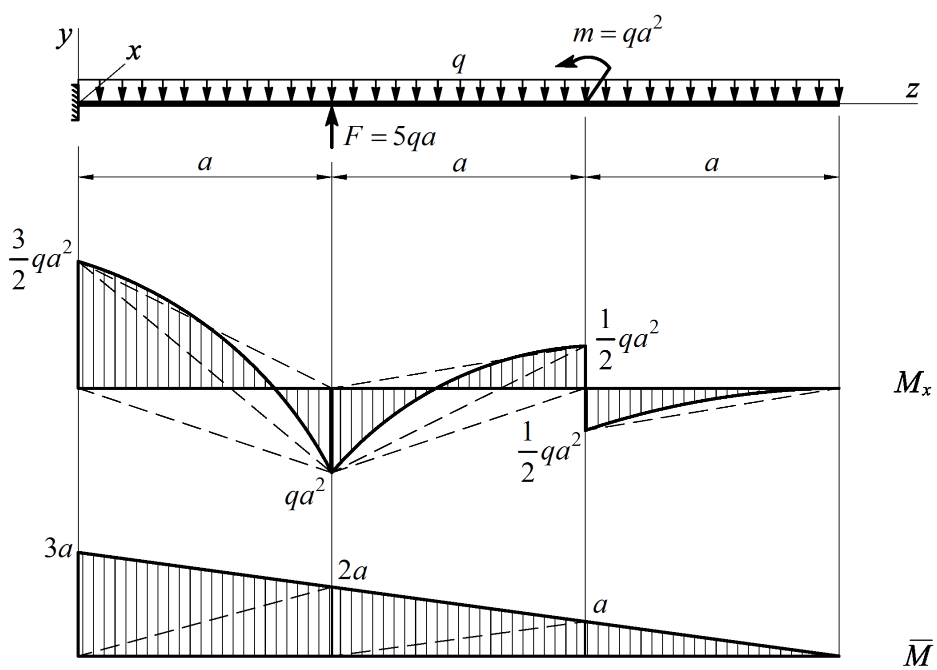

Рис. 6

Тогда

$$v = \frac{1}{EI_x}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}qa^2\cdot a\cdot\left(\frac{2}{3}3a+\frac{1}{3}2a\right)-\frac{1}{2}\cdot qa^2\cdot a\cdot\left(\frac{2}{3}2a+\frac{1}{3}3a\right)+\right.$$
$$+\frac{qa^3}{12}\cdot 2,5a-\frac{1}{2}\cdot qa^2\cdot a\cdot\left(\frac{2}{3}2a+\frac{1}{3}a\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}qa^2\cdot a\cdot\left(\frac{1}{3}2a+\frac{2}{3}a\right)+$$
$$\left.+\frac{qa^3}{12}\cdot 1,5a-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}qa^2\cdot a\cdot\frac{2}{3}a+\frac{qa^3}{12}\cdot 0,5a\right]=\frac{13qa^4}{24EI_x},$$

что совпадает с решением, полученным в [1] методом начальных параметров. Поэтому можно констатировать, что умозаключения авторов [1] о том, что при определении перемещений способом перемножения эпюр «необходимо использовать уточненные коэффициенты», является заблуждением.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Михайлов Б. В., Михайлов С. Б. К обоснованию некоторых коэффициентов при расчете элементов конструкций методом сил // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №. 1(27). С. 150–156.

[2] Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.

[3] Степин П. А. Сопротивление материалов: учебник. 13-е изд. СПб.: Издательство «Лань», 2014. 320 с.

A. A. Alekseev, E. G. Alekseeva, V. N. Vedernikov, V. I. Gultyaev

TO THE QUESTION ABOUT THE DETERMINATION OF DISPLACEMENTS BY MOHR'S METHOD AND INTRODUCTION OF REFINEMENT COEFFICIENTS AT MULTIPLICATION OF THE DIAGRAMS

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The critical analysis of the results received at calculation of Mohr's integrals by Vereshchagin's grapho-analytical technique with use of the "method of the refinement coefficients" offered in [1] is provided. It is shown that this method is incorrect and is not recommended for use in engineering practice.

Keywords: strength of materials, Mohr's Method, Vereshagin grapho-analytical technique, multiplication diagrams, displacements

REFERENCES

[1] Mihajlov B. V., Mihajlov S. B. K obosnovaniju nekotoryh kojefficientov pri raschete jelementov konstrukcij metodom sil // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2016. №. 1(27). S. 150–156. (in Russian).

[2] Pisarenko G. S, Jakovlev A. P., Matveev V. V.: spravochnik po soprotivleniju materialov. 2-e izd., pererab. i dop. Kiev: Naukova dumka, 1988. 736 s. (in Russian).

[3] Stepin P. A. Soprotivlenie materialov: uchebnik. 13-e izd. SPb.: Izdatel'stvo «Lan'», 2014. 320 s. (in Russian).

Alekseev Andrey Alekseevich
`e-mail:` alexeew@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Alekseeva Elena Gennadievna
`e-mail:` super_aeg@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Vedernikov Vladimir Nikolaevich
`e-mail:` kafsm@yandex.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Gultyaev Vadim Ivanovich
`e-mail:` vig0@mail.ru, Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.