Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 54–61

Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко

ОБ ОДНОЙ ДИСКУССИИ

Тульский государственный университет

Аннотация. Приведены некоторые положения дискуссии о постулате изотропии. Показано, что в трехмерном векторном пространстве главных напряжений на плоскостях кратности промежуточного главного напряжения квадратичная функция интенсивности девиаторных напряжений имеет особенность и поэтому не удовлетворяет постулату изотропии.

Ключевые слова: постулат изотропии, квадратичная функция интенсивности девиаторных напряжений, сингулярность.

УДК: 539.1

1. В статье Д. Д. Ивлева "Три дискуссии" [1] приведены его воспоминания о трех дискуссиях в механике, в которых он принимал участие. Одна из дискуссий посвящена представлению симметричного тензора второго ранга в шестимерном векторном пространстве и постулату изотропии.

Множество Π_6 всех симметричных тензоров второго ранга, которые можно определить для фиксированной точки сплошной среды, замкнуто относительно линейных комбинаций своих элементов и поэтому представляет некоторую шестимерную линейную систему. С точки зрения линейных свойств эта система аналогична шестимерному евклидову пространству. Но между этими линейными системами имеется и существенное различие.

Вектор в евклидовом пространстве имеет лишь один скалярный инвариант – длину вектора, в то время как элемент системы Π_6 – три инварианта.

В рамках классической механики сплошных сред тензор напряжений и тензор деформаций являются симметричными тензорами второго ранга и, следовательно, относятся к элементам Π_6. Конкретизируя физическую размерность базисных элементов, будем рассматривать два представителя этого подмножества – "пространство напряжений" и "пространство деформаций". Девиаторы в каждом из этих пространств образуют линейное подмножества соответственно D_s и D_e. Постулат изотропии А. А. Ильюшина [5] представляет собой утверждение, согласно которому для начально изотропной среды траектория процесса в пространстве D_s зависит от таких свойств траектории, которые инвариантны по отношению к ортогональным преобразованиям. Под ортогональными преобразованиями принимаются линейные преобразования пространства, при которых сохраняются квадратичные скаляры девиаторов.

Д. Д. Ивлев, полемизируя по поводу постулата изотропии, пишет [2]: "Согласно постулату изотропии, связь между тензорами-девиаторами напряжений и деформаций изотропна в пространстве тензоров-девиаторов напряжений и деформаций. Следствием этого предположения является то обстоятельство, что зависимость между тензорами-девиаторами напряжений и деформаций в общем случае записывается в виде

Поступила 16.08.2014

$$D_s = \sum_{n=1}^{5} A_n \frac{d^n D_e}{ds^n}, \tag{1.1}$$

где D_s, D_e – соответственно тензоры-девиаторы напряжений и деформаций, s – второй инвариант девиатора деформаций, A_n – функция (или функционал), зависящая, если для простоты исключить влияние временных факторов, от некоторых инвариантов тензоров-девиаторов D_e, $d^n D_e/ds^n$, где $n = 1, 2, ..., 5$."

Далее он пишет: "Единственным условием пластичности, изотропным в пространстве девиатора напряжений, является условие пластичности Мизеса. Всякое другое условие пластичности, являющееся комбинацией второго и третьего инвариантов девиатора напряжений, например Треска, не изотропно в пространстве девиатора напряжений".

По существу, Д. Д. Ивлев указал, что постулат изотропии не является универсальным.

Гораздо позже, уже в зрелые годы, Д. Д. Ивлев, возвращаясь к этой дискуссии, напишет [1]: "В свое время я заметил, что в предложенной форме постулата изотропии не учитывается влияние третьего инварианта девиатора напряжений, хотя для изотропного тела третий инвариант девиатора имеет место".

Нужно отдать должное А. А. Ильюшину, что сам он не претендовал на универсальность постулата изотропии: "*Многочисленные* опыты наших и зарубежных ученых с изотропными в исходном состоянии материалами при нормальных и высоких температурах, малых и больших временах деформирования показывают, что *влияние третьего инварианта деформирования* (напряжений) *на механические свойства при малых деформациях является слабым*, и это согласуется с теорией малых упругопластических деформаций. Поэтому в рассмотренных формулировках постулата изотропии мы принимаем, что от третьих инвариантов тензоров коэффициенты A_n ... не зависят. Это означает, что пятимерные пространства напряжений, деформаций и т. д. изотропны, т. е. законы связи напряжений с деформациями инвариантны не только относительно преобразований поворота осей координат в теле, но и относительно преобразований вращения и отражения в пятимерных пространствах, и, значит, только длина дуги и четыре параметра кривизны являются единственными внутренними характеристиками процессов сложного нагружения" [6].

Уже в настоящее время В. Г. Зубчанинов замечает [8]: "Как видно, Д.Д. Ивлев по существу не вступал в дискуссию с А. А. Ильюшиным. Он отметил лишь то, что уже предполагалось в постулате самим автором".

Покажем, что для напряженных (деформированных) состояний, при которых промежуточное главное напряжение (деформация) является кратным, квадратичная девиаторная функция не изотропна.

2. Рассмотрим девиаторную квадратичную функцию тензора напряжений

$$\Sigma_d = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}/\sqrt{3}, \tag{2.1}$$

где $\sigma_i \quad (i = 1, 2, 3)$ – главные напряжения. Функция Σ_d представляет собой модуль вектора интенсивности девиаторных напряжений.

В трехмерном векторном пространстве главных напряжений поверхности равного уровня интенсивности девиаторных напряжений $\Sigma_d = const$ представляют собой цилиндры, образующие которых параллельны оси гидростатического давления.

В механике деформированного твердого тела принято считать, что поверхности равного уровня $\Sigma_d = const$ являются регулярными, т.е. производная от этой функции в пространстве главных напряжений по главным напряжениям имеет вид [4], [5], [6], [7], [11], [12]

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_i} = \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{3\Sigma_d}, \quad (i \neq j \neq k). \tag{2.2}$$

Согласно гипотезе о регулярности функции $\Sigma_d = const$ из (2.2) следует, что вектор $grad\Sigma_d$ ортогонален к поверхностям $\Sigma_d = const$ равного уровня во всех точках пространства главных напряжений, включая и линии пересечения поверхности равного уровня с плоскостями кратности.

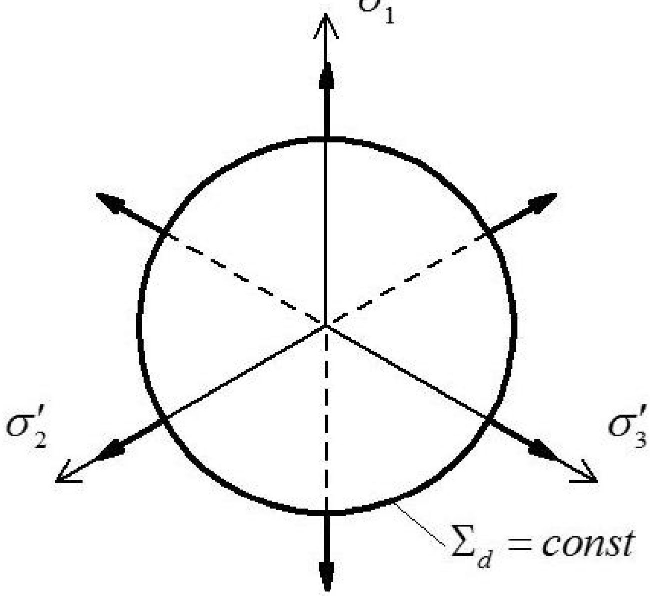

Рис. 1 Общепринятое представление $grad\,\Sigma_d$

Покажем, что гипотеза о регулярности функции Σ_d является некорректной.

Рассмотрим трехмерное векторное пространство главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3. Если через гидростатическую ось этого пространства и направления главных напряжений провести три плоскости, то они разделят векторное пространство на шесть равных сегментов, а девиаторную плоскость соответственно на шесть секторов. Введем нумерацию секторов арабскими цифрами в направлении против хода часовой стрелки от положительной проекции главного напряжения $\vec{\sigma}_1$. Поскольку на плоскостях между сегментами промежуточное главное напряжение является кратным (оно равно минимальному или максимальному главному напряжению), то эти плоскости называются плоскостями кратности.

Теорема.

При пересечении поверхности $\Sigma_d = const$ с плоскостями кратности функция Σ_d проявляет сингулярность.

Доказательство.

Несложно убедится в том, что модуль интенсивности девиаторных напряжений Σ_d является однородной функцией первой степени. Подставляя (2.2) в уравнение

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_1}\sigma_1 + \frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_2}\sigma_2 + \frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_3}\sigma_3 = \Sigma_d, \tag{2.3}$$

получим тождество.

Поскольку функция Σ_d удовлетворяет условию (2.3), то она является однородной функцией первой степени [9].

Для примера рассмотрим пересечение поверхностей Σ_d равного уровня с плоскостью кратности $\sigma_2 = \sigma_3$.

На плоскости кратности $\sigma_2 = \sigma_3$ функция Σ_d принимает два значения $\Sigma_d^{(2)}$ и $\Sigma_d^{(3)}$, причем

$$\Sigma_d^* = \Sigma_d^{(2)} = \sqrt{2/3}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \Sigma_d^* = \Sigma_d^{(3)} = \sqrt{2/3}(\sigma_1 - \sigma_3). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что сингулярность на линиях пересечения поверхностей Σ_d равного уровня с плоскостью кратности $\sigma_2 = \sigma_3$ проявляется в виде ребра равносторонней шестигранной призмы, образующие которой равно наклонены к осям главных напряжений.

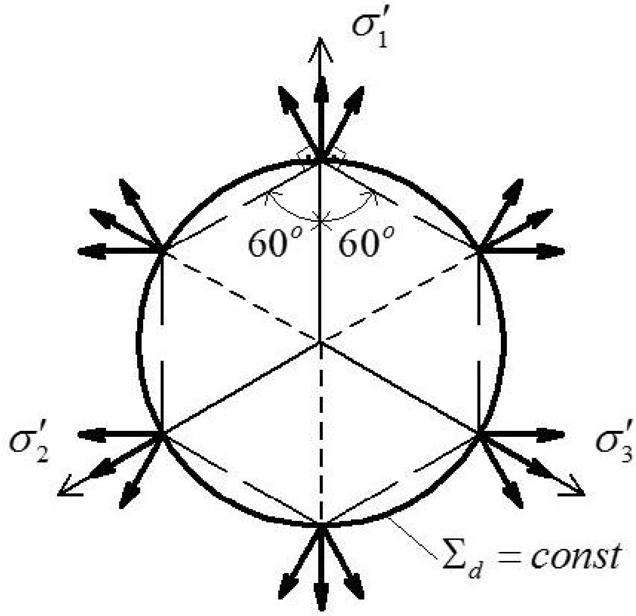

Рис. 2. Точки сингулярности квадратичной функции (2.1)

Следовательно, нормаль к поверхности Σ_d вырождается в веер нормалей

$$\frac{\partial \Sigma_d^*}{\partial \sigma_i} = \alpha \frac{\partial \Sigma_d^{(2)}}{\partial \sigma_i} + \alpha_1 \frac{\partial \Sigma_d^{(3)}}{\partial \sigma_i}, \tag{2.5}$$

где $\alpha \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$ – неопределенные множители Лагранжа.

Так как по определению Σ_d, $\Sigma_d^{(2)}$, $\Sigma_d^{(3)}$ – однородные функции первой степени, то по теореме Эйлера [9] об однородных функциях имеем

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_i}\sigma_i = \Sigma_d, \quad \frac{\partial \Sigma_d^{(2)}}{\partial \sigma_i}\sigma_i = \Sigma_d^{(2)}, \quad \frac{\partial \Sigma_d^{(3)}}{\partial \sigma_i}\sigma_i = \Sigma_d^{(3)}. \tag{2.6}$$

Свертывая (2.5) и учитывая (2.6), получим

$$\Sigma_d^* = \alpha \Sigma_d^{(2)} + \alpha_1 \Sigma_d^{(3)}. \tag{2.7}$$

Так как на пересечении $\Sigma_d^* = \Sigma_d^{(2)} = \Sigma_d^{(3)}$, то $\alpha + \alpha_1 = 1$ и поэтому соотношения (2.7), (2.5) принимают вид

$$\Sigma_d^* = \alpha \Sigma_d^{(2)} + (1-\alpha)\Sigma_d^{(3)}; \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \Sigma_d^*}{\partial \sigma_i} = \alpha \frac{\partial \Sigma_d^{(2)}}{\partial \sigma_i} + (1-\alpha)\frac{\partial \Sigma_d^{(3)}}{\partial \sigma_i}. \tag{2.9}$$

Поскольку на линиях пересечения поверхности равного уровня Σ_d с плоскостью кратности главных напряжений $\sigma_2 = \sigma_3$ функция Σ_d проявляет сингулярность, то функция Σ_d не является регулярной. Аналогично доказывается сингулярность и для остальных точек пересечения следа девиаторной функции (2.1) с девиаторной плоскостью и плоскостями кратности промежуточного главного напряжения.

Выводы.

1. Плоскости кратности промежуточного главного напряжения разделяют трехмерное векторное пространство на шесть независимых сегментов [9]. На плоскостях кратности квадратичная функция интенсивности девиаторных напряжений имеет особенность, поэтому не удовлетворяет постулату изотропии.

2. При решении задач механики деформированного твердого тела следует учитывать эту особенность.

3. Сингулярность девиаторной функции (2.1) не связана с механическими характеристиками материала, а является топологическим свойством симметричного тензора второго ранга.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Три дискуссии / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 157–163.

[2] *Ивлев, Д. Д.* О постулате изотропии в теории пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.

[3] *Ивлев, Д. Д.* О работе В. С. Ленского "Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении" / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 1795–181.

[4] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Ч 1. Упругопластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

[5] *Ильюшин, А. А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред / А. А. Ильюшин // ПММ. – 1954. – Т. 18. – Вып. – С. 641–666.

[6] *Ильюшин, А. А.* Еще о постулате изотропии / А. А. Ильюшин // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 201–204.

[7] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

[8] *Зубчанинов, В. Г.* Теория идеальной пластичности, предельных состояний и Д. Д. Ивлев / В. Г. Зубчанинов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1. – С. 157–163.

[9] *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 256 с.

[10] *Кузнецов, Е. Е.* О сингулярности девиаторных функций трехмерного тензора второго ранга / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 12-15 августа 2013 г.) : в 2 ч. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела / отв. ред. Б. Г. Миронов. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 127–132.

[11] *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие для мех. мат. и физ. спец. университетов / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 711 с.

[12] *Трусделл, К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. – М. : Мир, 1975. – 592 с.

Кузнецов Евгений Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

`e-mail:` smithe71@yandex.ru

Матченко Николай Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

`e-mail:` ekc_05@mail.ru

Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko

ABOUT ONE DISCUSSION

Tula State University

Abstract. Some positions of discussion about a postulate isotropy are resulted. It is shown, that in three-dimensional vector space of the main stress on planes of frequency rate of an intermediate main stress square-law function of intensity deviator׳s stress has feature and consequently does not satisfy to a postulate isotropy.

Keywords: Postulate isotropy, square-law function of intensity deviator׳s stress, singularity.

REFERENCES

[1] *Ivlev, D. D.* Three discussion / D. D. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – № 1. – P. 157–163.

[2] *Ivlev, D. D.* About an isotropy postulate in the theory of plasticity / D. D. Ivlev // AN news USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. – 1960. – № 2. – P. 125–127.

[3] *Ivlev, D. D.* About V. S. Lensky's work "Some new data on plasticity of metals at difficult loading" / D. D. Ivlev // News of Academy of Sciences of the USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. – 1960. – № 6. – P. 1795–181.

[4] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. P. 1. Elasto-plastic deformations / A. A. Ilyushin. – M. ; L. : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.

[5] *Ilyushin, A. A.* About communication between tension and small deformations in mechanics of continuous environments / A. A. Ilyushin // ПММ. – 1954. – Vol. 18. – Issue – P. 641–666.

[6] *Ilyushin, A. A.* About an isotropy postulate / A. A. Ilyushin // News of Academy of Sciences of the USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering. – 1962. – № 1. – P. 201–204.

[7] *Ilyushin, A. A.* Plasticity. Bases of the general mathematical theory / A. A. Ilyushin. – M. : Publishing house of Academy of Sciences of the USSR, 1963. – 271 p.

[8] *Zubchaninov, V. G.* Теория идеальной пластичности, предельных состояний и Д. Д. Ивлев / V. G. Zubchaninov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1 (15). – P. 157–163.

[9] *Korn, G.* The reference book on mathematics for scientists and engineers / G. Korn, T. Korn. – M. : Nauka, 1978. – 256 p.

[10] *Kuznetsov, E. E.* About singularity deviatornykh of functions of a three-dimensional tensor of the second rank / E. E. Kuznetsov, N. M. Mattchenko // Fundamental and applied problems of mechanics of a deformable solid body, mathematical modeling and information technologies : the collection of the Art. on materials of the international scientific and practical conference (Cheboksary, on August 12-15, 2013): in 2 p. P. 1. Mechanics of a deformable solid body / responsible edition B. G. Mironov. – Cheboksary : Chuvash State Pedagogical University, 2013. – P. 127–132.

[11] *Rabotnov, Yu. N.* Mechanics of a deformable solid body: the manual for fur. mat. and the physical special universities / Yu. N. Rabotnov. – M. : Nauka, 1988. – 711 p.

[12] *Trusdell, K.* Initial course of rational mechanics of continuous environments / K. Trusdell. – M. : Mir, 1975. – 592 p.

Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Nikolay Mihailovich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of mechanics plastic forming, Tula State University, Tula