Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 60–63

Н. В. Минаева, А. Н. Шевалдин

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассмотрен продольно-поперечный изгиб прямоугольной пластины на упругом основании. Получено условие, определяющее границу области непрерывной зависимости решения, описывающего прогиб пластины, от параметров поперечной нагрузки и жесткости постели.

Ключевые слова: линейная упругость, прямоугольная пластина на упругом основании, непрерывная зависимость, адекватность линейной модели.

УДК: 539.3

Прямоугольные пластины на упругом основании широко используются в технике и строительстве в качестве конструкционных элементов покрытий автомобильных дорог, мостов, взлетно-посадочных полос [1], [2]. Исследование их прочности и несущей способности требует знания напряженно-деформированного состояния (НДС). Проблема изгиба пластин на упругом основании представляет собой одну из актуальных задач математической теории упругости. Анализу НДС посвящено множество работ, например [3]–[5].

В настоящей работе рассмотрено поведение защемленной по одной паре кромок и шарнирно опертой по другой паре прямоугольной упругой пластины толщиной h. Она находится под действием поперечной нагрузки интенсивности $\tilde{r}(x, y)$, а по краям – под действием продольных распределенных усилий $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$. Пластина лежит на упругом основании с коэффициентом жесткости $\tilde{\lambda}$.

Минаева Надежда Витальевна
e-mail: minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Шевалдин Андрей Николаевич, магистрант факультета ПММ, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 11.07.2016

Функция $w(x,y)$, описывающая форму изогнутой пластины, является решением следующей краевой задачи (по линейной теории) [6]:

$$\begin{gathered}\nabla^4 w(x,y) + q\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = r - \lambda w,\\ w(0,y) = w(1,y) = w(x,0) = w(x,\alpha) = 0,\\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=1} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=\alpha} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $q = \dfrac{\tilde{q}h}{D}$, $p = \dfrac{\tilde{p}h}{D}$, $r = \dfrac{\tilde{r}}{D}$, $\lambda = \dfrac{\tilde{\lambda}}{D}$.

Пусть при $r(x,y) = r^0(x,y)$ и $\lambda = \lambda_0$ задача (1) имеет решение

$$w(x,y) = w^0(x,y). \tag{2}$$

Как известно, (2) будет физически осуществимо, если решение w задачи (1) непрерывно зависит от $r(x,y)$ и λ при $r(x,y) = r^0(x,y)$, $\lambda = \lambda_0$. Для анализа этой непрерывности, согласно [7], получена вспомогательная линеаризованная задача относительно $\zeta(x,y)$ $(w = w^0 + \zeta)$

$$\begin{gathered}\nabla^4 \zeta(x,y) + q\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = -\lambda\zeta\\ \zeta(0,y) = \zeta(1,y) = \zeta(x,0) = \zeta(x,\alpha) = 0\\ \left.\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right|_{x=1} = \left.\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|_{y=\alpha} = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Решение задачи (1) будет непрерывно зависеть от r и λ при $r = r^0$, $\lambda = \lambda_0$, если (3) имеет только тривиальное решение.

Удовлетворяя части граничных условий, ищем решение в виде [6]:

$$\zeta = Y(y)\sin m\pi x. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), для частного случая области значений параметров внешних воздействий $(p < 2m^2\pi^2,\ \lambda > (\pi m)^2(q - (\pi m)^2))$ найдено:

$$\zeta = (C_1 e^{\gamma_1 y} + C_2 e^{\gamma_2 y} + C_3 e^{-\gamma_1 y} + C_4 e^{-\gamma_2 y})\sin m\pi x, \tag{5}$$

где $\gamma_1 = \sqrt{-\dfrac{k_2}{2} + \sqrt{\dfrac{k_2^2}{4} - k_0}}$, $\gamma_2 = \sqrt{-\dfrac{k_2}{2} - \sqrt{\dfrac{k_2^2}{4} - k_0}}$, $k_0 = m^4\pi^4 - qm^2\pi^2 + \lambda$, $k_2 = p - 2m^2\pi^2$.

Константы C_i из (5) определяются из системы:

$$\begin{aligned}&C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0\\ &C_1 e^{\gamma_1\alpha} + C_2 e^{\gamma_2\alpha} + C_3 e^{-\gamma_1\alpha} + C_4 e^{-\gamma_2\alpha} = 0\\ &C_1\gamma_1 + C_2\gamma_2 - C_3\gamma_1 - C_4\gamma_2 = 0\\ &C_1\gamma_1 e^{\gamma_1\alpha} + C_2\gamma_2 e^{\gamma_2\alpha} - C_3\gamma_1 e^{-\gamma_1\alpha} - C_4\gamma_2 e^{-\gamma_2\alpha} = 0.\end{aligned}$$

В результате было получено условие нетривиальности решения (5) задачи (3):

$$4\gamma_1\gamma_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2\cosh((\gamma_2 - \gamma_1)\alpha) + (\gamma_1 - \gamma_2)^2\cosh((\gamma_2 + \gamma_1)\alpha) = 0. \tag{6}$$

Если внешние усилия такие, что их соответствующие параметры принадлежат кривой (6), то w не будет непрерывно зависеть от r и λ при $r = r^0$, $\lambda = \lambda_0$. Таким образом, оно определяет границу непрерывной зависимости решения задачи (1) от параметров поперечной нагрузки и жесткости постели. На рис. 1 представлен качественный вид кривой (6) для различных m на плоскости параметров сжимающих воздействий.

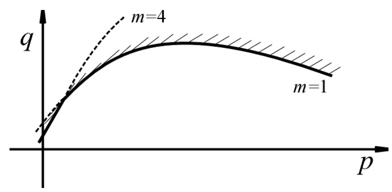

Рис. 1

Соотношение (6) задает также одну из верхних границ адекватности математической модели (1). Если внешние нагрузки p и q таковы, что точка, соответствующая им, находится вне области, ограниченной линией (6), то решение w уже не будет адекватно описывать состояние рассматриваемой пластины.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гусев А. М., Иванов В. А. Устойчивость пластин на упругом основании при комбинированном нагружении // Труды семинара по теории оболочек. 1974. Вып. 5.

[2] Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.

[3] Малышев М. В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений. М.: Стройиздат, 1994. 228 с.

[4] Товстик П. Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Известия РАН МТТ. 2005. Вып. 1. С. 147–160.

[5] Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. О формах потери устойчивости пластины на упругом основании // Изв. РАН МТТ. 2010. № 4. С. 30–42.

[6] Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.

[7] Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. 235 с.

N. V. Minaeva, A. N. Shevaldin

THE INVESTIGATION OF STATE OF AN ELASTIC RECTANGULAR PLATE ON AN ELASTIC SUBSTRUCTURE

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Considered longitudinal-transverse bending of a rectangular plate on an elastic substructure. Derived a condition that determines the boundary continuous dependence of solutions describing the deflection of the plate, from the parameters of normal load and stiffness of the substructure.
Keywords: the linear elastic, rectangular plate on an elastic substructure, continuous dependence, adequacy of the linear model.

REFERENCES

[1] Gusev A. M., Ivanov V. A. Ustojchivost' plastin na uprugom osnovanii pri kombinirovannom nagruzhenii // Trudy seminara po teorii obolochek. 1974. Vyp. 5. (in Russian).

[2] Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. Raschet konstrukcij na uprugom osnovanii. M.: Strojizdat, 1984. 679 s. (in Russian).

[3] Malyshev M. V. Prochnost' gruntov i ustojchivost' osnovanij sooruzhenij. M.: Strojizdat, 1994. 228 s. (in Russian).

[4] Tovstik P. E. Lokal'naja ustojchivost' plastin i pologih obolochek na uprugom osnovanii // Izvestija RAN MTT. 2005. Vyp. 1. S. 147–160. (in Russian).

[5] Morozov N. F., Tovstik P. E. O formah poteri ustojchivosti plastiny na uprugom osnovanii // Izv. RAN MTT. 2010. № 4. S. 30–42. (in Russian).

[6] Vol'mir A. S. Ustojchivost' uprugih sistem. M.: Fizmatgiz, 1963. 880 s. (in Russian).

[7] Minaeva N. V. Adekvatnost' matematicheskih modelej deformiruemyh tel. M.: Nauchnaja kniga, 2006. 235 s. (in Russian).

Minaeva Nadezhda Vitalyevna
`e-mail:` alexeew@bk.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.
Shevaldin Andrey Nikolaevich, Graduate, Voronezh State University, Voronezh, Russia.