Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 64–75

Ю. В. Астапов, А. А. Маркин

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЖЕСТКОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Приведена постановка задачи о конечных деформациях гипоупругих тел с использованием вариационного условия равновесного протекания процесса деформирования. Учитывалось контактное трение в форме закона Амонтона – Кулона. Предложен вариант итерационного алгоритма для учета касательных напряжений в зоне контакта. Приведены результаты численного решения задач об определении напряженно-деформированного состояния цилиндрических тел при взаимодействии с жесткой плоскостью. Результаты решения качественно согласуются с известными данными, приведенными в литературе.

Ключевые слова: конечные деформации, плоские задачи, условие равновесности, упругость, обобщенная производная Яуманна, закон Амонтона – Кулона.

УДК: 539.3

Введение. Механическое взаимодействие упругих тел имеет место в различных областях практической деятельности, начиная от технологических процессов и прецизионного описания работы узлов механизмов до приложений в сфере геологии и биотехнологии. Как правило, в подобных задачах основной проблемой является учет граничных условий смешанного типа на неизвестной поверхности контакта. В большинстве макромоделей ограничения, накладываемые на величины допустимых нормальных и касательных нагрузок, принимают в виде некоторых эмпирических законов. Вариации этих зависимостей могут учитывать адгезионные свойства поверхностей, взаимный износ, тепловыделение на границе раздела и различные фрикционные эффекты [3], [4], [17]. Одним из наиболее широко используемых при контакте однородных вблизи границы сред является закон Амонтона – Кулона [17], [18].

Астапов Юрий Владимирович
e-mail: ast3x3@gmail.com, магистрант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.
Маркин Алексей Александрович
e-mail: markin-nikram@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-01875_a) и Минобрнауки России (госзадание № 467).

Поступила 15.06.2016

Применение аналитических и численно-аналитических методов решения контактных задач [3], [9], как правило, ограничено рассмотрением канонических форм расчетных областей и сложностями в применении аппарата интегральных уравнений, к которым приводит общее решение простейшей контактной задачи с использованием соотношений Папковича – Нейбера. Исчерпывающий обзор по аналитическим методам приведен в работе [2].

Теория Герца применительно к задаче о контакте без трения широко используется для отладки вычислительных алгоритмов. Во многих работах [12], [15] обязательным критерием адекватности модели является ее асимптотическая сходимость к решению Герца. В работе [20] для задачи о взаимодействии упругого шара и жесткой плоскости определяется предел, когда учет трения является обоснованным с точки зрения расхождения результатов. Экспериментальные подтверждения достоверности предположений о характере контактного взаимодействия могут быть получены путем измерения неких макрохарактеристик деформированного состояния для простой задачи. Более современная техника исследований заключается в непосредственном фиксировании всех характеристик напряженно-деформированного состояния с использованием методов спекл-интерферометрии [14].

Для решения реальных прикладных задач обычно используется сеточная дискретизация расчетной области в рамках методов конечных элементов, граничных элементов и конечных разностей. Распространены подходы, основанные на концепции «передающей среды» [11], [15] и использующие особый тип граничных элементов. Это позволяет избежать некоторых трудностей, связанных с определением пар взаимодействующих ячеек сеток. В обзорах классических работ [19] показано, что общая вариационная постановка контактной задачи, относящаяся к классу задач с ограничениями в виде неравенств, может быть представлена в форме квазивариационных неравенств. В работах А. С. Кравчука [5] приведены необходимые выкладки, обосновывающие численное решение упругих и упругопластических задач в квазивариационной постановке с использованием модификации итерационного алгоритма Удзавы для поиска седловой точки соответствующего функционала. Другой подход к учету кинематических ограничений заключается в использовании аппарата методов математического программирования [19]. Наиболее распространенными методами являются метод штрафных функций, основной идеей которого является введение дополнительной переменной — зазора между контактирующими телами, и различные вариации метода множителей Лагранжа, приводящие к проблеме минимизации функционала. Ни один из приведенных методов не лишен недостатков. Метод штрафных функций [15] требует определения подгоночных параметров, которые могут повлиять на устойчивость численного счета, в то время как метод множителей Лагранжа с добавками [13], [17] может приводить к плохо обусловленным системам разрешающих уравнений. В статье [8] задача теории пластичности решалась с использованием альтернирующего метода Шварца, основанного на раздельном и поочередном рассмотрении краевой задачи для каждого из контактирующих тел. Широкий обзор по подходам к численному решению контактных задач приведен в [1].

Во многих случаях вышеперечисленные подходы комбинируются и подвергаются изменениям, обусловленным спецификой конкретных постановок. Необходимость решения задач, описываемых моделями, не представленными в коммерческом ПО, требует включения в существующие постановки моделей контактного взаимодействия [16]. В связи с этим актуальным является вопрос о выборе метода учета контактных граничных условий в конкретной краевой задаче. В данной работе он решился в пользу итерационных алгоритмов, обеспечивающих прозрачность вычислений, адекватность затрат ресурсов и требуемый уровень достоверности.

Постановка задачи. Решение задач конечного упругого деформирования анизотропных тел является актуальным в связи с распространенностью в современном производстве материалов по типу эластомеров. Для гипоупругих тел определяющие соотношения могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{S}^{*} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{W}, \tag{1}$$

где $\mathbf{C}$ — тензор упругих постоянных четвертого ранга, $\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla\right)$ — тензор деформации скоростей, $\mathbf{S}^{*}$ — скорость изменения тензора истинных напряжений Коши, $\nabla = \boldsymbol{r}_i \frac{\partial}{\partial x^i} = \boldsymbol{R}^i \frac{\partial}{\partial X^i}$, $i = 1..3$ — оператор Гамильтона в текущей конфигурации.

В процессах конечного деформирования главные оси анизотропии $\boldsymbol{a}'_i$, $i = 1..3$ изменяют свою ориентацию относительно неподвижного базиса. Принято считать [7], [10], что их вращение описывается ортогональным тензором $\mathbf{R}$, входящим в полярное разложение аффинора деформаций: $\boldsymbol{a}'_i = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{a}_i$, где $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1..3$ — начальная ориентация главных осей анизотропии. Определяющие соотношения удобно записывать в базисе главных осей таким образом, чтобы компоненты производной тензора напряжений относились к полярному базису $\boldsymbol{n}_i$, $i = 1..3$, изменяющемуся по такому же закону, что и $\boldsymbol{a}'_i$, $= 1..3$. Исходя из вышесказанного, в качестве объективной производной тензора напряжений выбрана обобщенная коротационная производная Яуманна:

$$\mathbf{S}^{\Delta} = \dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — антисимметричный тензор угловой скорости вращения полярного базиса [6], [7], определяемый выражением

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}. \tag{3}$$

В работе [7] приведено вариационное соотношение равновесного протекания процессов конечного деформирования в текущей конфигурации. Для обеспечения квазистационарности движения сплошной среды необходимо потребовать равенство нулю главного вектора сил, действующих на материальный объем, а также нулевой скорости изменения этого вектора. Исходя из вариационного принципа Журдена, условия равновесности принимают вид:

$$\begin{cases} \int\limits_V \left(\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \boldsymbol{F}\right) \cdot \delta \boldsymbol{v} \, dV = 0, \\ \left(\int\limits_V \dfrac{d}{dt} \left(\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \boldsymbol{F}\right) \cdot \delta \boldsymbol{v} + \dot{\theta} \left(\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \boldsymbol{F}\right) \cdot \delta \boldsymbol{v} \right) dV = 0. \end{cases} \tag{4}$$

После преобразований [7] условие равновесности (4) примет вид:

$$\begin{gathered} \int\limits_V \left(\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \boldsymbol{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \cdot \delta \left(\boldsymbol{v}\nabla\right) \, dV = \\ = \int\limits_\Sigma \left(\dot{\boldsymbol{P}}^{(n)} + \boldsymbol{P}^{(n)} \left(\dot{\theta} - \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{n} \right) \right) \cdot \delta \boldsymbol{v} \, d\Sigma + \int\limits_V \left(\left(\rho \boldsymbol{F}\right)^{\bullet} + \dot{\theta} \rho \boldsymbol{F} \right) \cdot \delta \boldsymbol{v} \, dV_0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{P}^{(n)}$ и $\boldsymbol{F}$ — внешние поля соответственно поверхностных и массовых сил, ρ — плотность, $\boldsymbol{v}$ — поле скоростей точек среды, $\dot{\theta} = I_1(\mathbf{W})$ — скорость изменения элементарного объема.

Соотношение (5) после подстановки в него (1) и (2) с учетом отсутствия внешних массовых воздействий принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\int\limits_V \left(\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \boldsymbol{v}\nabla\cdot\mathbf{S}\right)\cdot\cdot\delta\left(\boldsymbol{v}\nabla\right)\, dV = \\ = \int\limits_\Sigma \left(\dot{\boldsymbol{P}}^{(n)} + \boldsymbol{P}^{(n)}\left(\dot{\theta} - \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{n}\right)\right)\cdot\delta\boldsymbol{v}\, d\Sigma.\end{gathered} \tag{6}$$

Уравнение (6) дополняется эволюционными соотношениями, определяющими связь поля перемещений и аффинора деформаций с полем скоростей:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \\ \dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}\cdot\nabla\boldsymbol{v}. \end{cases} \tag{7}$$

Начальные условия для системы (6), (8) имеют вид:

$$\boldsymbol{u}|_{t=t_0} = 0, \quad \boldsymbol{\Phi}|_{t=t_0} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}|_{t=t_0} = \mathbf{S}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}|_{t=t_0} = \boldsymbol{X}. \tag{8}$$

Граничные условия статического типа предусматривают задание в каждой точке поверхности Σ_P закона изменения внешних нагрузок как функции времени и эйлеровых координат

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0(\boldsymbol{x}, t) \quad \boldsymbol{x}\in\Sigma_P \quad \forall t > t_0. \tag{9}$$

При задании граничных условий кинематического типа в каждой точке поверхности Σ_u определяется закон изменения перемещений материальных точек

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}, t) \quad \boldsymbol{x}\in\Sigma_u \quad \forall t > t_0. \tag{10}$$

Для решения начально-краевой задачи (2), (5), (6)—(10) использовались метод конечных элементов и метод пошагового нагружения. Для дискретизации поля скоростей точек среды был построен плоский треугольный симплекс-элемент с шестью степенями свободы. Процесс нагружения разбивался по времени на конечные отрезки, на каждом из которых из решения системы линейных алгебраических уравнений определяются узловые величины $\boldsymbol{v}$ с учетом граничных условий (9) и (10). Затем производилось интегрирование системы (6), (8) и определялись величины перемещений точек среды $\boldsymbol{u}$, а также меры деформаций и напряжений.

Опыт решения тестовых задач показал, что на качество получаемого решения в наибольшей мере влияет точность определения величины компонент тензора спина $\boldsymbol{\Omega}$ для конкретного состояния системы. При построении матрицы жесткости конечного элемента и при интегрировании поля напряжений использовалось определение (3), дающее наиболее достоверный с вычислительной точки зрения результат.

Алгоритм учета контактного трения. В рамках данной работы рассмотрен частный случай взаимодействия упругого тела с плоскостью $x_2 = 0$. Обобщение на случай штампа произвольной формы может быть получено путем поворота локальной системы координат каждого из граничных конечных элементов. Использование линейных функций форм в виде $v_i(x_1, x_2) = N_{ij}(x_1, x_2)V_j$, $i = 1..3$, $j = [I\, II\, III]$,

$N_{ij}(x_1, x_2) \in L^2$ позволяет естественным образом принять равенства напряжений S_{12}, S_{22} в граничных элементах соответствующим контактным усилиям σ_τ и σ_n:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_\tau = S_{12}\\ \sigma_n = S_{22}\end{array}\right| = const, \quad t = [t_i,\, t_{i+1}] \quad \forall i \in 1..N. \tag{11}$$

Закон Амонтона – Кулона в принятых обозначениях имеет следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{lll} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu\,|\boldsymbol{\sigma}_n| & \Rightarrow & |\boldsymbol{v}_\tau| = 0,\\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu\,|\boldsymbol{\sigma}_n| & \Rightarrow & \boldsymbol{v}_\tau\,|\boldsymbol{\sigma}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau\,|\boldsymbol{v}_\tau| = 0,\end{array}\right. \tag{12}$$

где $\boldsymbol{v}_\tau$ — скорость точек тела в направлении общей касательной с жестким штампом.

Для обеспечения выполнения условий закона (12) используется алгоритм, который в пределах каждого шага нагружения $[t^k,\, t^{k+1}]$ итерационно корректирует абсолютные величины и скорости контактных напряжений. В качестве нулевого приближения $v_{(i)}^{(0)}$, $S_{12(i)}^{(0)}$, $S_{22(i)}^{(0)}$ берется решение задачи теории упругости с принятым условием сцепления $\boldsymbol{v} = 0|_{x\in\Sigma_c}$ контактирующих точек поверхностей в зоне контакта. Процедура интегрирования напряжений $\mathbf{S}_{(i+1)}^{(k)} = \mathbf{S}_{(i)}^{(k)} + \dot{\mathbf{S}}_{(i)}^{(k)}\Delta_t$, где k — номер итерации, i — номер шага нагружения, сопровождается проверкой значений напряжений в контактных элементах по следующей схеме:

$$\begin{array}{l}\left|S_{12(i)}^{(k+1)}\right| \geq \mu\left|S_{22(i)}^{(k+1)}\right| \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\dot{\sigma}_{\tau(i)}^{(k+1)} = \dfrac{\alpha\left|S_{12(i)}^{(k+1)} - S_{12(i)}^{(k)}\right| + (1-\alpha)\mu\left|S_{22(i)}^{(k+1)} - S_{22(i)}^{(k)}\right|}{\Delta_t}\left(-\dfrac{S_{12(i)}^{(k+1)}}{\left|S_{12(i)}^{(k+1)}\right|}\right),\\ \sigma_{\tau(i)}^{(k+1)} = -\dfrac{S_{12(i)}^{(k+1)}}{\left|S_{12(i)}^{(k+1)}\right|}\mu\left|S_{22(i)}^{(k+1)}\right|,\end{array}\right.\\ \left|S_{12(i)}^{(k+1)}\right| < \mu\left|S_{22(i)}^{(k+1)}\right| \quad \Rightarrow \quad v_\tau^{(I)} = v_\tau^{(III)} = 0.\end{array} \tag{13}$$

В зависимости от знака неравенства в каждом граничном элементе на следующей итерации могут приниматься кинематические условия сцепления или статические условия. Параметр $\alpha \in [0,\, 1]$ влияет на скорость сходимости численного решения и подбирается опытным путем. При проведенных вычислениях его значение было принято равным $1/2$.

Решение задач. В общем случае зона контакта деформируемого тела с жесткой поверхностью переменна и подлежит определению. Однако существует класс задач, в которых без существенных ограничений на корректность постановки можно считать зону контакта априори известной и условно постоянной в смысле проведенной дискретизации. Предложенный выше алгоритм отработан на задаче, моделирующей сдвиг упругого бруса по шероховатой плоскости при действии давления на боковую поверхность бруса.

Покоящийся на шероховатой плоскости изотропный прямоугольный брусок сначала осаживается равномерно распределенной нагрузкой $\boldsymbol{q} = \dot{\boldsymbol{q}}t$, где $\dot{\boldsymbol{q}} = -\dot{q}\boldsymbol{e}_2$, $t \in [0,\, t_P]$, а затем при постоянной ее величине на боковую поверхность начинает действовать давление $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{P}}(t - t_P)$, где $\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{p}\boldsymbol{e}_1$, $t \in [t_P,\, t_H]$. Причем при достижении давлением некоторого критического значения может иметь место скольжение всех контактных точек бруса по плоскости как жесткого тела. Поэтому численное решение имеет смысл лишь при ограниченных величинах действующего давления $|\boldsymbol{P}| < \mu\,|\boldsymbol{q}|$, определенных из классических условий равновесия. На грани AB действуют смешанные граничные условия в форме (12).

Решение задачи на первом этапе нагружения позволяет продемонстрировать работу алгоритма в наиболее наглядной форме. На рисунке 1 пунктиром показаны эпюры касательных напряжений в зоне контакта, а сплошными линиями — нормальные напряжения, умноженные на коэффициент трения.

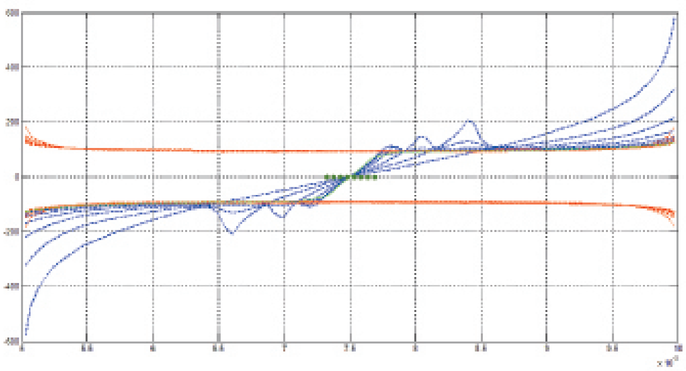
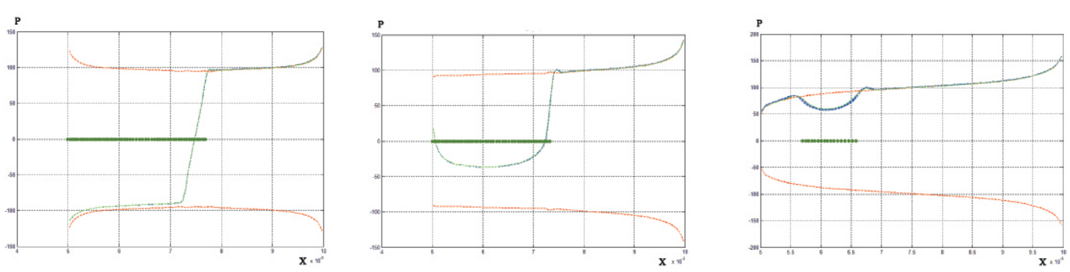


Рис. 1. Работа итерационного алгоритма на первом этапе нагружения

Каждой итерации соответствует кривая для напряжений S_{12} и μS_{22}. Как видно из графика, эпюры нормальных напряжений практически не изменяются по сравнению с нулевым приближением, в то время как сдвиговые напряжения существенно перераспределяются, сходясь к некоторой конечной кривой.

Интерес в этой задаче также представляют эпюры давлений в зоне контакта при нагрузке, близкой к критической, для обеспечения страгивания. На рисунке 2 приведены эпюры касательных и нормальных напряжений в зоне контакта для различных величин действующего давления.



$S_{12}|_{t=t_P+\Delta t/6}$, $\mu S_{22}|_{t=t_P+\Delta t/6}$ $S_{12}|_{t=t_P+\Delta t/2}$, $\mu S_{22}|_{t=t_P+\Delta t/2}$ $S_{12}|_{t=t_P+9\Delta t/10}$, $\mu S_{22}|_{t=t_P+9\Delta t/10}$

Рис. 2. Результаты численного решения на втором этапе нагружения

По приведенным графикам можно проследить также за изменением относительной величины ширины полосы сцепления, показанной жирной линией на оси абсцисс.

Общий случай взаимодействия цилиндрического тела с шероховатой плоскостью предполагает наличие изменяющейся зоны контакта. Рассматривается задача об осаживании половины бесконечно-протяженного цилиндра на абсолютно жесткой плоскости.

Верхняя грань тела нагружена равномерно распределенным давлением $\boldsymbol{q} = -\dot{q}t\boldsymbol{e}_2$, $t \in [0, t_H]$. В начальном состоянии в изотропном теле отсутствуют напряжения $\mathbf{S}|_{t=0} = 0$. На изменяющейся в процессе деформирования полосе контакта принимаются смешанные граничные условия (12), а также условия взаимного непроникновения контактирующих тел $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{AB}|_{x_2=0} = 0$, $\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \boldsymbol{n}_{AB}|_{x_2=0} \geq 0$, где $\boldsymbol{n}_{AB} = \boldsymbol{e}_2$. Для учета данного условия на каждом шаге нагружения предусмотрена возможность дробления отрезка интегрирования. Для этого вводится малый по сравнению с характерным размером контактирующих конечных элементов допуск ε, определяющий «коридор», попав в который, узел сетки может считаться «прилипшим».

Было осуществлено численное решение поставленной задачи для различных значений упругих констант и коэффициента трения. В отсутствие трения возможно сравнить получаемое решение с известным аналитическим решением Герца. На рисунке 3 приведены распределения компоненты S_{22} тензора напряжений в зоне контакта для различных значений действующей нагрузки $\boldsymbol{q}$.

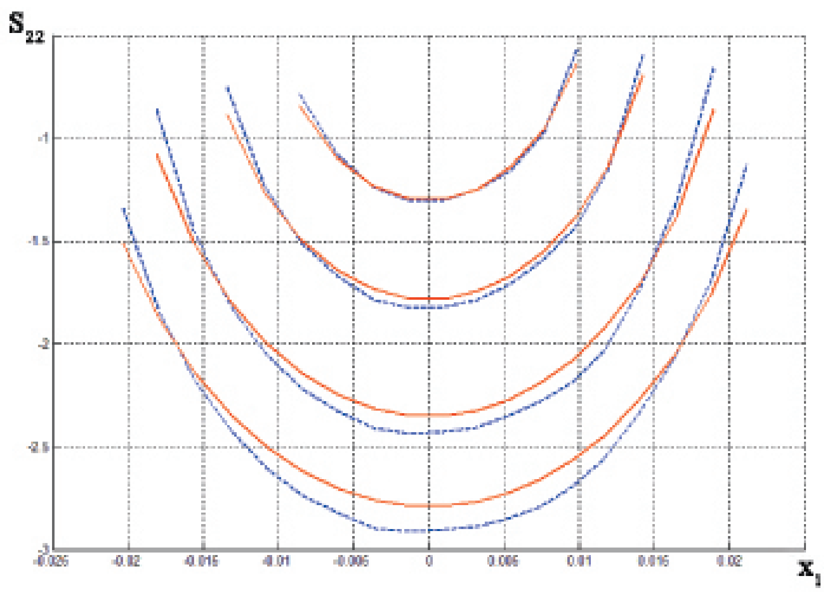


Рис. 3. Эпюра S_{22} в зоне контакта при $\mu = 0$

При малых значениях давления $\boldsymbol{q}$ наблюдается удовлетворительное совпадение численного и аналитического решений. Дальнейший рост нагрузки неизбежно приводит к развитию геометрической нелинейности, учитываемой численным решением. При больших деформациях теория Герца дает существенно заниженные абсолютные значения напряжений.

На рисунке 4 приведены результаты расчетов для трех различных значений коэффициента трения.

Решение представлено в виде зависимости радиуса полосы контакта b, отнесенного к начальному радиусу цилиндра R, от относительной величины действующей нагрузки. Кривая, соответствующая расчету с ненулевым коэффициентом трения, лежит соответственно между кривыми для условий отсутствия трения ($\mu = 0$) и полного прилипания ($\mu = \infty$). Вычисления производились до достижения соотношением b/R величины порядка 0.65, что подразумевает конечность деформаций в зоне контакта. Тем не менее даже при таком уровне деформаций решение с учетом трения мало отличается от решений с другими граничными условиями в зоне контакта.

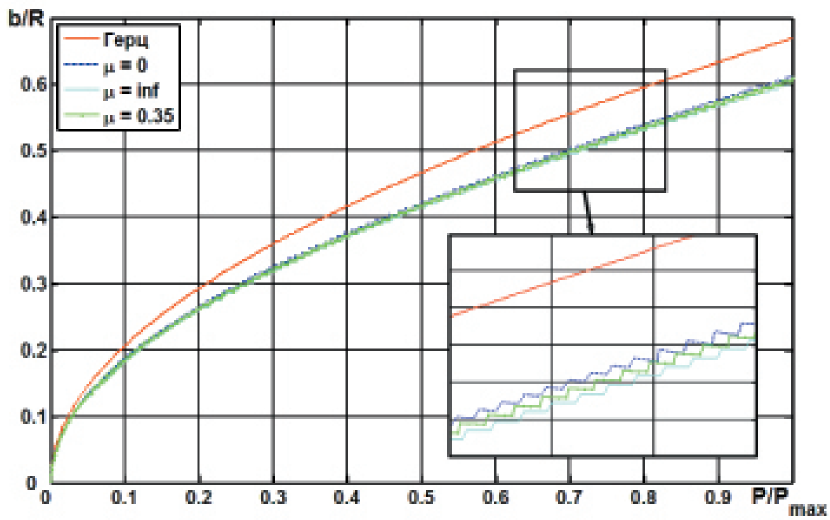
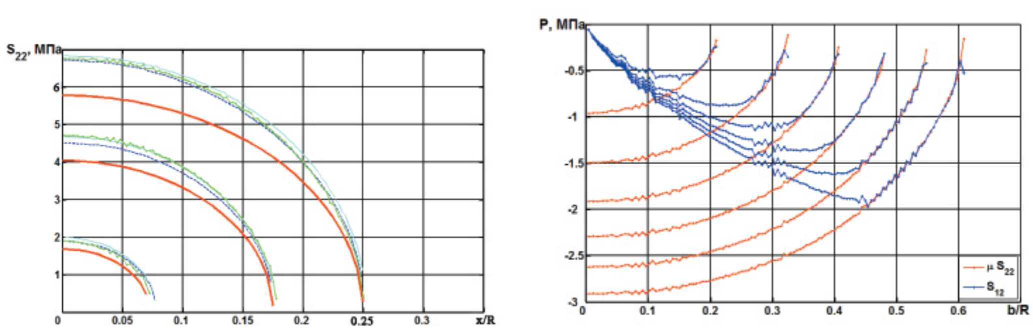


Рис. 4. Величины радиуса полосы контакта для различных значений коэффициента трения



а) б)

Рис. 5. Распределения контактных напряжений

На рисунке 5а приведены распределения нормальных давлений в зоне контакта, а на рисунке 5б – эпюры касательных и нормальных напряжений, умноженных на коэффициент трения.

Рисунок 5б демонстрирует перераспределение сдвиговых напряжений в зоне контакта с ростом нагрузки, а также изменение относительной величины полосы полного прилипания.

Выводы. Применение предложенного алгоритма для решения задач конечного упругого деформирования дает хорошие результаты при использовании неоднородной конечно-элементной дискретизации. В силу использования линейной аппроксимации поля скоростей необходимо сильно измельчать сетку в предполагаемой зоне контакта. Приведенные результаты решения задач в виде эпюр распределения компонент тензора истинных напряжений Коши качественно согласуются с данными, представленными в периодической литературе и полученными при решении аналогичных задач [12], [18]. При достижении сходимости итерационного процесса наблюдается выполнение с заданной точностью требований закона Амонтона – Кулона об ограниченности сдвиговых напряжений в зоне контакта. Решение задачи о взаимодействии цилиндра с жесткой плоскостью показало, что учет трения мало сказывается на величине определяемых радиуса полосы контакта и контактного давления.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бураго Н. Г., Кукуджанов Н. Г. Обзор контактных алгоритмов // Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45–87.

[2] Ворович И. И., Александров В. М. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.

[3] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

[4] Давыдов В. С., Чумаченко Е. Н. Метод реализации модели контактного взаимодействия в МКЭ при решении задач о формоизменении сплошных сред // Механика твердого тела. 2000. № 4. С. 53–63.

[5] Кравчук А. С. О решении трехмерных контактных задач с трением // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 485–496.

[6] Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюзн. межвуз. сб. Горький, 1987. С. 32–37.

[7] Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Процессы упругопластического конечного деформирования. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 374 с.

[8] Станкевич И. В., Яковлев М. Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2011. Спец. вып.: Прикладная математика. С. 134–141.

[9] Черепанов Г. П. Контактная задача математической теории упругости с зонами сцепления и скольжения. Теория качения и трибология // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 1. С. 112–143.

[10] Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.

[11] Chandrasekaran N., Haisler W. E., Goforth R. E. A finite element solution method for contact problems with friction // International journal for numerical methods in engineering. 1987. Vol. 24. P. 477–495.

[12] Dintwa E., Tifskens E., Ramon H. On the accuracy of the Hertz model to describe the normal contact of soft elastic spheres // Granular matter. 2008. Vol. 10. P. 209–221.

[13] Guo H., Shah M., Spilker R. L. A finite element implementation for biphasic contact of hydrated porous media under finite deformation and sliding // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine. 2014. Vol. 228(3). P. 225–236.

[14] Jang Jae-Won, Hyung-Kyu Kim, Soon-Bok Lee Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 82. P. 39–46.

[15] McDevitt T. W., Laursen T. A. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000. Vol. 48. P. 1525–1547.

[16] Morev P. G. A variational statement of quasistatic «rigid-deformable» contact problems at large strain involving generalized forces and friction // Acta Mechanica. 2011. № 222. P. 115–130.

[17] Pantuso D., Bathe Klaus-Jurgen, Bouzinov P. A. A finite element procedure for the analysis of thermomechanical solids in contact // Computers and Structures. 2000. Vol. 75. P. 551–573.

[18] Wriggers P., Vu Van T., Stein E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction // Computers & Structures. 1990. Vol. 37. № 3. P. 319–331.

[19] Xiaoming G., Roulei Z., Yingle S. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 38. P. 8133–8150.

[20] Xydas N., Kao I. Modeling of contact mechanics and friction limit for soft fingers in robotics, with experimental results // The International Journal of Robotics Research. 1999. Vol. 18. № 9. P. 941–950.

Y. V. Astapov, A. A. Markin

FINITE DEFORMATIONS OF THE ELASTIC BODIES UNDER THE INTERACTION WITH THE RIGID ROUGH PLANE

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The finite deformations problem of hypoelestic bodies has been presented using variational condition of the equilibrium course of the process of deformation. Contact friction was considered in a form of the Amontons – Coulomb's law. The variant of an iterative algorithm to take into account tangential stresses in contact zone is proposed. Current work contains the results of numerical solution of a problem about the calculation of the stress-strained state of the cylindrical bodies under the interaction with the rigid plane. The results of solution are in qualitatively agreement with the common data from literature.

Keywords: finite deformations, plane problems, equilibrium course of the process, elasticity, generalized Yaumann derivative, Amontons – Coulomb's law.

REFERENCES

[1] Bourago N. G., Kukudzhanov V. N. A review of contact algorithms // Russian Academy of Sciences tidings. Mechanics of Solids. 2005. № 1. P. 45–87. (in Russian).

[2] Vorovich I. I., Aleksandrov V. M. Mechanics of contact interactions. Moscow.: FizMatLit, 2001. 672 p. (in Russian).

[3] Goryacheva I. G. Mechanics of friction interaction. M.: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian).

[4] Davidov V. S., Chumachenko E. N. The method of realization of contact interaction model for FEM during solving the problem of media forming // Mechanics of Solids. 2000. № 4. P. 53–63. (in Russian).

[5] Kravchuk A. S. Solution of the three-dimensional friction contact problems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. Vol. 72. № 3. P. 485–496. (in Russian).

[6] Markin A. A., Tolokonnikov L. A. Measures and constitutive equations for finite elastoplastic deformations // Applied problems of strength and plasticity. Methods for solving: All-union interuniversity digest. Gorky, 1987. P. 32–37. (in Russian).

[7] Markin A. A., Sokolova M. Yu., Khristich D. V. Processes of elastoplastic finite deformations. Tula: TSU publishing office, 2011. 374 p. (in Russian).

[8] Stankevich I. V., Yakovlev M. Ye., Si Tu Khet. Development of Contact Interaction Algorithm on the Basis of Schwarz Alternating Method // The Bauman Moscow State Technical University tildings. Natural sciences series. 2011. Special issue. Applied mathematics. P. 134–141. (in Russian).

Astapov Yuri Vladimirovich

`e-mail:` ast3x3@gmail.com, undergraduate of the Mathematical Modeling department, Tula State University, Tula, Russia.

Markin Alexey Alexandrovich

`e-mail:` markin-nikram@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, head of the Mathematical Modeling department, Tula State University, Tula, Russia.

[9] Cherepanov G. P. The contact problem of the mathematical theory of elasticity with stick and slip zones. The theory of rolling. Tribology // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. Vol. 79. № 1. P. 112–143. (in Russian).

[10] Chernykh K. F. Introduction to anisotropic elasticity. Moscow: Nauka, 1988. 192 p. (in Russian).

[11] Chandrasekaran N., Haisler W. E., Goforth R. E. A finite element solution method for contact problems with friction // International journal for numerical methods in engineering. 1987. Vol. 24. P. 477–495.

[12] Dintwa E., Tifskens E., Ramon H. On the accuracy of the Hertz model to describe the normal contact of soft elastic spheres // Granular matter. 2008. Vol. 10. P. 209–221.

[13] Guo H., Shah M., Spilker R. L. A finite element implementation for biphasic contact of hydrated porous media under finite deformation and sliding // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine. 2014. Vol. 228(3). P. 225–236.

[14] Jang Jae-Won, Hyung-Kyu Kim, Soon-Bok Lee Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 82. P. 39–46.

[15] McDevitt T. W., Laursen T. A. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000. Vol. 48. P. 1525–1547.

[16] Morev P.G. A variational statement of quasistatic «rigid-deformable» contact problems at large strain involving generalized forces and friction // Acta Mechanica. 2011. № 222. P. 115–130.

[17] Pantuso D., Bathe Klaus-Jurgen, Bouzinov P. A. A finite element procedure for the analysis of thermomechanical solids in contact // Computers and Structures. 2000. Vol. 75. P. 551–573.

[18] Wriggers P., Vu Van T., Stein E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction // Computers&Structures. 1990. Vol. 37. № 3. P. 319–331.

[19] Xiaoming G., Roulei Z., Yingle S. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 38. P. 8133–8150.

[20] Xydas N., Kao I. Modeling of contact mechanics and friction limit for soft fingers in robotics, with experimental results // The International Journal of Robotics Research. 1999. Vol. 18. № 9. P. 941–950.