

Ю. В. Немировский

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ТАВРОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫМ ДЕФОРМАЦИЯМ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. Сформулированы и решены задачи оптимального проектирования гибридных тавровых композитных балок по требованию достижения предельно допустимых упругих или пластических деформаций. Рассмотрены слоистые композитные конструкции. В качестве критерия эквивалентности сравнимых проектов используется требование равенства весов. В качестве предельно допустимых условий эксплуатации упругих конструкций рассматриваются уровни амплитуд нагрузок, при которых впервые достигается предел упругости соответствующего материала. В качестве предельно допустимых пластических деформаций используются деформации соответствующие пределу прочности данного материала. Для решения пластической задачи используется модель жестко-пластического тела.

Ключевые слова: гибридные, слоистые, тавровые балки, вес конструкции, предельные нагрузки, упругие и пластические материалы, предел упругости, предельно допустимые деформации, оптимальное проектирование.

УДК: 536.21

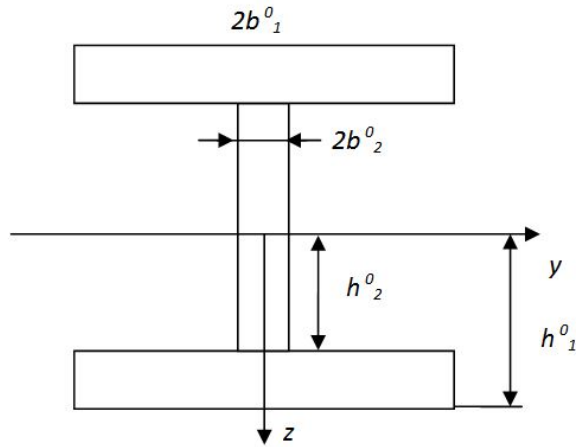
Однотавровые и двутавровые конструктивные элементы широко используются в качестве несущих элементов в изделиях авиационной, судостроительной, машиностроительной техники и в строительной индустрии. В последние годы с целью улучшения эксплуатационных качеств создаются слоистые и слоисто-волокнистые (гибридные) конструкции при использовании разнообразных технологий склейки, сварки, напылений [1], [2]. Конечной целью реализации всех этих процессов является создание конструкции с максимально улучшенными эксплуатационными качествами. Для решения этой задачи будем рассматривать в сравнении традиционные двутавровые (фиг. 1) и однотавровые (фиг. 2) конструкции из однородных материалов и проектируемые гибридные конструкции (фиг. 3, фиг. 4), составленные из различных материалов.

© Немировский Ю. В., 2016
Немировский Юрий Николаевич

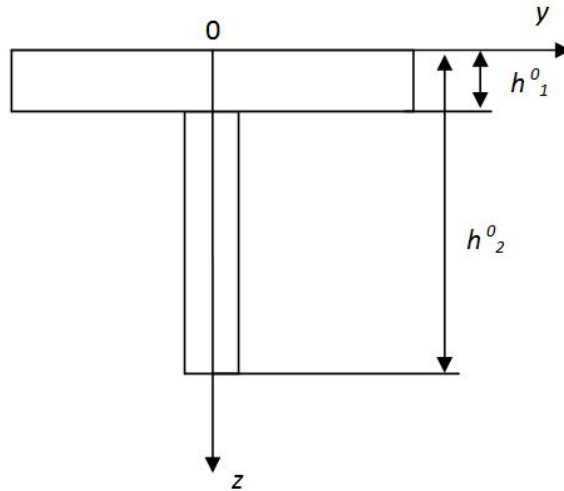
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102).

Поступила 12.01.2016



Фиг. 1



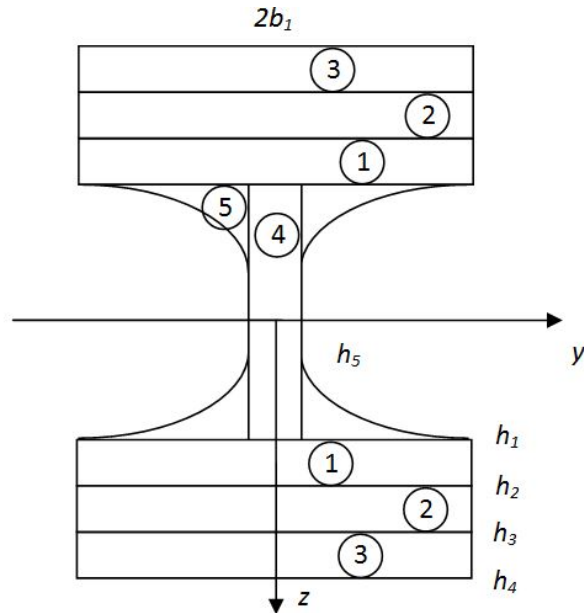
Фиг. 2

В качестве критерия эквивалентности сравниваемых проектов будем использовать равенство весов. Тогда для двутавровых проектов будем иметь равенство:

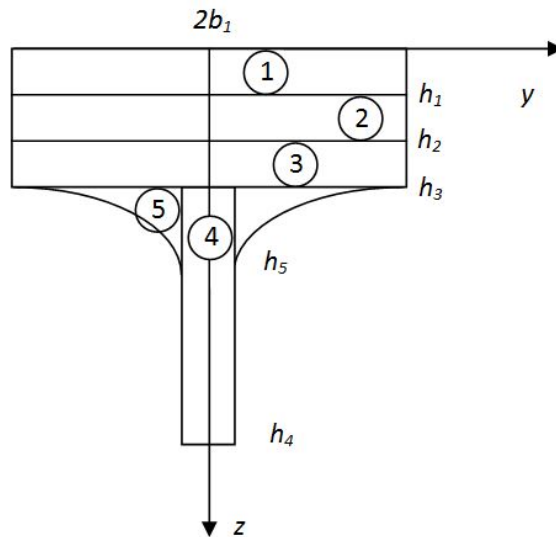
$$b_1 \cdot \sum_{i=1}^3 \rho_i \cdot (h_{i+1} - h_i) + b_2 \cdot \rho_4 \cdot h_1 + \rho_5 \cdot \left[\frac{(h_1^{\alpha_5+1} - h_5^{\alpha_5+1})}{\alpha_5 + 1} + (h_1 - h_5) \cdot h_1^{\alpha_5} \right] = b_1^0 \cdot (h_1^0 - h_2^0) + b_2^0 \cdot h_2^0 \quad (1)$$

и для однотоутовых проектов:

$$b_1 \cdot \sum \rho_i \cdot (h_{i+1} - h_i) + b_2 \cdot \rho_4 \cdot (h_4 - h_3) + \rho_5 \cdot \left[\frac{(h_5^{\alpha_5+1} - h_3^{\alpha_5+1})}{\alpha_5 + 1} + (h_5 - h_1) \cdot h_5^{\alpha_5} \right] = \\ = \rho^0 \cdot [b_1^0 \cdot h_1^0 + b_2^0 \cdot (h_2^0 - h_1^0)] \quad (2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь $\rho^0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_5$ – удельные веса материалов, $\alpha_5 \geq 0$.

В качестве предельно допустимых условий эксплуатации упругих конструкций рассматриваются уровни амплитуд, нагрузок, при которых впервые достигается предел текучести соответствующего материала. В качестве предельно допустимых пластических деформаций используются деформации возникающие при достижении предела прочности соответствующего материала. Для решения пластической задачи используется модель жестко-пластического тела с двумя аппроксимациями пластической части диаграммы деформирования [3], [4].

1. Линейное упрочнение

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \text{sign}(\varepsilon) + K \cdot \varepsilon, \quad K = \frac{\sigma_* - \sigma_0}{\varepsilon_*}. \quad (3)$$

2. Параболическое упрочнение

$$\sigma = (\sigma_0 + K_2 \cdot \varepsilon^2) \cdot \text{sign}(\varepsilon) + K_1 \cdot \varepsilon \quad (4)$$

$$K_1 = \frac{2(\sigma_* - \sigma_0)}{\varepsilon_*}, \quad K_2 = -\frac{\sigma_* - \sigma_0}{\varepsilon_*}. \quad (5)$$

Здесь σ_0 , σ_* – предел текучести и предел прочности материала, ε_* – предельная пластическая деформация.

Использование аппроксимаций (3), (4) позволят в рамках единого подхода построить балки оптимальных пластических проектов из различных наборов материалов.

Рассмотрим сначала упругие двутавровые балки. Изгибающий момент эталонной балки связан с кривизной χ следующей зависимостью:

$$M^0 = A_0 \cdot \chi, \quad A_0 = 2 \cdot E^0 \cdot [b_1 \cdot (h_1^0)^2 - (b_1 - b_2) \cdot (h_2^0)^2]$$

и предельный упругий момент для эталонной балки будет равен:

$$M_0^0 = \frac{A_0 \cdot \varepsilon_0^0}{h_1^0}, \quad \varepsilon_0^0 = \frac{\sigma_0^0}{E^0},$$

σ_0^0 , E^0 – предел текучести и модуль упругости эталонного материала.

Изгибающий момент гибридной упругой двутавровой балки будет равен

$$M = A \cdot \chi$$

$$A = 2 \cdot \left\{ b_1 \cdot \sum_{i=1}^3 E_i \cdot (h_{i+1}^2 - h_i^2) + E_4 \cdot b_2 \cdot h_1^2 + 2 \cdot E_5 \cdot \left[\frac{(h_1^{\alpha_5+2} - h_5^{\alpha_5+2})}{\alpha_5+2} - \frac{(h_1^2 - h_5^2) \cdot h_1^{\alpha_5}}{2} \right] \right\} \quad (6)$$

и предельный упругий момент гибридной двутавровой балки будет равен

$$M_0 = \frac{A \cdot \varepsilon_3^0}{h_4}, \quad (7)$$

при этом выполняются равенства:

$$h_3 = \frac{\varepsilon_2^0}{\varepsilon_3^0} \cdot h_4, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon_3^0} \cdot h_4, \quad h_1 = \frac{\varepsilon_4^0}{\varepsilon_3^0} \cdot h_4, \quad h_5 = \beta_5 \cdot h_1, \quad (\beta_5 < 1). \quad (8)$$

В упругом состоянии изгибающие моменты пропорциональны амплитудам действующих нагрузок. Поэтому отношение предельных упругих нагрузок гибридной и эталонной конструкции при одинаковом характере нагружения будет равно отношению предельных упругих моментов. Таким образом, задача сводится к отысканию максимума отношения

$$F_1 = \frac{M_0}{M_0^0} = \frac{A \cdot \varepsilon_3^0 \cdot h_1^0}{A_0 \cdot \varepsilon_0^0 \cdot h_4} \quad (9)$$

при условии, что варьируемые параметры сечения гибридной конструкции подчиняются дополнительным условиям (1) и (3).

При поперечном изгибе изображенной на фиг. 2 эталонной одноставровой упругой балки связь изгибающего момента с кривизной будет иметь вид:

$$M = C^0 \cdot \chi, \quad C^0 = a_{22}^0 - \frac{(a_{12}^0)^2}{a_{11}^0}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^0 &= 2 \cdot E^0 \cdot [b_1^0 \cdot h_1^0 + b_2^0 \cdot (h_2^0 - h_1^0)], \\ a_{12}^0 &= E^0 \cdot [b_1^0 \cdot (h_1^0)^2 + b_2^0 \cdot ((h_2^0)^2 - (h_1^0)^2)], \\ a_{22}^0 &= \frac{2 \cdot E^0}{3} \cdot [b_1^0 \cdot (h_1^0)^3 + b_2^0 \cdot ((h_2^0)^3 - (h_1^0)^3)]. \end{aligned}$$

А деформация e_0 на отсчетной линии $z = 0$ вследствие отсутствия продольного усилия ($N = 0$) будет равна:

$$e_0(x) = -\frac{a_{12}^0}{a_{11}^0} \cdot \chi(x). \quad (11)$$

На линии $z = h_2^0$ деформация будет равна:

$$\varepsilon(h_2) = \left(h_2^0 - \frac{a_{12}^0}{a_{11}^0} \right) \cdot \chi. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\frac{|\varepsilon(0)|}{\varepsilon(h_2^0)} = \left[1 + \left(\frac{b_1^0}{b_2^0} - 1 \right) \cdot \left(\frac{h_1^0}{h_2^0} \right)^2 \right] \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{b_1^0}{b_2^0} - 1 \right) \cdot \frac{h_1^0}{h_2^0} + \left(\frac{b_1^0}{b_2^0} - 1 \right) \cdot \left(\frac{h_1^0}{h_2^0} \right)^2 - 1 \right]^{-1}.$$

Из этого выражения видно, что если параметры эталонного сечения удовлетворяют неравенству (чаще всего реализуемому на практике):

$$\frac{b_1^0}{b_2^0} \geq 1 + \frac{h_2^0}{h_1^0}, \quad (13)$$

то наибольшая в сечении упругая деформация достигается при $z = h_2^0$. В этом случае:

$$\chi = \chi_0 = \frac{\varepsilon_0^0 \cdot a_{11}^0}{(a_{11}^0 h_2^0 - a_{12}^0)},$$

и тогда предельный упругий момент для эталонной балки будет равен

$$M_0^0 = C^0 \frac{a_{11}^0 \varepsilon_0^0}{(a_{11}^0 h_2^0 - a_{12}^0)}. \quad (14)$$

Для гибридной одноставровой балки (фиг. 4) выражение для продольного усилия N и изгибающего момента M , при упругом деформировании имеет вид:

$$N = a_{11} e_0 + a_{12} \chi, \quad M = a_{12} e_0 + a_{22} \chi, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2 \left\{ b_1 \sum_{i=1}^3 E_i (h_i - h_{i-1}) + b_4 E_4 (h_4 - h_3) - \right. \\
&\quad \left. - E_5 \frac{(b_1 - b_4)}{(b_5^{\alpha_5} - h_3^{\alpha_5})} \left[\frac{(h_5^{\alpha_5+1} - h_3^{\alpha_5+1})}{(\alpha_5+1)} - h_3^{\alpha_5} (h_5 - h_3) \right] \right\} \\
a_{12} &= \left\{ b_1 \sum_{i=1}^3 (h_i^2 - h_{i-1}^2) + b_4 E_4 (h_4^2 - h_3^2) - E_5 \frac{(b_1 - b_4)}{h_5^{\alpha_5} - h_3^{\alpha_5}} \left[\frac{(h_5^{\alpha_5+2} - h_3^{\alpha_5+2})}{\alpha_5+2} - \frac{h_3^{\alpha_5} (h_5^2 - h_3^2)}{2} \right] \right\} \\
a_{22} &= \frac{2}{3} \left\{ \sum_{i=1}^3 E_i (h_i^3 - h_{i-1}^3) + b_4 E_4 (h_4^3 - h_3^3) - E_5 \frac{(b_1 - b_4)}{(h_5^{\alpha_5} - h_3^{\alpha_5})} \left[\frac{h_5^{\alpha_5+3} - h_3^{\alpha_5+3}}{(\alpha_5+3)} - \frac{h_3^{\alpha_5} (h_5^3 - h_3^3)}{3} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

При поперечном изгибе $N = 0$ будем иметь:

$$M = C\chi, \quad C = \alpha_{22} - \frac{a_{11}^2}{a_{12}} \tag{17}$$

$$e_0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\chi. \tag{18}$$

Предельное упругое состояние будет достигнуто при выполнении равенств:

$$\chi_0 = \frac{a_{12}}{a_{11}}\varepsilon_{01}, \quad h_1\chi_0 = \varepsilon_{01} - \varepsilon_{02},$$

$$h_2\chi_0 = \varepsilon_{01} - \varepsilon_{03}, \quad h_3\chi_0 = \varepsilon_{01} - \varepsilon_{05} \tag{19}$$

$$h_4\chi_0 = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{01} - \varepsilon_{04}.$$

Предельный упругий изгибающий момент для гибридной однотавровой балки будет равен:

$$M_0 = C \frac{a_{11}}{a_{12}} \varepsilon_{01}, \tag{20}$$

и вследствие равенств (19) будем иметь:

$$h_4 = \left(1 + \frac{\varepsilon_{04}}{\varepsilon_{01}} \right) \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad h_3 = \frac{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{05})}{(\varepsilon_{01} + \varepsilon_{04})} h_4, \quad h_2 = \frac{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{03})}{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{04})} h_4, \quad h_1 = \frac{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{02})}{(\varepsilon_{01} - \varepsilon_{04})} h_4. \tag{21}$$

Таким образом, в этом случае задача сводится к отысканию максимума функции:

$$F_2 = \frac{M_0}{M_0^0} = \frac{C a_{11} \varepsilon_{01} (a_{12}^0 h_2^0 - a_{12}^0)}{a_{12} C^0 a_{11}^0 \varepsilon_0^0} \tag{22}$$

при условии, что параметры проектируемых сечений связаны дополнительными соотношениями (2) и (21).

Если в качестве предельно допустимых условий эксплуатации используются требования достижения предельных деформаций (возможно с некоторым коэффициентом

запаса) для соответствующих пластических материалов, то при решении рассматриваемых задач оптимизации упругими деформациями можно пренебречь и воспользоваться моделью жесткопластического материала с единой аппроксимацией пластической части пластической диаграммы деформирования материалов в виде зависимостей (4) с различными коэффициентами σ_0 , K_{1i} , K_{2i} ($i=1,2,\dots$) для разных материалов. При этом, если m -й материал будет идеально пластическим, то для него в последующих формулах следует принять $K_{1m} = K_{2m} = 0$. Если m -й материал будет линейно-упрочняющимся, то следует принять $K_{1m} = K_m$, $K_2 = 0$ и для K_m использовать выражение из (3).

В таком случае предельный изгибающий момент M^* для двутавровой эталонной балки будет равен:

$$M_0^* = d_{11}^0 + d_{12}^0 \chi_0^* + d_{13}^0 (\chi_0^*)^2, \quad \chi_0^* = \frac{\varepsilon_0^*}{h_1^0}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11}^0 &= 2 \left[b_1^0 (h_1^{02} - h_2^{02}) + b_2^0 h_2^{02} \right] \sigma_0^0, \\ d_{12}^0 &= \frac{2}{3} \left[b_1^0 (h_1^{03} - h_2^{03}) + b_2^0 h_2^{03} \right] K_1^0, \\ d_{13}^0 &= \left[b_1^0 (h_1^{04} - h_2^{04}) + b_2^0 h_2^{04} \right] K_2^0 \end{aligned} \quad (24)$$

и для гибридной двутавровой балки

$$M^* = d_{11} + d_{12} \chi^* + d_{13} (\chi^*)^2, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= 2 \left\{ b_1 \sum_{i=1}^3 \sigma_{0i} (h_{i+1}^2 - h_i^2) + b \sigma_{04} h_1^2 + 2 \sigma_{05} \frac{(b_1 - b_2)}{(h_1^{\alpha_5} - h_5^{\alpha_5})} \left[\frac{h_1^{\alpha_5+2} - h_5^{\alpha_5+2}}{(\alpha_5+2)} - h_5^{\alpha_5} \frac{(h_1^2 - h_5^2)}{2} \right] \right\}, \\ d_{12} &= \frac{1}{3} \left\{ \left[b_1 \sum_{i=1}^3 K_{1i} (h_{i+1}^3 - h_i^3) \right] + b_2 K_{14} h_1^3 + \right. \\ &\quad \left. 3 K_{15} \frac{(b_1 - b_2)}{(h_1^{\alpha_5} - h_5^{\alpha_5})} \left[\frac{(h_1^{\alpha_5+3} - h_5^{\alpha_5+3})}{(\alpha_5+3)} - h_5^{\alpha_5} \frac{(h_1^3 - h_5^3)}{3} \right] \right\}, \\ d_{13} &= b_1 \left[\sum_{i=1}^3 K_{2i} (h_{i+1}^4 - h_i^4) \right] + b_2 K_{24} h_1^4 + 4 K_{15} \frac{(b_1 - b_2)}{(h_1^{\alpha_5} - h_5^{\alpha_5})} \left[\frac{(h_1^{\alpha_5+4} - h_5^{\alpha_5+4})}{(\alpha_5+4)} - h_5^{\alpha_5} \frac{(h_1^4 - h_5^4)}{4} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

В предельном по деформациям пластическом состоянии предельный изгибающий момент $M^* = M(\chi^*)$ и параметры χ^* , h_1 , h_2 , h_3 , h_4 связаны с χ^* зависимостями:

$$\chi^* h_4 = \varepsilon_3^*, \quad \chi^* h_3 = \varepsilon_2^*, \quad \chi^* h_2 = \varepsilon_1^*, \quad \chi^* h_1 = \varepsilon_4^*. \quad (27)$$

Задача оптимизации сводится в этом случае к поиску максимума параметрической функции $F_3 = \frac{M^*}{M_0^*}$ при условии, что параметры проектируемого сечения подчиняются соотношениям (1) и (27). Аналогичным образом, вычисляя соответствующие значения предельных моментов для эталонных и проектируемых однитавровых балок можно получить для них решение оптимизационной задачи. Мы не станем здесь выписывать соответствующие выражения для предельных моментов из-за их громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Король В. К., Гильденгорн М. С.. Основы производства многослойных металлов. М.: Металлургия, 1978. 237 с.
- [2] Дерибас А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1972. 188 с.
- [3] Немировский Ю. В. Динамический изгиб армированных пластических стержней. – Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1979. Вып. 41. С. 37–44.
- [4] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159.

Yu. V. Nemirovskii

OPTIMUM DESIGN OF HYBRID STRUCTURES TEE ON MAXIMUM PERMISSIBLE DEFORMATION

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Abstract. Formulated and solved the problem of optimal design of hybrid composite T-beam as required to achieve the maximum allowable elastic and plastic deformations. Considered layered composite structures. As a criterion for the equivalence of comparable projects and used the demand for equality of weights. As the maximum permissible operating conditions of elastic structures are considered stress levels amplitudes at which the limit of elasticity of the respective material is achieved for the first time. As the maximum allowable plastic deformation using the strain corresponding to the ultimate strength of the material. To solve the problem, a plastic model of a rigid-plastic body.

Keywords: hybrid, layered, T-bars, structural weight, load limits, elastic and plastic materials, elastic limit, the maximum allowable strain, optimal design.

REFERENCES

- [1] Korol' V. K., Gil'dengorn M. S. Osnovy proizvodstva mnogoslojnyh metallov. M.: Metallurgija, 1978. 237 s. (in Russian).
- [2] Deribas A. A. Fizika uprochnenija i svarki vzryvom. Novosibirsk: Nauka, 1972. 188 s. (in Russian).
- [3] Nemirovskij Ju. V. Dinamicheskij izgib armirovannyh plasticheskikh sterzhnej. – Dinamika sploshnoj sredy. Novosibirsk: Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1979. Vyp. 41. S. 37–44. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

- [4] Nemirovskij Ju. V. Vtoroe predel'noe sostojanie odnorodnyh i kompozitnyh balok // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2009. № 1. S. 150–159. (in Russian).