

М. Д. Коваленко¹, Д. А. Аbruков²

ИЗГИБ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ДЛИННЫМ СТОРОНАМ ПОЛУПОЛОСЫ, НА ТОРЦЕ КОТОРОЙ ЗАДАН ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

¹ *Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики
Российской академии наук, г. Москва, Россия*

² *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба полуполосы с защемленными длинными сторонами, на торце задан изгибающий момент. Решение представляется в рядах по функциям Фадля – Папковича. Искомые коэффициенты ряда находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

Ключевые слова: изгиб пластины, изгиб полуполосы, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+624.073

Введение. В работах [1]–[3] изучались свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в обычном смысле [1]. Поэтому разложения по ним невозможно построить, опираясь на классический аппарат теории базиса функций [4]. Решению краевой задачи предшествует изучение так называемых разложений Лагранжа [1]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлона – Рибьера. Аналогичная ситуация

© Коваленко М. Д., Аbruков Д. А., 2016

Коваленко Михаил Денисович

e-mail: kov08@inbox.ru, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

Аbruков Денис Александрович

e-mail: AbrukovDA@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-41-02-644 р_поволжье_а.

Поступила 12.03.2016

имеет место и в задаче изгиба тонких прямоугольных пластин, а также ее частного случая – изгиба полуполосы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим пластину, отнесенную к декартовым координатам x, y . Дифференциальные уравнения равновесия можно записать в виде [5]

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P(x, y), \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x(x, y), \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $P(x, y)$ – произвольная поперечная нагрузка, Q_x, Q_y – перерезывающие силы, M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты.

Моменты и углы поворота Φ_x, Φ_y можно выразить через прогиб $w = w(x, y)$:

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy}(x, y) &= -M_{yx}(x, y) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \Phi_x(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ν – коэффициент Пуассона, а

$$D = \frac{E\rho^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины (E – модуль упругости, ρ – толщина пластины).

Кроме того,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (1.3)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа на плоскости.

Подставляя выражения (1.3) в первое из уравнений (1.1), получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = P(x, y). \quad (1.4)$$

Помимо обычных сил Q_x, Q_y вводятся также обобщенные в смысле Кирхгоффа перерезывающие силы

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем строить решение, пользуясь методом начальных функций [6], позволяющим эффективно получать выражения для функций Фадля – Папковича. Основные соотношения метода имеют вид

$$\begin{aligned} W(x, y) &= L_{WW}(y)W_0(x) + L_{W\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{WM}(y)M_0(x) + L_{WQ}(y)Q_0(x), \\ \Phi_y(x, y) &= L_{\Phi W}(y)W_0(x) + L_{\Phi\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{\Phi M}(y)M_0(x) + L_{\Phi Q}(y)Q_0(x), \\ M_y(x, y) &= L_{MW}(y)W_0(x) + L_{M\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{MM}(y)M_0(x) + L_{MQ}(y)Q_0(x), \\ K_y(x, y) &= L_{QW}(y)W_0(x) + L_{Q\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{QM}(y)M_0(x) + L_{QQ}(y)Q_0(x), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $L_{WW}(h)$, $L_{WM}(h)$ и т. д. – операторы метода начальных функций (см. [6]). Функции $W(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $K_y(x, y)$, определенные при $y = 0$,

$$\begin{aligned} W_0(x) &= Dw(x, 0), & \Phi_0(x) &= \frac{\partial W(x, 0)}{\partial y}, \\ M_0(x) &= M_y(x, 0), & Q_0(x) &= K_y(x, 0), \end{aligned} \quad (1.7)$$

называются начальными. Зная начальные функции, по формулам (1.6), (1.7) можно найти основные факторы.

Рассмотрим полуполосу $\{ \Pi : |x| \geq 0, |y| \leq h \}$ шириной $2h$ с заземленными краями $y = \pm h$:

$$W(x, \pm h) = \Phi_y(x, \pm h) = 0 \quad (1.8)$$

и с некоторыми граничными условиями на торце $x = 0$.

С помощью формул (1.6) удовлетворим граничным условиям (1.8), которые примут вид:

$$\begin{aligned} L_{\Phi W}(\alpha, h)W_0(x) + L_{\Phi M}(\alpha, h)M_0(x) &= 0, \\ L_{WW}(\alpha, h)W_0(x) + L_{WM}(\alpha, h)M_0(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $W_0(x) = Dw(x, 0)$, $M_0(x) = M_y(x, 0)$ – начальные функции, определенные при $y = 0$, $\alpha = d/dx$ – оператор дифференцирования.

Введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$W_0(x) = -L_{\Phi M}(\alpha, h)F(x), \quad M_0(x) = L_{\Phi W}(\alpha, h)F(x). \quad (1.10)$$

При этом первое из уравнений (1.9) будет тождественно удовлетворено, а второе примет вид

$$[L_{WM}(\alpha, h)L_{\Phi W}(\alpha, h) - L_{WW}(\alpha, h)L_{\Phi M}(\alpha, h)] F(x) = 0. \quad (1.11)$$

Раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\left(\frac{2\alpha h + \sin 2\alpha h}{4\alpha} \right) F(x) = 0. \quad (1.12)$$

Будем искать его решение в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.11), получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$\frac{L(\lambda, h)}{\lambda} = 0, \quad (1.14)$$

$$L(\lambda, h) = \frac{1}{4} (2\lambda h + \sin 2\lambda h). \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) имеет бесконечное множество комплексных корней $\{ \pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k \} = \Lambda$, $k = 1, 2, \dots$. Ниже для иллюстрации приведены значения пяти корней уравнения (1.15) при $h = 1$, $\nu = \frac{1}{3}$, принадлежащих первой координатной четверти (табл. 1).

Для определения точных значений λ_k можно воспользоваться асимптотической формулой

$$\lambda_k \approx \frac{1}{h} \left[k\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(4k\pi - \pi)}{4k\pi} \right] + i \frac{1}{h} \left[\frac{\ln(4k\pi)}{2} - \frac{\ln(4k\pi - \pi)}{4k\pi} \right].$$

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	2.10619611524533	1.12536430580093
2	5.356268698639631	1.551574372912625
3	8.536682426575915	1.77554367351104
4	11.69917761282565	1.929404496552787
5	14.85405991263802	2.046852462382667

Итак, решение уравнения (1.11) имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k e^{\bar{\lambda}_k x} \right) \quad (\lambda_k \in \Lambda). \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в формулы (1.9), найдем начальные функции, а затем по формулам (1.6) – прогиб, углы поворота и моменты ($Re\lambda_k < 0$, $W(x, y) = Dw(x, y)$):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \omega(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \bar{\lambda}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_y(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \varphi_y(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_y(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_y(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y, h) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(\lambda_k, y, h) &= \frac{1}{2} [\lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + (\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y]; \\ \varphi_x(\lambda_k, y, h) &= \frac{\lambda_k}{2} \{ \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + (\sin \lambda_k h + \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y \}; \\ \varphi_y(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^2}{2} [h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y]; \\ m_x(\lambda_k, y, h) &= \frac{\lambda_k^2}{2} \{ (\nu - 1) \lambda_k \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y - \\ &- [(\nu + 1) \sin \lambda_k h - (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h] \cos \lambda_k y \}; \\ m_y(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^2}{2} ((\nu - 1) \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y + \\ &+ [(\nu + 1) \sin \lambda_k h + (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h] \cos \lambda_k y); \\ m_{xy}(\lambda_k, y, h) &= -\frac{\lambda_k^3}{2} (\nu - 1) \{ h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \} \end{aligned} \quad (1.18)$$

– функции Фадля – Папковича.

Функции (1.18) назовем s -представлением функций Фадля – Папковича. Если же разрешающую функцию $F(x)$ вводить по формулам:

$$W_0(x) = -L_{WM}(\alpha, h)F(x), \quad M_0(x) = L_{WW}(\alpha, h)F(x), \quad (1.19)$$

то получим другие выражения для функций Фадля – Папковича, которые назовем s -представлением функций Фадля – Папковича.

На продольных границах $y = \pm h$ полуполосы граничные условия (1.8) удовлетворяются автоматически. Удовлетворяя с помощью выражений (1.17) граничным условиям, заданным на торце полуполосы $x = 0$, приходим к задаче определения коэффициентов A_k, \bar{A}_k из двух разложений по двум системам функций Фадля-Папковича, например:

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y, h), \\ M_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y, h), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $M_x(y) = M_x(0, y)$, $M_{xy}(y) = M_{xy}(0, y)$ – заданные при $x = 0$ изгибающий и крутящий моменты. Коэффициенты A_k находятся из системы (1.20), как и в работах [7]–[9], с помощью функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

2. Биортогональные функции. Построим функции $M_{xk}(y), M_{xyk}(y)$, биортогональные к функциям Фадля – Папковича (1.18). Функции, получающиеся из функций Фадля – Папковича путем замены λ_k комплексным параметром λ , называются порождающими [7], [10].

Как и в статьях [7], [10], биортогональные функции будем искать как решения уравнений, полагая в них λ вещественным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y, h) M_{xk}(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda, h)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} m_{xy}(\lambda, y, h) M_{xyk}(y) dy = \frac{\lambda^3 L(\lambda, h)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \quad (2.1)$$

Для комплексных значений λ , в частности при $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$, прямую интегрирования в формулах (2.1) надо заменить T -образным контуром T , лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-h, h]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [7], [10].

При $\lambda \rightarrow \lambda_k$, в соответствии с асимптотическим равенством [11]

$$f(\lambda) - f(\lambda_k) = f'(\lambda_k) (\lambda - \lambda_k),$$

из формул (2.1) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T m_x(\lambda_m, y, h) M_{xk}(y) dy &= \begin{cases} \lambda_k^2 M_k \text{ при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\ \int_T m_{xy}(\lambda_m, y, h) M_{xyk}(y) dy &= \begin{cases} \lambda_k^3 M_k \text{ при } \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$M_k = \frac{\lambda_k L'(\lambda_k, h)}{2} = \frac{\lambda_k h \cos^2(\lambda_k h)}{2}, \quad (0.1)$$

а $L'(\lambda_k, h)$ – производная функции $L(\lambda, h)$ при $\lambda = \lambda_k$.

Понятие биортогональности включает в себя также равенства вида (k, m – любые)

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y, h) \bar{M}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \bar{\lambda}_k^2 \bar{M}_k & \text{при } \bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_m; \\ 0 & \text{при } \bar{\lambda}_k \neq \bar{\lambda}_m \end{cases} \quad (2.4)$$

и

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y, h) M_{xk}(y) dy = \int_T m_x(\lambda_m, y, h) \bar{M}_{xk}(y) dy = 0. \quad (2.5)$$

Они сразу следуют из формул (2.1), (2.2).

Ниже понадобятся разложения порождающих функций и функции $L(\lambda, h)$ в ряды по степеням параметра λ :

$$\begin{aligned} L(\lambda, h) &= h\lambda - \frac{h^3}{3}\lambda^3 + \dots; \\ m_x(\lambda, y, h) &= -h\lambda^3 + \frac{h(2h^2 + 3\nu y^2 - \nu h^2)^2}{6}\lambda^5 + \dots \\ m_{xy}(\lambda, y, h) &= \frac{hy(h^2 - y^2)(\nu - 1)}{6}\lambda^6 + \frac{hy(h^4 - y^4)(\nu - 1)}{60}\lambda^8 + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Биортогональные функции $M_{xk}(y)$, $M_{xyk}(y)$ можно представить в виде суммы финитных, равных нулю вне отрезка $|y| \leq h$, и не финитных частей [7], [10]. Финитные части имеют вид ($|y| \leq h$, $k = 1, 2, \dots$):

$$m_{xk}(y) = -\frac{\cos(\lambda_k y)}{2(\nu - 1)\lambda_k \sin(\lambda_k h)}, \quad m_{xyk}(y) = \frac{\sin(\lambda_k y)}{2(\nu - 1)\sin(\lambda_k h)}. \quad (2.7)$$

Простой способ их построения указан в статье [10].

3. Решение краевой задачи. Пусть на торце $x = 0$ полуполосы $\{\Pi : |x| \geq 0, |y| \leq h\}$ задан изгибающий момент $M_x(y) = M_x(0, y)$, а крутящий момент $M_{xy}(y) = M_{xy}(0, y) = 0$. Тогда система уравнений (1.20) примет вид

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y, h), \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y, h). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Умножая равенства (3.1) соответственно на $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$ и $M_{xyk}(y) + \bar{M}_{xyk}(y)$ и интегрируя обе части полученных равенств по контуру T , с учетом соотношений (2.2), (2.4), (2.5) для каждого номера $k = 1, 2, \dots$, получим систему алгебраических уравнений (см. (2.3), (2.7))

$$\begin{aligned} w_k^* &= A_k M_k + \bar{A}_k \bar{M}_k, \\ 0 &= \lambda_k A_k M_k + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{M}_k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$w_k^* = w_k + \bar{w}_k, \quad (3.3)$$

$$w_k = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xk}(y) dy, \quad \bar{w}_k = \int_{-h}^h M_x(y) \bar{m}_{xk}(y) dy. \quad (3.4)$$

Поочередно умножая первое уравнение системы (3.2) на $\bar{\lambda}_k$ и λ_k и вычитая второе уравнение, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим решение системы (3.2)

$$A_k = -\frac{w_k^* \bar{\lambda}_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) M_k}, \quad \bar{A}_k = \frac{w_k^* \lambda_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) M_k}. \quad (3.5)$$

Дальнейшее построение решений состоит в подстановке выражений (3.5) в равенства (1.17) и последующем выделении по аналогии с работами [12], [13] нуль-рядов. В результате получим выражения для прогиба, углов поворота и моментов в полуполосе ($a_k = \text{Re}\lambda_k$, $b_k = \text{Im}\lambda_k$, $a_k < 0$):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{\omega(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \quad \Phi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{\varphi_x(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\}; \\ \Phi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{\varphi_y(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \\ M_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{m_x(\lambda_k, y, h)}{M_k} w_k C(x) \right\}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$M_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{m_y(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k^2 M_k} w_k T(x) \right\}; \quad M_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} C(x) &= \left\{ \cos(b_k x) - \frac{a_k \sin(b_k x)}{b_k} \right\} e^{a_k x}; \quad S(x) = -(a_k^2 + b_k^2) \frac{\sin(b_k x)}{b_k} e^{a_k x}; \\ T(x) &= -(a_k^2 + b_k^2) \left\{ \cos(b_k x) + \frac{a_k \sin(b_k x)}{b_k} \right\} e^{a_k x}. \end{aligned}$$

На основании зависимостей (1.1) и (1.5) получим:

$$Q_x(x, y) = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y(x, y) = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя выражения (3.6) в равенства (3.7), (3.8), получим формулы для перерезывающих сил $Q_x(x, y)$, $Q_y(x, y)$ и $K_x(x, y)$, $K_y(x, y)$:

$$\begin{aligned} Q_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{\lambda_k m_x(\lambda_k, y, h) \cdot dC(x)/dx + S(x) \cdot dm_{xy}(\lambda_k, y, h)/dy}{\lambda_k M_k} w_k \right\}, \\ Q_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{T(\lambda_k, x, l) \cdot dm_y(\lambda_k, y, h)/dy + \lambda_k m_{xy}(\lambda_k, y, h) \cdot dS(x)/dx}{\lambda_k^2 M_k} w_k \right\}, \\ K_x(x, y) &= Q_x(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{dm_{xy}(\lambda_k, y, h)/dy}{\lambda_k M_k} w_k S(x) \right\}, \\ K_y(x, y) &= Q_y(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y, h)}{\lambda_k M_k} w_k \cdot dS(x)/dx \right\}. \end{aligned}$$

Пример. Пусть $h = 1$, $M_x(y) = y^4 - 1, 2y^2h^2 + 0, 2h^4$. На рис. 1–4 показаны кривые распределения прогиба, моментов и перерезывающих сил на торце полуполосы.

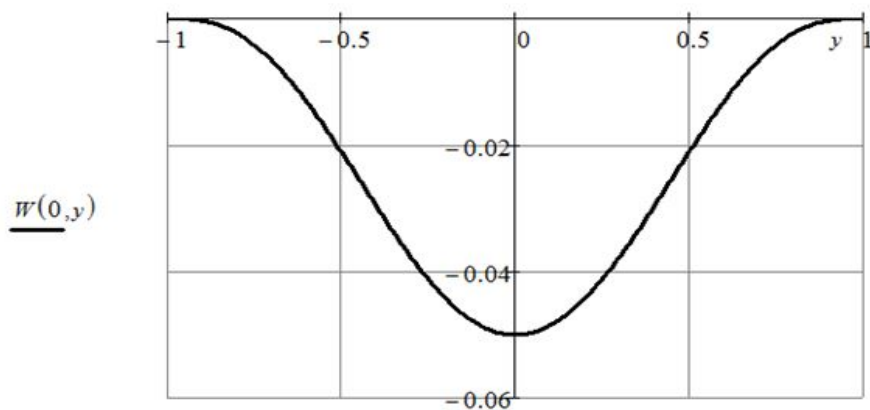


Рис. 1

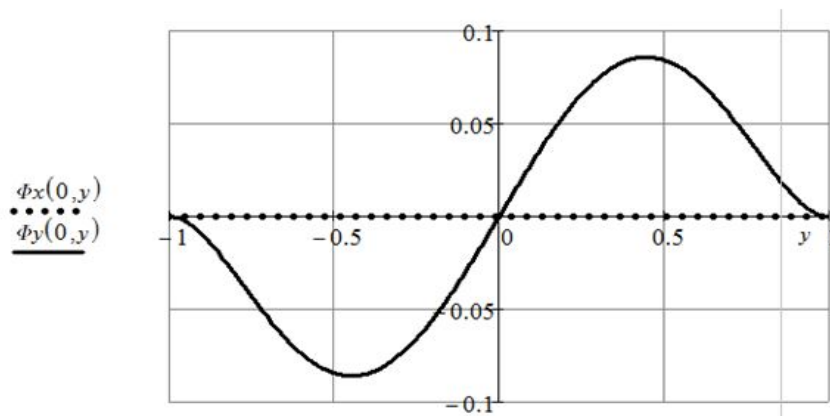


Рис. 2

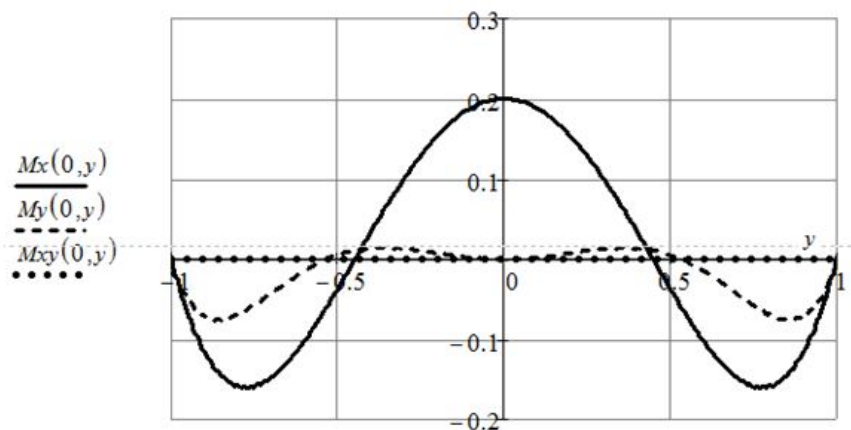


Рис. 3

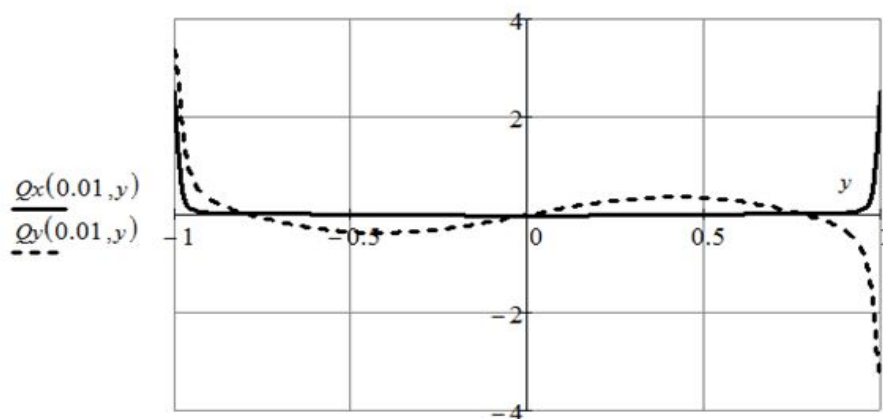


Рис. 4

Заключение. Впервые дано точное аналитическое решение краевой задачи изгиба полуполосы, продольные стороны которой зацемлены, а на торце задан изгибающий момент. Как и в случае плоской задачи теории упругости [7]–[9], решение строится в виде разложений по функциям Фадля – Папковича (однородным решениям), по существу, по той же схеме, что и решение в тригонометрических рядах. Искомые коэффициенты разложений находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 480–482.
- [2] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.

- [3] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратно-симметрической задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1(15). С. 81–90.
- [4] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.
- [5] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
- [6] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [7] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.
- [8] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.
- [9] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. 123 с.
- [10] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.
- [11] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М.: ФМЛ, 1962. 608 с.
- [12] Аbruков Д. А. Изгиб полуполосы со свободными продольными краями, на торце которой заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Точное решение краевой задачи // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 94–114.
- [13] Коваленко М. Д., Клейн Н. В. Однородные решения теории упругости. Биортогональные разложения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 3. С. 393–408.

M. D. Kovalenko¹, D. A. Abrukov²

**BEND CLAMPED ON THE LONG SIDES SEMI-STRIP,
AT WHICH END-WALL A BENDING MOMENT IS GIVEN.
THE EXACT SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM**

¹*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

Abstract. The exact analytical solution of a boundary value problem of a bend of a semi-strip which long sides are clamped, and at an end-wall the bending moment is set. The solution is submitted in series on Fadde – Papkovich functions. Required coefficients of series are by means of systems of functions, biorthogonal to Fadde – Papkovich functions.

Keywords: plate bending, semi-strip bending, Fadde – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] Kovalenko M. D. Razlozhenija Lagranzha i netrivial'nye predstavlenija nulja po odnorodnym reshenijam // Doklady RAN. 1997. T. 352. № 4. S. 480–482. (in Russian).
- [2] Kovalenko M. D., Shuljakovskaja T. D. Razlozhenija po funkcijam Fadlja – Papkovicha v polose. Osnovy teorii // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2011. № 5. S. 78–98. (in Russian).
- [3] Kovalenko M. D., Men'shova I. V. Razlozhenija Lagranzha po funkcijam Fadlja – Papkovicha v obratno-simmetricheskoj zadache teorii uprugosti dlja prjamougol'noj polupolosy // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 1(15). S. 81–90. (in Russian).
- [4] Kashin B. S., Saakjan A. A. Ortogonal'nye rjady. M.: AFC, 1999. 560 s. (in Russian).
- [5] Timoshenko S. P., Vojnovskij-Kruger S. Plastiny i obolochki. M.: Nauka, 1966. 636 s. (in Russian).
- [6] Vlasov V. V. Metod nachal'nyh funkcij v zadachah teorii uprugosti i stroitel'noj mehaniki. M.: Strojizdat, 1975. 224 s. (in Russian).
- [7] Kovalenko M. D., Shuljakovskaja T. D. // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2011. № 5. S. 78–98. (in Russian).
- [8] Kovalenko M. D., Men'shova I. V., Shuljakovskaja T. D. // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2013. № 5. S. 136–158. (in Russian).
- [9] Kovalenko M. D., Men'shova I. V. Analiticheskie reshenija dvumernyh kraevyh zadach teorii uprugosti v konechnyh oblastjah s uglovymi tochkami granicy. Cheboksary: Chuvash. gos. ped. un-t, 2014. 123 s. (in Russian).

Kovalenko Mikhail Denisovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Abrukov Denis Alexandrovich, Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[10] Kovalenko M. D., Men'shova I. V., Shuljakovskaja T. D. Razlozhenija po funkcijam Fadlja – Papkovicha. Primery reshenij v polupolose // Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2013. № 5. S. 136–158. (in Russian).

[11] Fihtengol'c G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. T. I. M.: FML, 1962. 608 s. (in Russian).

[12] Abrukov D. A. Izgib polupolosy so svobodnymi prodol'nymi krajami, na torce kotoroj zadany izgibajushhij moment i obobshhennaja poperechnaja sila. Tochnoe reshenie kraevoj zadachi // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2014. № 4(22). S. 94–114. (in Russian).

[13] Kovalenko M. D., Klejn N. V. Odnorodnye reshenija teorii uprugosti. Biortogonal'nye razlozhenija // Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij. 2005. T. 11. № 3. С. 393–408. (in Russian).