

В. М. Мирсалимов^{1,2}, В. А. Аскаргов²

МИНИМИЗАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ КОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ ПРИ ИЗГИБЕ

¹ Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан

² Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. Рассмотрена тонкая пластина из упругой изотропной среды (матрицы) и распределенных в ней одинаковых волокон (включений) из другого упругого материала при изгибе. Считается, что материал связующей среды ослаблен двоякопериодической системой сквозных трещин неравной длины коллинеарных осей абсцисс и ординат. Берега трещины свободны от внешних нагрузок. Принято, что пластина подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности). Ресурс работы изгибаемой пластины из композитного материала, армированного однонаправленными волокнами, зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов. Несущую способность композита можно повысить с помощью изменения геометрии соединения связующего и волокна. Решена обратная задача механики разрушения по определению оптимальной формы волокна, обеспечивающей минимизацию коэффициентов интенсивности напряжений (моментов) в окрестности вершин трещин. Предложены критерий и метод решения задачи по предотвращению разрушения композита при действии заданной системы внешних изгибающих нагрузок. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования композита в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и волокна. Найденная форма поперечного сечения однонаправленных волокон обеспечивает повышение несущей способности композита.

Ключевые слова: связующее, волокна, изгиб, пластина из композитного материала, трещины, коэффициенты интенсивности напряжений, минимизация параметров разрушения.

УДК: 539.375

© Мирсалимов В. М., Аскаргов В. А., 2016

Мирсалимов Вагиф Мирзахмедович

e-mail: vagif.mirsalimov@imm.az, доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет; Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

Аскаргов Вусал Али оглы

e-mail: vaskarov@yahoo.com, аспирант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 12.06.2016

Введение. Как показывает практика, многокомпонентные среды (композиты) более надежны и долговечны, чем однородные [1], [2]. Кроме того, известно, что прочность зависит также от ее формы.

Процесс разрушения волокнистых композитных материалов определяется взаимодействием волокон с матрицей (связующим). Рассматривается составная упругая пластина, состоящая из упругой среды (матрицы) и распределенных в ней волокон из другого упругого материала. Подкрепляющие элементы (волокна) сравнительно небольшие по объему, существенно влияют на прочность составной пластины [1]. Ресурс работы составной пластины зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов, поэтому оптимальное проектирование (определение оптимальных характеристик) таких материалов имеет важное значение. Оптимальное проектирование материалов и конструкций представляет собой обратную задачу механики деформируемого твердого тела. Работоспособность составной пластины (композита) можно повысить с помощью конструкторско-технологических приемов, в частности путем изменения геометрии соединения ее элементов.

Армированные волокна проектируют в основном круглого поперечного сечения. Как показывает опыт, от идеальной конструкторской геометрии реальные поверхности сечений подкрепляющих волокон отличаются наличием неровностей, являющихся неизбежным следствием процесса их изготовления. Несмотря на малые размеры неровностей, они могут оказывать существенное влияние на несущую способность композита. Поэтому исследование влияния параметров геометрии соединения связующего с волокнами на несущую способность крайне актуально.

Постановка задачи. Пусть неограниченная пластина из композитного материала подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности) $M_x = M_x^\infty$, $M_y = M_y^\infty$, $H_{xy} = 0$. Рассмотрим составную упругую пластину, состоящую из матрицы (области D_*) и распределенных в ней одинаковых волокон с поперечным сечением, близким к круговому (рис. 1). Считается, что материал связующей среды ослаблен двоякопериодической системой сквозных прямолинейных трещин коллинеарных осей абсцисс и ординат неравной длины. Обозначим границу раздела различных упругих сред через $L'_{m,n}$ ($m, n = 0, \pm 1, \dots$). Полагаем, что неизвестную границу $L'_{m,n}$ соединения волокна со связующим можно представить в виде

$$r = \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta), \quad (1)$$

а центры двоякопериодической системы волокон расположены в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2\ell_* \exp(i\alpha), \quad \ell_* > 0, \quad Im\omega_2 > 0,$$

где ε – малый параметр, равный R_{\max}/λ ; R_{\max} – наибольшая высота неровности профиля контура $L'_{m,n}$ от окружности радиусом $r = \lambda$.

Считается, что всюду на границе соединения $L'_{m,n}$ имеет место жесткое сцепление материалов. Берега трещин свободны от внешних нагрузок и в процессе деформации композита не входят в контакт. Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром круга $L_{0,0}$ ($r = \lambda$) в плоскости композита. Для оптимизации несущей способности составной пластины предлагается метод, заключающийся в выборе формы поверхности поперечного сечения волокна, обеспечивающей повышение несущей способности композита. Таким образом, требуется определить такую геометрию поверхности соединения волокна и связующего, чтобы созданное им упругое напряженное поле препятствовало бы росту трещин в композите. Очевидно, что чем ниже

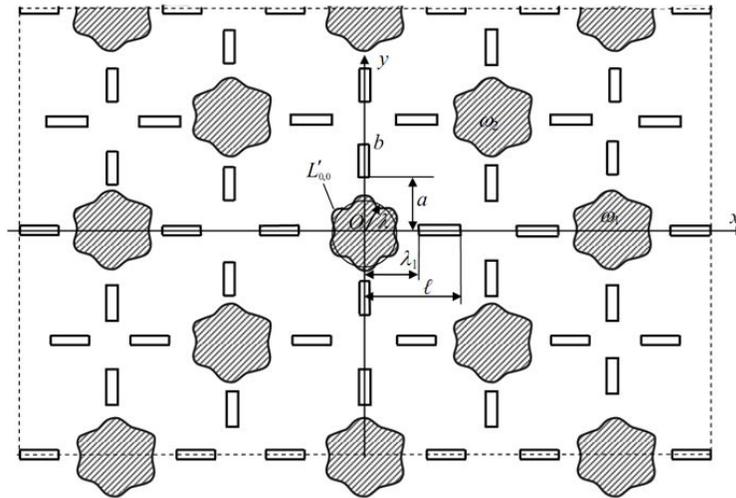


Рис. 1. Расчетная схема задачи минимизации

коэффициенты интенсивности напряжений (параметры разрушения) в окрестности вершин трещин в составной пластине, тем выше ее несущая способность. Решению подобных задач механики посвящены работы [3]–[9].

Управляющими переменными принимаем параметры границы соединения волокон и связующего. Представим границу неизвестного контура $L'_{m,n}$ в виде (1), где функция $H(\theta)$ подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации. Без потери общности поставленной задачи оптимизации принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ симметрична относительно координатных осей и может быть представлена виде отрезка тригонометрического ряда Фурье. Таким образом, задача оптимизации сводится к определению коэффициентов d_{2k} (параметров управления) этого ряда Фурье.

Согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина – Орована параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности кончика трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, ответственной за разрушение материала композита можно считать величину максимального коэффициента интенсивности напряжений в окрестности кончика трещины. Для нахождения геометрии соединения материалов введем в рассматриваемую задачу в качестве критерия определения геометрии соединения (функции $H(\theta)$) минимизацию коэффициентов интенсивности напряжений (моментов). Для предотвращения роста трещин достаточно, чтобы в окрестности вершин трещин все коэффициенты интенсивности напряжений были равны нулю. Требуется найти такую функцию $H(\theta)$, чтобы созданное в процессе нагружения композита изгибающими моментами напряженно-деформированное поле препятствовало росту трещин. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию $H(\theta)$ геометрии соединения материалов.

На основании симметрии граничных условий и геометрии области D_* , занятой упругой средой, напряжения в связующем являются двоякопериодическими функциями ω_1 и ω_2 . Отделим мысленно волокно от связующего. При деформации композита смежные точки контуров волокон и связующего будут иметь одинаковые перемещения, а усилия, действующие со стороны связующего на любое волокно, будут равны по величине и противоположны по знаку усилиям, действующим на связующее со

стороны волокна. Так как решение задачи для связующего обладает свойством двоякопериодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения связующего и волокна лишь вдоль контура $L'_{0,0}$.

Метод решения задачи. Введем обозначения: w_0 – прогиб (волокна) области $S'_{0,0}$, ограниченной контуром $L'_{0,0}$, а w – прогиб пластины вне областей $S'_{m,n}$ ($m, n = 0, \pm 1, \dots$) соприкосновения волокон поперечного сечения, близкого к круговому. Представим эти прогибы через бигармонические функции.

Комплексные потенциалы, относящиеся к связующему, обозначим через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, а относящиеся к волокну – через $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$. Искомые функции (напряжения, моменты, прогиб, коэффициенты интенсивности напряжений) ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем членами, содержащими ε в степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений технической теории изгиба пластин. Значения компонент тензора напряжений (моментов) при $r = \rho(\theta)$ найдем, разлагая в ряд выражения для моментов в окрестности $r = \lambda$.

Используя процедуру метода возмущений, на основании граничных условий рассматриваемой задачи получим граничные условия задачи на контуре $L_{0,0}$ ($\tau = \lambda \exp(i\theta)$) для комплексных потенциалов:

для нулевого приближения

$$\begin{aligned} & \Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = \\ & = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau) \right] \text{ на } L_{0,0}, \\ & \kappa \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} + \Phi^{(0)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = \\ & = \frac{D_0(1-v_0)}{D(1-v)} \left\{ \kappa_0 \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} + \Phi_0^{(0)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau) \right] \right\}, \\ & \kappa \Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} + t \overline{\Phi^{(0)'(t)}} + \overline{\Psi^{(0)}(t)} = iC^{(0)}, \\ & \kappa \Phi^{(0)}(t_1) + \overline{\Phi^{(0)}(t_1)} + t_1 \overline{\Phi^{(0)'(t_1)}} + \overline{\Psi^{(0)}(t_1)} = iC_1^{(0)}; \end{aligned} \quad (2)$$

для первого приближения

$$\begin{aligned} & \Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = \\ & = \Phi_0^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(1)'}(\tau) + \Psi_0^{(1)}(\tau) \right] + f_1 + if_2 \text{ на } L_{0,0}, \\ & \kappa \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} + \Phi^{(1)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = \\ & = \frac{D_0(1-v_0)}{D(1-v)} \left\{ \kappa_0 \overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)} + \Phi_0^{(1)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(1)'}(\tau) + \Psi_0^{(1)}(\tau) \right] \right\} + g_1^* + ig_2^*, \\ & \kappa \Phi^{(1)}(t) + \overline{\Phi^{(1)}(t)} + t \overline{\Phi^{(1)'(t)}} + \overline{\Psi^{(1)}(t)} = iC^{(1)}, \\ & \kappa \Phi^{(1)}(t_1) + \overline{\Phi^{(1)}(t_1)} + t_1 \overline{\Phi^{(1)'(t_1)}} + \overline{\Psi^{(1)}(t_1)} = iC_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); v и v_0 – коэффициенты Пуассона связующего и волокна соответственно; $\kappa = -(3+v)/(1-v)$; $\kappa_0 = -(3+v_0)/(1-v_0)$;

функция $f_1 + if_2$ выражается через функцию $H(\theta)$ и компоненты перемещений на контуре $L_{0,0}$ нулевого приближения; аналогично функция $g_1^* + ig_2^*$ зависит от функции $H(\theta)$ и компонент напряжений при $\tau = \lambda e^{i\theta}$ нулевого приближения; D и D_0 – цилиндрическая жесткость связующего и волокна; t и t_1 – аффиксы берегов трещин, коллинеарных осей абсцисс и ординат соответственно; C и C_1 – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условия равенства нулю скачка прогиба в вершинах трещин.

Рассматриваемая задача определения напряженно-деформированного состояния составной пластины сводится в каждом приближении к отысканию двух функций $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ и $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = x+iy$, аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих соответствующим граничным условиям (2), (3) и (4), (5).

Комплексные потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$ регулярны в области $S_{0,0}$, ограниченной контуром $L_{0,0}$, и, следовательно, могут быть представлены в виде [10]

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}^{(0)} z^{2k}, \quad \Psi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^{(0)} z^{2k}. \quad (6)$$

Комплексные потенциалы $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ в рассматриваемом случае (изгиб на бесконечности) ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(z) &= \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z) + \Phi_3^{(0)}(z), \\ \Psi^{(0)}(z) &= \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z) + \Psi_3^{(0)}(z), \\ \Phi^{(0)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \\ \Psi^{(0)}(z) &= \frac{1}{2} \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{D(1-\nu)} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}, \\ \Phi_2(z) &= \frac{1}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_L g^{(0)}(t) \zeta(t-z) dt + A, \\ \Psi_2(z) &= \frac{1}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_L g^{(0)}(t) [\kappa \zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B, \\ \Phi_3(z) &= \frac{1}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_{L_1} g_1^{(0)}(t_1) \zeta(t_1-z) dt_1, \\ \Psi_3(z) &= -\frac{1}{\pi(1+\kappa_*)} \int_{L_1} \left\{ \overline{g_1^{(0)}(t_1) \kappa_* \zeta(it_1-z)} - g_1^{(0)}(t_1) [Q(it_1-z) + it_1 \gamma(it_1-z)] \right\} dt_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\gamma(z)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, $Q(z)$ – специальная мероморфная функция [11].

Интегралы в (8) берутся по линии $L = (-\ell, \lambda_1) \cup (\lambda_1, \ell)$ и $L_1 = (-b, a) \cup (a, b)$, $g^{(0)}(x)$ и $g_1^{(0)}(y)$ – искомые функции, характеризующие раскрытие берегов трещин в нулевом приближении; $\kappa_* = (3-\nu)/(1-\nu)$.

Из условий равенства нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области D_* , занятой материалом связующего, следует

$$(kA - \bar{A})\omega_k - \bar{B}\omega_k = -(\bar{\delta}_k + \delta_k)a_*^0 + (\bar{\gamma}_k + \bar{\delta}_k)\bar{a}_*^0 + (\bar{\delta}_k - \delta_k)b_*^0 + (\bar{\delta}_k - \bar{\gamma}_k)\bar{b}_*^0 + \beta_2^0\lambda^2\delta_k - \alpha_2^0\lambda^2(k\delta_k - \gamma_k) \quad (k=1,2),$$

$$a_*^0 = \frac{\kappa_*}{\pi i(1 + \kappa_*)} \int_L tg^{(0)}(t)dt, \quad b_*^0 = -\frac{\kappa_*}{\pi i(1 + \kappa_*)} \int_{L_1} t_1g_1^{(0)}(t_1)dt_1.$$

Из условия симметрии относительно координатных осей находим, что

$$Im\alpha_{2k}^0 = 0, \quad Im\beta_{2k}^0 = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

К основным представлениям (6), (8) следует добавить дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell}^{-\lambda_1} g^{(0)}(t)dt = 0, \quad \int_{\lambda_1}^{\ell} g^{(0)}(t)dt = 0, \quad (9)$$

$$\int_{-b}^{-a} g_1^{(0)}(t_1)dt_1 = 0, \quad \int_a^b g_1^{(0)}(t_1)dt_1 = 0.$$

Обозначим левую часть краевого условия (2) через $f_1^0 - if_2^0$. Считаем, что на контуре $L_{0,0}$ ($\tau = \lambda \exp(i\theta)$) функция $f_1^0 - if_2^0$ разлагается в ряд Фурье, который на основании симметрии задачи имеет вид

$$f_1^0 - if_2^0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^0 e^{2ik\theta}, \quad ImA_{2k}^0 = 0.$$

Для определения потенциалов $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$ на контуре $L_{0,0}$ будем иметь граничное условие

$$\Phi_0^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^{(0)} e^{2ik\theta}. \quad (10)$$

Подставив комплексные потенциалы (6) в граничное условие (10) и приравнявая коэффициенты рядов Фурье в левой и правой частях, получим

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \frac{A_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}^0 \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}, \quad (11)$$

$$\Psi_0^{(0)}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1)A_{-2k-2}^0 + A_{2k+2}^0] \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}.$$

С помощью потенциалов (11) после некоторых преобразований запишем краевые условия на контуре $L_{0,0}$ для комплексных потенциалов $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ в виде

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - \bar{\tau} [\Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^0 e^{2ik\theta},$$

$$\begin{aligned} & \kappa \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} + \Phi^{(0)}(\tau) - \left[\tau \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] e^{2i\theta} = \\ & = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ A_0^0 \frac{1+\kappa_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}^0 e^{2ik\theta} + \kappa_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_{-2k}^0 e^{-2ik\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя методы решения, изложенные в [11], [12] и удовлетворяя (12), получим три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k}^0 , β_{2k}^0 и A_{2k}^0 . Эти системы имеют громоздкий вид. Однако в большинстве практически важных случаев их можно урезать до двух-трех уравнений и получить весьма точные результаты [11] для рабочих диапазонов изменения радиуса λ .

В полученные системы алгебраических уравнений входят посредством интегральных членов искомые функции $g^{(0)}(x)$ и $g_1^{(0)}(y)$. Для их определения используем граничное условие на берегах трещин. Требуя, чтобы комплексные потенциалы (8) удовлетворяли граничному условию (3), получим два сингулярных интегральных уравнения относительно искомых функций $g^{(0)}(x)$ и $g_1^{(0)}(y)$ нулевого приближения:

$$\begin{aligned} & \frac{1+\kappa}{\pi i(1+\kappa)} \int_L g^{(0)}(t) \zeta(t-x) dt + \frac{1}{\pi i(1+\kappa_*)} \\ & \int_L g^{(0)}(t) [\kappa_* \zeta(t-x) + Q(t-x) - (t-x)\gamma(t-x)] dt - \\ & -\kappa_* A + \bar{A} + \bar{B} + (1+\kappa)\Phi_*(x) + x\overline{\Phi'_*(x)} + \overline{\Psi_*(x)} = iC^{(0)}, \\ & \Phi_*(x) = \Phi_1^{(0)}(x) + \Phi_3^{(0)}(x), \quad \Psi_*(x) = \Psi_1^{(0)}(x) + \Psi_3^{(0)}(x), \\ & -\frac{1+\kappa}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_{L_1} g_1^{(0)}(t_1) \left[i\zeta(it-iy) - i\overline{\zeta(it-iy)} \right] dt_1 + \\ & + \frac{1+\kappa}{\pi i(1+\kappa_*)} \int_L \overline{g_1^{(0)}(t_1)} \left[-i\overline{\zeta(it-iy)} + iQ(it-iy) + (it-iy)\overline{\gamma(it-iy)} \right] dt_1 + N(y) = iC_1^{(0)}, \\ & N(y) = \kappa\Phi_s(iy) + \overline{\Phi_s(iy)} + iy\overline{\Phi'_s(iy)} + \overline{\Psi_s(iy)}, \\ & \Phi_s(x) = \Phi_1^{(0)}(x) + \Phi_3^{(0)}(x), \quad \Psi_s(x) = \Psi_1^{(0)}(x) + \Psi_3^{(0)}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения постоянной $C^{(0)}$ (в общем случае кусочно-постоянной функции) имеем [13] следующие соотношения:

$$\operatorname{Re} \int_{-\ell}^{-\lambda_1} \bar{t} g^{(0)}(t) dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda_1}^{\ell} \bar{t} g^{(0)}(t) dt = 0,$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах трещин L . Аналогично для определения постоянной $C_1^{(0)}$ имеем соотношения

$$\operatorname{Re} \int_{-b}^{-a} t_1 g_1^{(0)}(t_1) dt_1 = 0, \quad \operatorname{Re} \int_a^b t_1 g_1^{(0)}(t_1) dt_1 = 0,$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах трещин L_1 .

Сингулярные интегральные уравнения (13) и алгебраические системы уравнений являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить $g^{(0)}(x)$, $g_1^{(0)}(y)$ и коэффициенты α_{2k}^0 , β_{2k}^0 , A_{2k}^0 , a_{2k}^0 и b_{2k}^0 .

Изгибающие и крутящие моменты при $\lambda_1 > \lambda$ $a > \lambda$ независимо от условий на границе соединения материалов имеют в окрестности обоих концов трещин корневую особенность.

Используя процедуру алгебраизации [14], [15] интегральных уравнений, получим две конечные системы алгебраических уравнений для определения приближенных значений искомых функций $g^{(0)}(x)$ и $g_1^{(0)}(y)$ в узловых точках разбиения интервала интегрирования. После определения значений $g^{(0)}(x)$ и $g_1^{(0)}(y)$ в узловых точках находятся коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещин $x = \ell$, $x = \lambda_1$, $y = b$, $y = a$ в нулевом приближении.

После нахождения решения в нулевом приближении можно перейти к решению задачи в первом приближении. При формально заданном $H(\theta)$ на основании решения в нулевом приближении находятся функции $f_1 + if_2$ и $g_1^* + ig_2^*$. Комплексные потенциалы $\Phi_0^{(1)}(z)$, $\Psi_0^{(1)}(z)$ и $\Phi^{(1)}(z)$, $\Psi^{(1)}(z)$ ищутся в виде, аналогичном (6), (8), с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения краевой задачи (4), (5) такой же, как в нулевом приближении.

При заданной функции $H(\theta)$ полученные алгебраические уравнения являются замкнутыми и позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние композита, найти коэффициенты интенсивности напряжений (моментов) в окрестности кончиков трещин для каждого профиля поперечного сечения волокна.

Для решения обратной задачи используем условие равенства нулю (минимизации) коэффициентов интенсивности напряжений (моментов) в окрестности кончиков трещин, т. е. коэффициентами d_{2k} искомой функции $H(\theta)$ надо так распорядиться, чтобы обеспечивалось равенство нулю коэффициентов интенсивности напряжений (моментов) в кончиках трещин.

Требуем, чтобы коэффициенты интенсивности напряжений K_I^ℓ , $K_I^{\lambda_1}$, K_I^b , K_I^a в вершинах трещин были равны нулю

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \left[g^{(0)}(t_m) + \varepsilon g^{(1)}(t_m) \right] tg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m \left[g^{(0)}(t_m) + \varepsilon g^{(1)}(t_m) \right] ctg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0,$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \left[g_1^{(0)}(t_m) + \varepsilon g_1^{(1)}(t_m) \right] tg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad (15)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m \left[g_1^{(0)}(t_m) + \varepsilon g_1^{(1)}(t_m) \right] ctg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

Добавляя эти четыре линейных уравнения (14), (15) к объединенной системе, о которой говорилось выше, получим замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных, в том числе и коэффициентов d_k .

Анализ результатов моделирования. Система уравнений (14), (15) совместно с алгебраическими системами для α_{2k}^0 , β_{2k}^0 , A_{2k}^0 , a_{2k}^0 , b_{2k}^0 , $g_k^{(0)} = g^{(0)}(t_k)$, $g_{1k}^{(0)} = g_1^{(0)}(t_k)$ и

их аналогами в первом приближении позволяет определить оптимальную форму границы раздела сред, напряженно-деформированное состояние композита. Бесконечные алгебраические системы относительно α_k, β_k, A_k в каждом приближении имеют весьма громоздкий вид. Так как $0 < \lambda < 1$, а параметр λ входит в высоких степенях в данные системы, то это упрощает расчеты. В большинстве практически важных задач каждую из этих систем можно урезать до нескольких уравнений и, несмотря на это, получить достаточно точные результаты для рабочих диапазонов радиуса λ сечения волокна.

Для численной реализации изложенного способа решались упомянутые выше алгебраические системы. Использовался метод редукции алгебраических систем. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами M_y^∞ ($M_x^\infty = 0$), всесторонний изгиб моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = M_0$. Урезанные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента в зависимости от радиуса армированного волокна.

В расчетах было принято для связующего $\nu = 0,28$; $\mu = 2,5 \cdot 10^5$ МПа; для волокна $\nu_0 = 0,32$; $\mu_0 = 4,5 \cdot 10^5$ МПа.

В таблицах 1 и 2 приведены результаты расчетов коэффициентов d_k искомой функции $H(\theta)$ для различных значений параметра λ . Коэффициенты разложения даются в безразмерном виде $d_k^* = d_k/\lambda$. Таблица 1 соответствует различным значениям радиуса отверстий для квадратной сетки отверстий ($\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$), таблица 2 – для треугольной сетки отверстий ($\omega_1 = 2; \omega_2 = 2 \exp(i\pi/3)$).

Таблица 1

Результаты расчета коэффициентов d_{2k} для квадратной сетки отверстий

λ	d_0		d_4		d_8		d_{12}	
	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ
0,2	0,098	0,086	0,059	0,052	0,032	0,028	0,012	0,009
0,3	0,125	0,113	0,083	0,076	0,038	0,031	0,016	0,010
0,4	0,154	0,131	0,105	0,093	0,062	0,036	0,019	0,015
0,5	0,172	0,157	0,123	0,097	0,072	0,039	0,022	0,017
0,6	0,196	0,178	0,134	0,102	0,081	0,042	0,027	0,021
0,7	0,209	0,197	0,141	0,116	0,093	0,056	0,031	0,029

Таблица 2

Результаты расчета коэффициентов d_{2k} для треугольной сетки отверстий

λ	d_0		d_6		d_{12}		d_{18}	
	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ
0,2	0,081	0,067	0,049	0,042	0,031	0,023	0,008	0,005
0,3	0,099	0,086	0,072	0,059	0,036	0,026	0,013	0,007
0,4	0,131	0,118	0,087	0,082	0,042	0,032	0,019	0,013
0,5	0,156	0,132	0,092	0,093	0,049	0,045	0,021	0,016
0,6	0,169	0,147	0,113	0,098	0,057	0,047	0,025	0,021
0,7	0,181	0,165	0,128	0,115	0,079	0,063	0,034	0,028

Здесь ОИ – односторонний изгиб, ВИ – всесторонний изгиб.

Найденное оптимальное решение способствует повышению несущей способности композита.

Заключение. Предложено решение задачи по предотвращению разрушения композита, армированного однонаправленными волокнами при действии заданной системы внешних изгибающих нагрузок. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение оптимального проектирования композита в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и подкрепляющих волокон. Найденная форма соединения материалов обеспечивает минимизацию параметров разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений) и повышает несущую способность композита.

Результаты рассмотренной теоретической работы дают новые возможности оптимального проектирования линейно-армированных композитов за счет выбора формы соединения связующего и волокна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
- [2] Решетов Д. Н. Состояние и тенденции развития деталей машин // Вестник машиностроения. 2000. № 10. С. 11–15.
- [3] Mirsalimov V. M., Allahyarov E. A. The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching // Int. J. Fracture. 1996. Vol. 79, № 1. P. 17–21.
- [4] Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары // Проблемы механики: сб. ст. к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / под ред. Д. М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 196–207.
- [5] Мирсалимов В. М. Обратная периодическая задача теории изгиба пластины с упругими включениями // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 3. С. 171–179.
- [6] Мирсалимов В. М. Оптимальное проектирование составной пластины, ослабленной периодической системой трещин // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 75–86.
- [7] Мирсалимов В. М. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра // Известия РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 115–173.
- [8] Мирсалимов В. М., Аскаров В. А. Обратная двоякопериодическая задача теории изгиба пластин для композита, армированного однонаправленными волокнами // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 2. С. 51–55.
- [9] Мирсалимов В. М., Аскаров В. А. Минимизация параметров разрушения в композите при изгибе // Механика композитных материалов. 2015. Т. 51, № 6. С. 1049–1060.
- [10] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [11] Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
- [12] Мирсалимов В. М. Взаимодействие периодической системы упругих включений и прямолинейных трещин в изотропной среде // Прикладная механика и техническая физика. 1978. № 1. С. 164–174.

[13] Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

[14] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.

[15] Ladopoulos E. G. Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2000. 436 p.

V. M. Mirsalimov^{1,2}, V. A. Askarov²

MINIMIZATION OF STRESS INTENSITY FACTORS FOR COMPOSITE REINFORCED BY UNIDIRECTIONAL FIBERS AT BENDING

¹*Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan*

²*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

Abstract. A thin elastic plate of an isotropic elastic medium (matrix) and allocated in it fibers (inclusions) of another elastic material at bending is considered. It is assumed that the material of the binder medium is weakened by doubly periodic system of through unequal length cracks collinear to axis and ordinate axes. The crack faces are free from external loads. Work resource of bending plate of composite material reinforced by unidirectional fibers depends on the stress distribution in the zones of interaction of its elements. Serviceability of the composite can be improved by changing the geometry of binder and fibers joint. The inverse problem of fracture mechanics to determine the optimal fibers shape providing the minimization of the stress intensity factors (moments) in the vicinity of crack tips, is solved. The criterion and solving method of the problem of fracture preventing for the composite under action of the given system of external bending loads are proposed. A closed system of equations, allowing to obtain the solution of optimal design problem for the composite depending on the geometrical and mechanical characteristics of the binder and fibers, is constructed. The obtained cross-section shape of the unidirectional fibers provides the increase of composite serviceability.

Keywords: binder, fibers, bending, plate of composite material, cracks, stress intensity factors, minimization of fracture parameters.

REFERENCES

[1] Fujii T., Zako M. Fracture Mechanics of Composite Materials. Moscow: Mir, 1982. (in Russian).

[2] Reshetov D. N. State-of-the-art and tendencies in the development of machine parts // Vestnik Mashinostroeniya. 2000. № 10. P. 11–15.

[3] Mirsalimov V. M., Allahyarov E. A The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching // Int. J. Fracture. 1996. Vol. 79, № 1. P. 17–21.

[4] Gadzhiev G. Kh., Mirsalimov V. M. Inverse problem of fracture mechanics for the compound cylinder of a contact pair // in: D. M. Klimov (ed.), Probl. Mekh. Coll. Works to 90th anniversary of A. Yu. Ishlinskii. Moscow: Fizmatlit, 2003. P. 196–207.

Mirsalimov Vagif, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Azerbaijan Technical University; Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

Askarov Vusal, Postgraduate student, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

- [5] Mirsalimov V. M. Inverse periodic problem of bending for a plate with elastic inclusions // Изв Mechanics of Solids. 2006. № 3. P. 171–179.
- [6] Mirsalimov V. M. Optimal design of a compound plate weakened by a periodic crack system // Mechanics of Solids. 2007. Vol. 42, Issue 2. P. 231–240.
- [7] Mirsalimov V. M. Inverse problem of fracture mechanics for a compound cylinder // Mechanics of Solids. 2009. Vol. 44, Issue 1. P. 141–148.
- [8] Mirsalimov V. M., Askarov V. A. Inverse doubly periodic problem of the theory bending of plates for the composite reinforced with unidirectional fibers // Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2014. № 2. C. 51–55.
- [9] Mirsalimov V. M. and Askarov V. A. Minimization of fracture parameters of a composite at bending // Mechanics of Composite Materials, 2016. Vol. 51, № 6. P. 737–744.
- [10] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Amsterdam: Kluwer. 1977.
- [11] Grigoljuk Je. I., Fil'shtinskij L. A. Perforated plates and shells. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian).
- [12] Mirsalimov V. M. Interaction between a periodic system of elastic inclusions and rectilinear cracks in an isotropic medium // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 1978. Vol. 19, Issue 1. P. 136–145.
- [13] Savruk M. P. Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka, 1981. (in Russian).
- [14] Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshyn A. P. The stress distribution around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka, 1976. (in Russian).
- [15] Ladopoulos E. G. Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2000.