Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 117–121

А. Н. Максимов, Н. Н. Пушкаренко

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИДЕЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЖИМАЕМОГО МАССИВА, ОСЛАБЛЕННОГО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Методом малого параметра определены нулевые и первые приближения напряжений в упругой и пластической областях, а также нулевое приближение границы упругопластической зоны для сжимаемого пространства, ослабленного сферической полостью.

Ключевые слова: напряжения, деформации, сферическая полость.

УДК: 539.3+624.073

В практике горного дела, строительной механике и других смежных областях важное место имеет определение напряженного и деформированного состояния массива вокруг полостей и выемок.

В данной работе исследуется напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого массива вблизи сферической полости. В постановке задачи внутри полости давление отсутствует, а на бесконечности приложены взаимно-перпендикулярные усилия. Задача решена методом малого параметра, в сферической системе координат, в безразмерных единицах длины (все величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу сферической полости ρ_0).

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды определено в виде [1]:

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \tag{1}$$

где σ'_{ij} – компоненты девиатора напряжения, k_0 – коэффициент сцепления, $a = tg\alpha$ – коэффициент внутреннего трения, α – угол внутреннего трения.

Максимов Алексей Николаевич
`e-mail:` alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.
Пушкаренко Николай Николаевич
`e-mail:` stl_mstu@mail.ru, кандидат технических наук, декан инженерного факультета, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.07.2016

Для решения задачи в сферической системе координат используем уравнения равновесия [2]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{\rho}(2\sigma_\rho-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\tau_{\rho\theta}ctg\theta)=0,\\
\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{\rho}((\sigma_\theta-\sigma_\varphi)ctg\theta+3\tau_{\rho\theta})=0,\\
\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{1}{\rho}(3\tau_{\rho\varphi}+2\tau_{\theta\varphi}ctg\theta)=0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Условия пластичности Треска – Сен-Венана [3] с учетом (1):

$$
\begin{gathered}
\left(\sigma_\rho-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)\cdot\left(\sigma_\theta-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)-\tau^2_{\rho\theta}=0,\\
\left(\sigma_\theta-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)\cdot\left(\sigma_\varphi-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)-\tau^2_{\theta\varphi}=0,\\
\left(\sigma_\varphi-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)\cdot\left(\sigma_\rho-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)-\tau^2_{\rho\varphi}=0,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

а также

$$
\begin{gathered}
\left(\sigma_\rho-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)\cdot\tau_{\theta\varphi}=\tau_{\rho\theta}\cdot\tau_{\rho\varphi},\\
\left(\sigma_\varphi-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)\cdot\tau_{\rho\theta}=\tau_{\rho\varphi}\cdot\tau_{\theta\varphi},\\
\left(\sigma_\theta-\sigma+\frac{2}{3}(k_0+a\sigma)\right)\cdot\tau_{\rho\varphi}=\tau_{\rho\theta}\cdot\tau_{\theta\varphi}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Граничные условия:

$$
\begin{gathered}
\sigma_\rho l+\tau_{\rho\theta}m+\tau_{\rho\varphi}n=P_\rho,\\
\tau_{\rho\theta}l+\sigma_\theta m+\tau_{\theta\varphi}n=P_\theta,\\
\tau_{\rho\varphi}l+\tau_{\theta\varphi}m+\sigma_\varphi n=P_\varphi,
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где $\sigma_\rho, \tau_{\rho\theta}...$ – компоненты девиатора напряжения, l, m, n – направляющие косинусы нормали, P_ρ, P_θ, P_φ – проекции усилий на оси ρ, θ, φ, $\sigma=(\sigma_\rho+\sigma_\theta+\sigma_\varphi)/3$ – среднее давление.

Компоненты напряжения представим в виде рядов по малому параметру δ ($\delta \ll 1$):

$$
\begin{gathered}
\sigma_\rho=\sigma^0_\rho+\delta\sigma'_\rho,\ \sigma_\theta=\sigma^0_\theta+\delta\sigma'_\theta,\ \sigma_\varphi=\sigma^0_\varphi+\delta\sigma'_\varphi,\\
\tau_{\rho\theta}=\tau^0_{\rho\theta}+\delta\tau'_{\rho\theta},\ \tau_{\rho\varphi}=\tau^0_{\rho\varphi}+\delta\tau'_{\rho\varphi},\ \tau_{\theta\varphi}=\tau^0_{\theta\varphi}+\delta\tau'_{\theta\varphi}.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Условия пластичности (3) и (4) могут быть удовлетворены в трех случаях, один из которых:

$$
\begin{gathered}
\sigma^0_\theta-\sigma^0+\tfrac{2}{3}(k_0+a\sigma^0)=0,\\
\sigma^0_\varphi-\sigma^0+\tfrac{2}{3}(k_0+a\sigma^0)=0,\\
\sigma^0_\rho-\sigma^0+\tfrac{2}{3}(k_0+a\sigma^0)\neq 0
\end{gathered}
\tag{7}
$$

соответствует сферической полости.

Решая совместно (8) и (3), получим:

$$
\sigma^0_\theta=\sigma^0_\varphi, \tau^0_{\rho\theta}=\tau^0_{\rho\varphi}=\tau^0_{\theta\varphi}. \tag{8}
$$

Тогда (6) с учетом (8) примет вид:

$$
\sigma^0=(\sigma^0_\rho+2\sigma^0_\theta)/3. \tag{9}
$$

Решая совместно (8) и (9), получим:

$$\sigma_\theta^0 = \sigma_\rho^0/\mathrm{A} + D, \tag{10}$$

где $\mathrm{A} = (3+4a)/(3-2a), D = -6k_0/(3+4a)$.

Уравнения равновесия (2) с учетом (8) примут вид:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^0}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0) = 0,\ \frac{\partial\sigma_\theta^0}{\partial\theta} = \frac{\partial\sigma_\varphi^0}{\partial\varphi} = 0. \tag{11}$$

Подставляя (10) в первое уравнение (11) и принимая во внимание, что внутри сферической полости давление отсутствует, получим для компонент нормального напряжения в нулевом приближении в пластической области:

$$\sigma_\rho^{0\mathrm{p}} = k_0(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1)/a,\ \sigma_\theta^{0\mathrm{p}} = \sigma_\varphi^{0\mathrm{p}} = k_0(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1)/a \cdot \mathrm{A} + D. \tag{12}$$

Для определения компонент напряжения в нулевом приближении в упругой области используем: уравнения равновесия (11), уравнение несжимаемости:

$$\varepsilon_\rho^{oe} + \varepsilon_\theta^{oe} + \varepsilon_\varphi^{oe} = 0, \tag{13}$$

где ε_ρ^{oe}, ε_θ^{oe}, ε_φ^{oe} – деформации вдоль осей ρ, θ, φ в упругой области, геометрические уравнения:

$$\varepsilon_\rho^{0e} = \partial U/\partial\rho,\ \varepsilon_\theta^{0e} = \varepsilon_\varphi^{0e} = U/\rho, \tag{14}$$

где U – перемещение вдоль оси ρ, физические уравнения (закон Гука), принимая во внимание, что коэффициент Пуассона для несжимаемого материала $\mu = 1/2$:

$$\varepsilon_\rho^{oe} = (\sigma_\rho^{oe} - \sigma_\theta^{oe})/E,\ \varepsilon_\theta^{oe} = \varepsilon_\varphi^{oe} = (\sigma_\theta^{oe} - \sigma_\rho^{oe})/2E, \tag{15}$$

где E – модуль упругости.

Решая совместно (13), (14), (15) и принимая во внимание условие сопряжения на границе β_0 упрогопластической зоны: $\sigma_\rho^{0\mathrm{e}}|\rho = \beta_0 = \sigma_\rho^{0\mathrm{p}}|_{\rho=\beta_0}, \sigma_\theta^{0\mathrm{e}}|_{\rho=\beta_0} = \sigma_\theta^{0\mathrm{p}}|_{\rho=\beta_0}$ и что на бесконечности приложены усилия $\sigma_\rho^{0\mathrm{e}}|\rho = \infty = -\mathrm{p}_0$, получим:

$$\begin{aligned} &\beta_0 = \left(\frac{D}{2(p_0 a - k_0)}\right)^{\frac{3+4a}{12a}}, \\ &\sigma_\rho^{0\mathrm{e}} = -\frac{2D}{3\rho^3}\beta_0^{\frac{9}{3+4a}} - p_0, \\ &\sigma_\theta^{0\mathrm{e}} = \sigma_\varphi^{0\mathrm{e}} = \frac{D}{3\rho^3}\beta_0^{\frac{9}{3+4a}} - p_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Найдем компоненты возмущенных напряжений в пластической области.

Линеаризируя условия пластичности (3), (4) и принимая во внимание (8), (8), получим:

$$\sigma'_\rho = \mathrm{A}\widetilde{\sigma}', \tag{17}$$

где $\widetilde{\sigma}' = \sigma'_\theta = \sigma'_\varphi$.

$$\tau'_{\theta\varphi} = 0. \tag{18}$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (17), (18) примут вид:

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}\tfrac{\partial\widetilde{\sigma'}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\tfrac{\partial\tau'_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}\left(2\widetilde{\sigma'}(A-1)+\tau'_{\rho\theta}ctg\theta\right)=0,\\&\frac{\partial\tau'_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{\sigma'}}{\partial\theta}+\frac{3}{\rho}\tau'_{\rho\theta}=0,\\&\frac{\partial\tau'_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\widetilde{\sigma'}}{\partial\varphi}+\tfrac{3}{\rho}\tau'_{\rho\varphi}=0.\end{aligned}\tag{19}$$

Для решения (19) вводится функция $U(\rho,\,\theta,\,\varphi)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$\widetilde{\sigma'}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho},\ \tau'_{\rho\theta}=\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial U}{\partial\theta},\ \tau'_{\rho\varphi}=\frac{1}{\rho^3\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}.\tag{20}$$

Тогда последние два уравнения (20) тождественно удовлетворяются, а первое примет вид:

$$-A\rho^2\frac{\partial^2U}{\partial\rho^2}+2\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}=0.\tag{21}$$

Решение (21) найдено методом разделения переменных:

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\rho^{\chi_1}+C_2\rho^{\chi_2})(a_{mn}\cos m\varphi+b_{mn}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta),\tag{22}$$

где первый сомножитель (22) представляет решение уравнения Эйлера, в котором:

$$\chi_{21}=\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\lambda}{A}},\tag{23}$$

C_1, C_2 – константы, которые необходимо найти, второй сомножитель представляет решение уравнения Фурье, в котором a_{mn}, b_{mn} – коэффициенты Фурье, определяемые:

$$\begin{aligned}&a_{mn}=\tfrac{1}{N_{mn}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\rho_1(\theta,\varphi)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos m\varphi\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi,\\&b_{mn}=\tfrac{1}{N_{mn}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\rho_1(\theta,\varphi)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\sin m\varphi\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi,\\&N_{mn}=\tfrac{2\pi\varepsilon_m(n+m)!}{(2n+1)(n-m)},\ \varepsilon_m=2(m=0),1(m>0),\end{aligned}\tag{24}$$

$P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенная функция Лежандра; $\rho_1(\theta,\varphi)$ задает уравнение полости в первом приближении, $n(n+1)=\lambda$.

Подставляя (22) в (20), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области:

$$\begin{aligned}&\sigma'_\theta=\sigma'_\varphi=\widetilde{\sigma'}=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\chi_1\rho^{\chi_1-3}+C_2\chi_2\rho^{\chi_2-3})(a_{mn}\cos m\varphi+b_{mn}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta),\\&\sigma'_\rho=-A\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\chi_1\rho^{\chi_1-3}+C_2\chi_2\rho^{\chi_2-3})(a_{mn}\cos m\varphi+b_{mn}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta),\\&\tau'_{\rho\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\rho^{\chi_1-3}+C_2\rho^{\chi_2-3})(a_{mn}\cos m\varphi+b_{mn}\sin m\varphi)\tfrac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta},\\&\tau'_{\rho\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\tfrac{m}{\sin\theta}(C_1\rho^{\chi_1-3}+C_2\rho^{\chi_2-3})(b_{mn}\cos m\varphi-a_{mn}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta),\\&\tau'_{\theta\varphi}=0.\end{aligned}\tag{25}$$

Постоянные C_1, C_2 найдены при решении совместно (26) и линеаризированных граничных условий (5):

$$C_1 = \frac{D(A\chi_2 - 2)}{A(\chi_2 - \chi_1)},\ C_2 = \frac{D(A\chi_1 - 2)}{A(\chi_1 - \chi_2)}. \tag{26}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: ГИТТЛ, 1954. 121 с.

[2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

A. N. Maksimov, N. N. Pushkarenko

THE DETERMINATION OF A PERTURBED STATE OF IDEAL PLASTIC COMPRESSIBLE ARRAY, WEAKENED BY A SPHERICAL CAVITY

Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Abstract. The method of small parameter defined zero and first approximations stresses in the elastic and plastic regions, as well as the zero approximation border elastic-plastic zone for a compressible space weakened by a spherical cavity.

Keywords: stress, strain, spherical cavity.

REFERENCES

[1] Sokolovskij V. V. Statika sypuchej sredy. M.: GITTL, 1954. 121 s. (in Russian).

[2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s. (in Russian).

[3] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 231 s. (in Russian).

Maksimov Alexey Nikolaevich, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Pushkarenko Nikolaj Nikolaevich, PhD, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.