

С. М. Шляхов, Д. Ю. Гаврилов

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРИСТОСТИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина,
г. Саратов, Россия

Аннотация. Рассмотрим чистый изгиб бруса, выполненного из материала (стали) пористой структуры с переменной по сечению пористостью. Ограничимся случаем упругого деформирования, полагая, что максимальные напряжения в бруссе $\sigma_{\max}$ не превышают предела текучести материала σ_T .

Ключевые слова: изгибающий момент, закон распределения модуля Юнга, приближенный подход.

УДК: 539.3

Рассмотрим чистый изгиб бруса, выполненного из материала (стали) пористой структуры с переменной по сечению пористостью. Интерес к рассмотрению задачи с постановкой именно такого вопроса обуславливается предположением о теоретической возможности варьирования механических свойств нагружаемой конструкции, исходя из возникающих в сечениях напряжений. Известно, что механические характеристики материала (модуль Юнга E и предел текучести σ_T) являются функциями пористости материала [1], [2]. Практические результаты показывают, что при повышении уровня пористости p значение модуля Юнга E снижается, а при снижении уровня пористости – повышается. Аналогичная зависимость просматривается и при анализе пары предел текучести σ_T – пористость p .

Ограничимся случаем упругого деформирования, полагая, что максимальные напряжения в бруссе $\sigma_{\max}$ не превышают предела текучести материала σ_T . На основе экспериментальных данных для пористой стали, приведенных в таблице 1, зависимости $E(p)$ и $\sigma_T(p)$ могут быть представлены полиномами (табл. 1).

Сглаживая заданную функцию методом наименьших квадратов (МНК), получим полиномы:

$$E = a_1 + a_2 p + a_3 p^2 \quad (1)$$

$$\sigma_T = b_1 + b_2 p + b_3 p^2. \quad (2)$$

© Шляхов С. М., Гаврилов Д. Ю., 2016

Шляхов Станислав Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, г. Саратов, Россия.

Гаврилов Данила Юрьевич, аспирант, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, г. Саратов, Россия.

Поступила 02.07.2016

Конечным результатом МНК будут являться значения соответствия σ_T , E пористости в границах от 0 до 0,4.

Таблица 1

Пористость	σ_T , МПа	Пористость	E , МПа
0	200	0	210000
0,12	116	0,1	160000
0,21	95	0,2	110000
0,31	59	0,3	80000
0,37	43	0,4	50000
0,43	32	0,5	20000

На рис. 1 (а, б) приведены графики функций (1) и (2) соответственно, при значениях коэффициентов (МПа), приведенных в табл. 2 в интервале $0 \leq p \leq 0,4$.

Таблица 2

a_1	209285,7143	b_1	196,0368975
a_2	-535000	b_2	-645,9644653
a_3	321428,5714	b_3	627,5555095

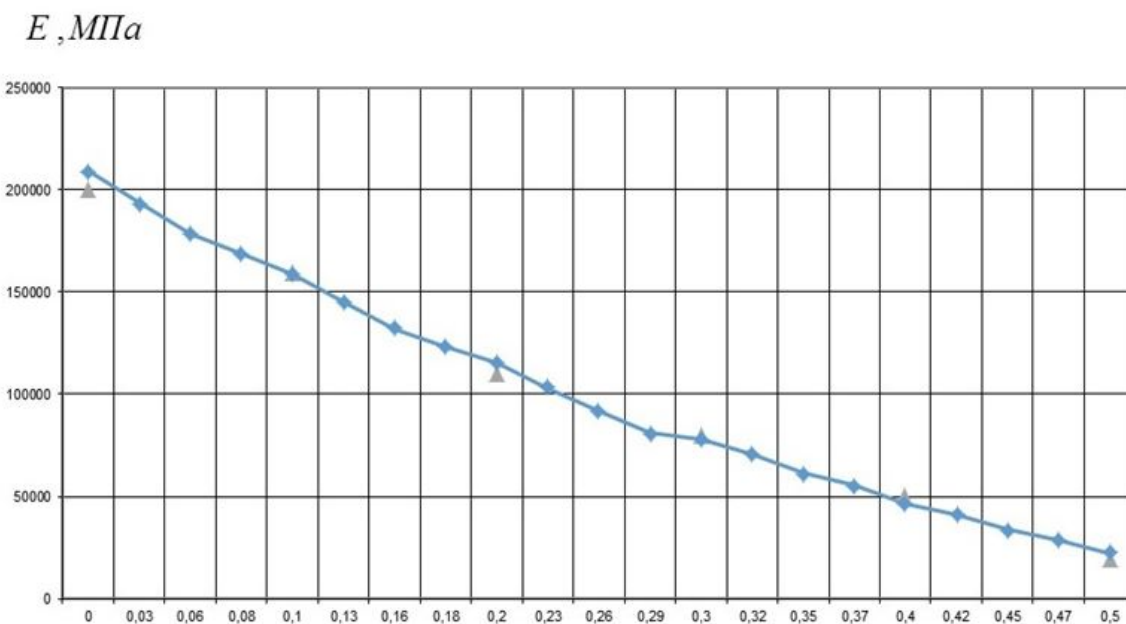


Рис. 1а

Положим теперь, что пористость P переменна по высоте бруса.

$$P = P(y), 0 \leq y \leq h/2.$$

Тогда $E = E(y)$ т. е. модуль Юнга есть функция координаты y (рис. 2).

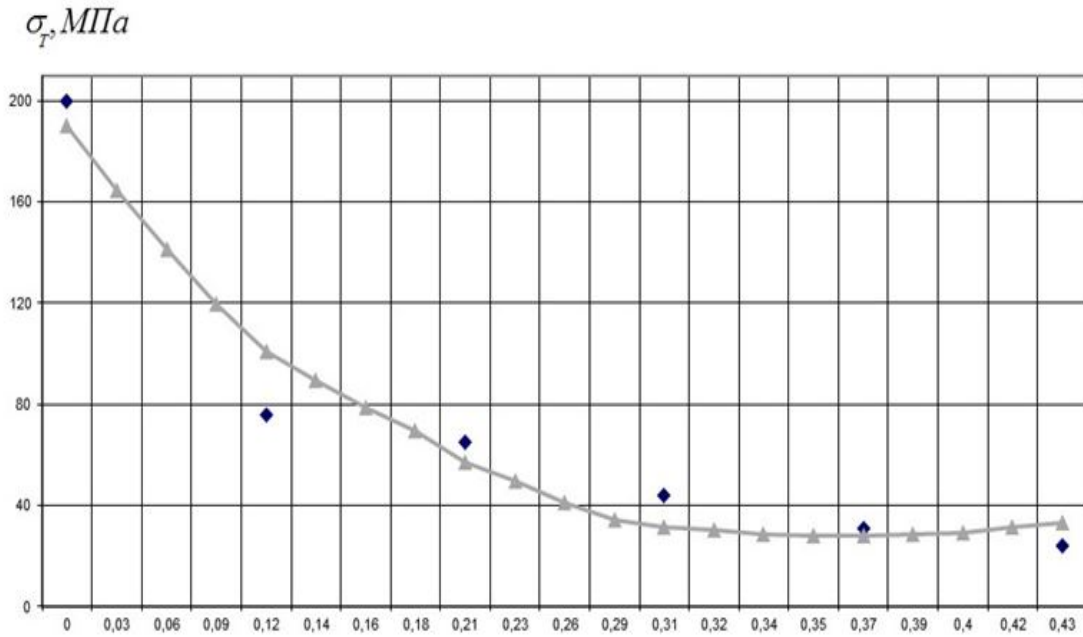


Рис. 16

Задача изгиба, таким образом, сводится к изгибу бруса, выполненного из неоднородного материала, с переменной по сечению упругой характеристикой $E = E(y)$ и переменным пределом текучести $\sigma_T = \sigma_T(y)$.

Обозначим изгибающий момент на бресе через M , а высоту сечения – h . При чистом изгибе бруса работает гипотеза плоских сечений, т. е. сечения после деформаций остаются плоскими и нормальными к оси бруса.

Соответственно закону Гука при изгибе определим закон изменения напряжений по высоте сечения:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3)$$

Величина максимальных деформаций ε постоянна для данного сечения, а значение $E = E(y_i)$ зависит от расстояния от оси сечения y_j , при этом имеем ограничение:

$$\sigma \leq \sigma_T(y). \quad (4)$$

Величина изгибающего момента в сечении определится по формуле:

$$M \approx 2 \cdot \sum_{j=1}^n \sigma_j b_j \delta y_j = 2 \sum_{j=1}^n E_j \varepsilon_j b_j \delta y_j. \quad (5)$$

Целью исследования является подобрать такой закон распределения модуля Юнга E и, следовательно, пористости p по сечению бруса, чтобы получить максимально возможный изгибающий момент при ограничениях на напряжение $\sigma \leq \sigma_T$ и на пористость

$$p_{\min} \leq p \leq p_{\max}, \quad (6)$$

задаваемых техническими возможностями производства.

Данная постановка является сложной задачей линейного программирования, для решения которой используем приближенный подход. Суть приближенного решения заключается в следующем.

Разбиваем все сечение бруса по высоте сечения на " n " элементов с наружными высотами $y_j, j=1, 2, \dots, n$ с шагом $\delta = \frac{h}{2n}$, где h – высота бруса (рис. 2).

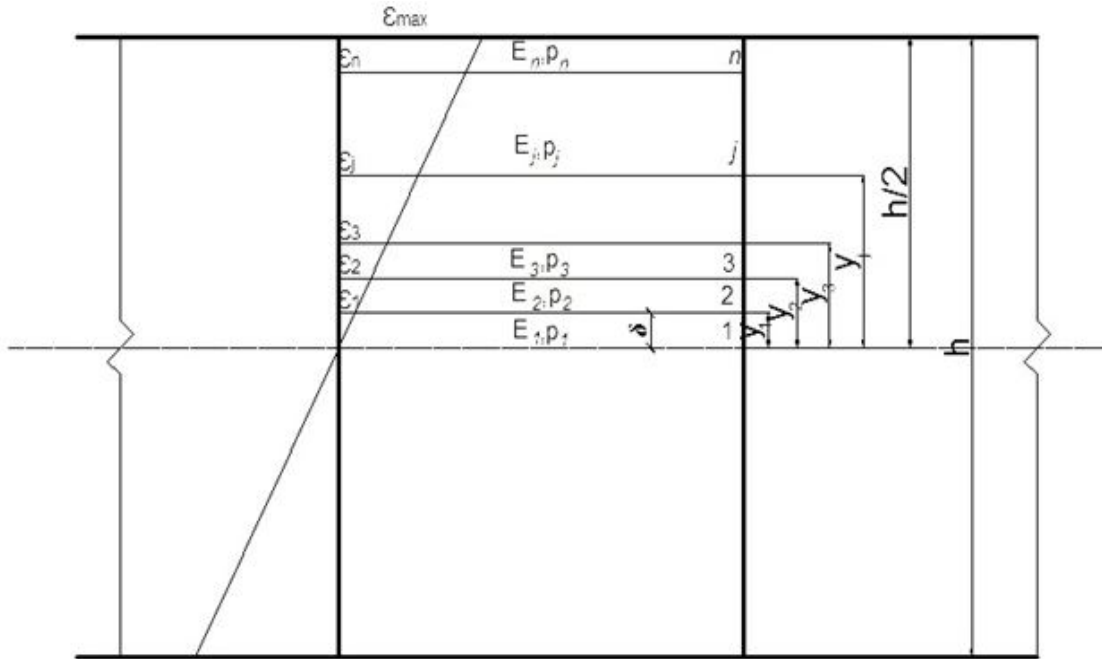


Рис. 2

Соответственно получим:

$$y_1 = \Delta h, \quad y_j = y_{j-1} + \delta, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Максимальные напряжения в слоях будут равны

$$\sigma_j = E_j \varepsilon_j \leq \sigma_{Tj}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Для решения задачи применим метод последовательных приближений.

Зададимся вначале нулевой пористостью и максимальной деформацией $\varepsilon_{\max}$. По формуле (7) найдем значение нормальных напряжений для каждого элемента поперечного сечения. По диаграмме (рис. 1б) находим предельное значение пористости, соответствующее полученному значению нормальных напряжений, полагая $\sigma_j = \sigma_T$. Найденное значение пористости следует согласовать с условием (6). Примем в нашем случае $p_{\min} = 0, p_{\max} = 0,4$.

Т. е. в случае выхода искомого значения p за пределы наложенных ограничений следует принять граничное его значение.

Определяем величину изгибающего момента по формуле:

$$M = 2 \cdot \sum_{j=1}^n \sigma_j h_j b_j y_j. \quad (8)$$

По полученному значению пористости на каждом слое сечения по формуле (1) найдем $E = E_j$ и повторяем расчет.

Будем циклично продолжать описанные выше действия до тех пор, пока не выполнится условие

$$\left| \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \right| \cdot 100\% < 1\%.$$

В качестве примера примем $h = 20$ см, $n = 20$, $\varepsilon_{\max} = 0,000952381$, $b = 10$ см. Получим значение пористости для каждого элементарного слоя и определяем момент.

Результаты всех приближений сведем в табл. 3

Таблица 3

№ приближения	Значение изгибающего момента, кНм	Значение $\left \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \right \cdot 100, \%$
	5,7205	
1	4,6802	18,19
2	4,1285	11,79
3	3,8071	7,79
4	3,5668	6,31
5	3,4283	3,88
6	3,3410	2,54
7	3,2339	3,20
8	3,2201	0,43

При оценке полученных результатов мы видим, что достигли необходимого результата на 8-м приближении.

Окончательно функции рационального распределения $p(y)$ и $\sigma(y)$ отражены на эпюрах (рис. 3а и 3б соответственно).

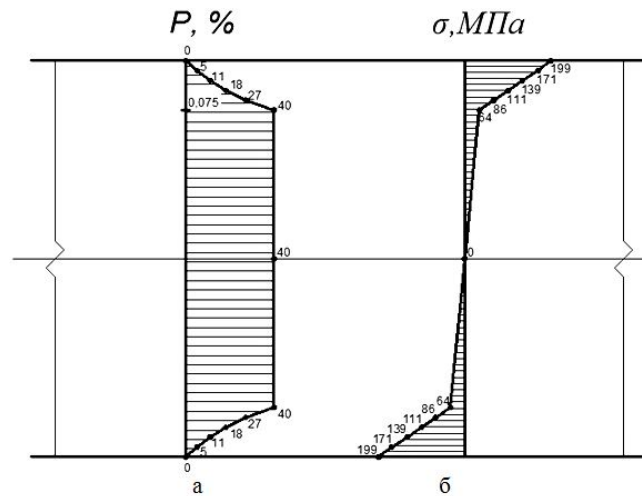


Рис. 3

Таким образом, описанный метод решения является достаточно точным и объективным методом решения задачи. Варьируя значение $\varepsilon_{\max}$, получим функциональную зависимость $M_{\text{изг}}(\varepsilon_{\max}, p)$, из которой найдем расчетное значение $\varepsilon_{\max}$, соответствующее требуемому изгибающему моменту.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кашталян Ю. А. Характеристики упругих материалов при высоких температурах. Киев: Наукова думка, 1970. 112 с.
- [2] Белов С. В. Пористые металлы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1981. 247 с.

S. M. Shljahov, D. Yu. Gavrilov

THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS IN THE PROBLEM
MANAGEMENT DISTRIBUTION OF POROSITY IN PURE BENDING
RECTANGULAR TIMBER

Yu. Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia

Abstract. Consider a pure bending of beams made of a material (steel), a porous structure with variable cross-section porosity. Restrict ourselves to the case of elastic deformation, assuming that the maximum stress in the beam $\sigma_{\max}$ does not exceed the yield strength of the material σ_T .

Keywords: the bending moment, the distribution of the young's modulus, the approximate approach.

REFERENCES

- [1] Kashtaljan Ju. A. Harakteristiki uprugih materialov pri vysokih temperaturah. Kiev: Naukova dumka, 1970. 112 s. (in Russian).
- [2] Belov S. V. Poristye metally v mashinostroenii. M.: Mashinostroenie, 1981. 247 s. (in Russian).

Shljahov Stanislav Mihajlovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Yu. Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

Gavrilov Danila Jur'evich, Graduate, Yu. Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.