Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 128–133

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия

Аннотация. Рассмотрено упругое состояние прямоугольной пластины с отверстиями произвольной формы, находящейся под действием нагрузок, направленных по нормали к сторонам. На контурах отверстий поддерживаются нулевые значения компонент тензора напряжений. При таких граничных условиях построено точное решение задачи в виде квадратур по внешней границе и границам контуров отверстий. Для этой цели найдена и использована бесконечная система законов сохранения уравнений теории упругости, линейно зависящая от компонент тензора напряжений. В статье для простоты подробно рассмотрен случай только одного отверстия. Для произвольного количества отверстий задача решается аналогично.

Ключевые слова: плоская упругая задача, упругая пластина с отверстиями, законы сохранения, точные решения теории упругости.

УДК: 539.371

Введение. Уравнения классической теории упругости – наиболее исследованные уравнения механики сплошной среды. В первую очередь это объясняется линейностью основных уравнений, что позволяет использовать при их решении весь спектр математических методов. При этом белым пятном остается обширная область – решение задач теории упругости для тел конечных размеров. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть классические руководства по теории упругости, например [1], [2].

Одним из авторов этой работы, начатой по инициативе академика Б. Д. Аннина, систематически использованы инструменты теории симметрий и законов сохранения для решения краевых задач теории идеальной пластичности [3]–[5]. Наработанная методика показала, что эти методы могут быть успешно применены и к решению некоторых задач теории упругости. Первые обнадеживающие результаты приводятся в этой работе.

Сенашов Сергей Иванович
`e-mail:` sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Савостьянова Ирина Леонидовна
`e-mail:` savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 29.05.2016

Постановка задачи. Рассмотрим конечную пластину размером $a \times b$ с отверстиями произвольной формы, ограниченной контурами Γ_1, Γ_2, ..., Γ_m с кусочно-гладкими границами (см. рис. 1). Предположим, что пластина испытывает различные напряжения в направлении осей x, y, а отверстия свободны от напряжений. На границе Γ_0 получаем следующие условия:

$$\sigma_x|_{x=a} = \sigma_x|_{x=0} = p,\ \sigma_y|_{y=b} = \sigma_y|_{y=0} = q. \tag{1}$$

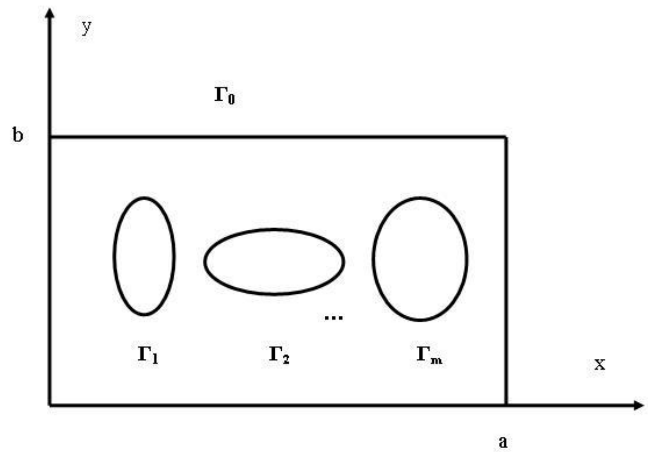

Рис. 1. Пластина с отверстиями произвольной формы

Остальные компоненты тензора напряжений на этих границах равны нулю.

Пусть $\overline{n^i} = \left(n_1^i, n_2^i\right)$ – вектор внешней нормали к i контуру, тогда на Γ_1, Γ_2, ..., Γ_m имеем

$$\sigma_x n_1^i + \tau n_2^i = 0,\ \tau n_1^i + \sigma_y n_2^i = 0. \tag{2}$$

Одно из возможных решений этой системы

$$\sigma_x|_{\Gamma_i} = \sigma_y|_{\Gamma_i} = \tau|_{\Gamma_i} = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать, что на границе контуров выполнено условие (3). Уравнения теории упругости в стационарном случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \left(\sigma_x + \sigma_y\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \left(\sigma_x + \sigma_y\right)}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (5) получаем σ_y

$$\sigma_y = F\left(x, y\right) - \sigma_x, \tag{6}$$

где $F\left(x, y\right)$ – некоторое решение уравнения Лапласа (5).

Из (1) и (3) следует, что для нахождения $F\left(x, y\right)$ следует решить уравнение Лапласа со следующими граничными условиями:

$$F|_{x=a} = F|_{x=0} = p, F|_{y=b} = F|_{y=0} = q, F|_{\Gamma_i} = 0. \tag{7}$$

Решение такой задачи будем считать известным. В этом случае для определения σ_x, τ получим систему уравнений

$$\Phi_1 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \Phi_2 = \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Законы сохранения. Напишем для системы (8) законы сохранения.

Определение. Законом сохранения для системы (8) назовем соотношение вида

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \Pi_1 \Phi_1 + \Pi_2 \Phi_2 = 0, \tag{9}$$

где Π_i – некоторые линейные дифференциальные операторы, по крайней мере, один из которых не тривиален; A, B – сохраняющийся ток.

Ищем сохраняющийся ток в виде:

$$A = \alpha_1 (x, y) \sigma_x + \beta_1 (x, y) \tau + \gamma_1 (x, y), \tag{10}$$

$$B = \alpha_2 (x, y) \sigma_x + \beta_2 (x, y) \tau + \gamma_2 (x, y),$$

где a_i, b_i, γ_i – искомые функции.

Подставляя (10) в (9), получаем

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \sigma_x + \alpha_1 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \tau + \beta_1 \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \sigma_x + \alpha_2 \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_2}{\partial y} \tau + \tag{11}$$

$$+\beta_2 \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = \omega_1 (x, y) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) + \omega_2 (x, y) \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0.$$

Из (11) получаем

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \frac{\partial \beta_2}{\partial y} = 0, \ \alpha_1 = \beta_2 = \omega_1,$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = \omega_2 \frac{\partial F}{\partial y}, \ \beta_1 = -\alpha_2 = \omega_2.$$

В результате имеем

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \frac{\partial \beta_1}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = \beta_1 \frac{\partial F}{\partial y}. \tag{12}$$

Окончательно сохраняющийся ток принимает вид

$$A = \alpha_1 (x, y) \sigma_x + \beta_1 (x, y) \tau + \gamma_1 (x, y), \tag{13}$$

$$B = -\beta_1 (x, y) \sigma_x + \alpha_1 (x, y) \tau + \gamma_2 (x, y),$$

коэффициенты которого связаны соотношением (12).

Для простоты дальнейших выкладок будем считать, что у нас есть только одно отверстие, ограниченное контуром Γ_1, тогда из (9) по формуле Грина получаем

$$\oint_{\Gamma_0} A dy - B dx + \oint_{\Gamma_1} A dy - B dx = 0. \tag{14}$$

Решение задачи. Рассмотрим два сингулярных решения первых двух уравнений (12)

$$\alpha_1^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta_1^1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \tag{15}$$

$$\gamma_1^1 = \int \frac{\partial F}{\partial y} \beta_1 dx, \; \gamma_2^1 = 0.$$

$$\alpha_1^2 = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \beta_1^2 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \tag{16}$$

$$\gamma_1^2 = \int \frac{\partial F}{\partial y} \beta_1 dx, \; \gamma_2^2 = 0.$$

Оба эти решения имеют особенность в точке x_0, y_0, поэтому, чтобы использовать формулу (13), окружим точку окружностью радиусом ε

$$\Gamma_\varepsilon : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2.$$

Имеем (см. рис. 2):

$$\int_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_5} = 0.$$

Поскольку

$$\int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_5} = 0, \; \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = 0,$$

получаем

$$\int_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1} = -\int_{\Gamma_\varepsilon}. \tag{17}$$

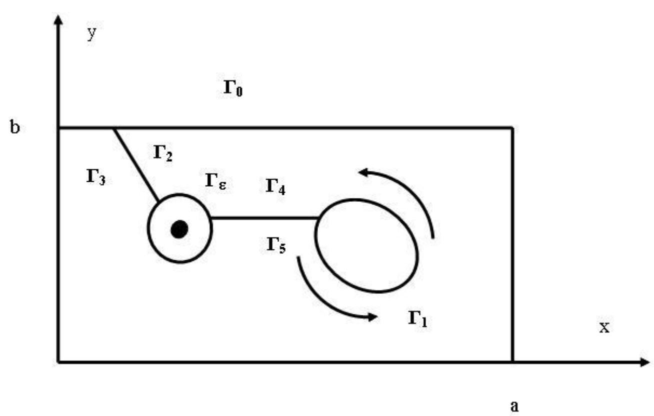

Рис. 2. Вычисление напряженного состояния в точке x_0, y_0

Подставив в (17) решение (15), получаем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} = \int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \sigma_x - \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tau + \gamma_1^1 \right) dy -$$

$$- \left(-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \sigma_x + \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tau \right) dx.$$

В этой формуле сделаем замену переменных $x - x_0 = \varepsilon cos\varphi$, $y - y_0 = \varepsilon sin\varphi$, $0 < \varphi \leq 2\pi$, имеем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} = \int\limits_0^{2\pi} \left((\sigma_x cos\varphi - \tau sin\varphi) cos\varphi + \left(\sigma_x sin\varphi - \tau cos\varphi + \varepsilon\gamma_1^2\right) sin\varphi \right) d\varphi.$$

В последнем интеграле устремляем $\varepsilon \to 0$ и, используя теорему о среднем, получаем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} = 2\pi\sigma\left(x_0, y_0\right).$$

Аналогично, используя решение (13), получаем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} = 2\pi\tau\left(x_0, y_0\right).$$

Из (17) и приведенных выше формул окончательно имеем

$$2\pi\sigma_x(x_0, y_0) = -\int_{\Gamma_0} \left(\frac{y - y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\sigma_x - \frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\tau \right) dy -$$

$$-\left(\frac{y - y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\sigma_x + \frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\tau + \gamma_1^1 \right) dx + \int_{\Gamma_1} \gamma_1^1 dy,$$

$$2\pi\tau(x_0, y_0) = -\int_{\Gamma_0} \left(\frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\sigma_x + \frac{y - y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\tau \right) dy -$$

$$-\left(-\frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\sigma_x + \frac{y - y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\tau + \gamma_1^2 \right) dx - \int_{\Gamma 1} \gamma_1^2 dy,$$

$$\sigma_y(x_0, y_0) = F(x_0, y_0) - \sigma_x(x_0, y_0).$$

Замечание. Если отверстие одно и оно круглое, полученные формулы позволяют построить решение задачи в виде рядов Фурье.

Заключение. Задача о вычислении напряжений в упругой прямоугольной пластинке сведена к вычислению нескольких квадратур по внешнему контуру и контурам отверстий. Приведенная методика без труда переносится на случай пластинки, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, а также когда в пластинке появляются пластические области вокруг отверстий. Эти результаты будут изложены в следующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

[2] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 870 с.

[3] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics. 2014. № 7 (2). P. 203–208.

[4] Senashov S. I., Yakhno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. № 46.

[5] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, http://dx.doi.org/10.3842//SIGMA.2012.071. Special Issue «Geometrical Methods in Mathematical Physics».

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

ELASTIC STATE OF A PLATE WITH FREE-FORM HOLES

M. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. Elastic state of a rectangular plate with free-form holes was studied; the plate was exposed to loads directed to the sides along the normal lines. On the outlines of the holes zero values of the stress component are maintained. With such boundary conditions an exact solution of the problem was built in the form of quadratures on the outer boundary and the boundaries of the holes' outlines. For this purpose an infinite system of laws of equation conservation of the theory of elasticity was found and used that is dependant on the stress component in a linear fashion. For simplicity the case of just one hole was studied in detail in the article. For a certain number of holes the problem shall be solved in much the same way.

Keywords: plane elasticity problems, the elastic plate with holes, conservation laws, exact solutions of the theory of elasticity.

REFERENCES

[1] Timoshenko S. P., Goodier J. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1975. 576 c. (in Russian)

[2] Novatsky V. Theory of elasticity. M.: Mir, 1975. 870 c. (in Russian)

[3] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam //J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics., 2014. № 7(2). P. 203-208.

[4] Senashov S. I., Yakhno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system //J. Phys. A: Math. Theor. 2013. № 46.

[5] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, http://dx.doi.org/10.3842//SIGMA.2012.071. Special Issue «Geometrical Methods in Mathematical Physics».

Senashov Sergei Ivanovich
`e-mail:` sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, M. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia.
Savostyanova Irina Leonidovna
`e-mail:` savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, M. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia.