Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. №3 (21). С. 149–159

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИКЕ НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СДВИГАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. Методом сращиваемых асимптотических разложений получено решение одномерной плоской краевой задачи о переменной сдвиговой нагрузке на границе нелинейно-упругого несжимаемого слабо неоднородного полупространства. Показано, что решение в прифронтовой области определяется системой эволюционных уравнений относительно изменений квадрата интенсивности сдвига и его направленности. Получено ее общее решение, построено частное решение для иррациональных функций перемещений на нагружаемой границе.

Ключевые слова: нелинейно-упругая несжимаемая неоднородная среда, поперечные ударные волны, сдвиговая нагрузка с переменной направленностью, система эволюционных уравнений, эволюционное уравнение для изменения интенсивности сдвига, эволюционное уравнение для изменения направления сдвига.

УДК: 539.3

Введение. Математическому моделированию нелинейных динамических процессов в твердых телах посвящено большое количество работ [1], [2], [3], [4]. В них показано, что объемное деформирование и формоизменение взаимосвязаны и возникающие ударные волны носят квазипродольный или квазипоперечный характер. При этом сдвиговое деформирование не имеет аналогии с гидро- и газодинамикой, поэтому поперечные и квазипоперечные ударные волны менее изучены, чем продольные. Общая нелинейность краевых задач с ударными волнами приводит к невозможности получения точных решений. Поэтому возникает необходимость построения обобщенных приближенных аналитических или численных решений. Одним из эффективных аналитических методов решения задач нелинейной динамики является метод малого параметра [5]. Ранее [6], [7] метод сращиваемых асимптотических разложений при решении одномерных плоских задач с единственным волновым процессом приводил к анализу единственного эволюционного уравнения. Для продольных волн в однородных средах это было уравнение Коула-Хопфа [4], для поперечных волн — уравнение Коула-Хопфа для квадрата интенсивности волнового процесса [8]. В средах со слабой неоднородностью переход к эволюционному уравнению происходил при помощи рекуррентной цепочки внутренних задач с изменением всех зависимых переменных [9]. В данной статье рассматривается обобщение методики на случай присутствия нескольких ударных волн. Одномерный плоский волновой

Поступила 18.08.2014

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 14–01–31030 мол_а, 14–01–00292 А).

процесс, вызванный переменной нагрузкой на границе несжимаемого нелинейно-упругого полупространства, приводит к образованию ударных волн двух типов: плоскополяризованной волны и волны круговой поляризации. Дополнительным фактором, влияющим на деформирование, считаем неоднородность свойств среды в направлении движения ударных волн. Сделанные предположения позволяют одновременно учесть нелинейность модели, описывающей ударные волны, и неоднородность, возникающую в твердых телах больших размеров. Методом сращиваемых асимптотических разложений задача сводится к системе эволюционных уравнений, описывающих решение на достаточно больших расстояниях от нагружаемой границы. Авторами получено общее решение этой системы в случае распространения общего фронта волновых процессов; в качестве примера рассмотрено частное решение задачи при иррациональном краевом условии на границе полупространства.

1. Общие модельные соотношения и постановка краевой задачи. Рассмотрим замкнутую систему уравнений, описывающую движение нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды в пространственных декартовых координатах Эйлера x_1, x_2, x_3:

$$\begin{gathered}\rho=\rho_0=const,\quad \dot u_i=(\delta_{ij}-u_{i,j}v_j),\quad 2\alpha_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}-u_{k,i}u_{k,j},\\ \sigma_{ij,j}=\rho(\dot v_i+v_{i,j}v_j),\quad \sigma_{ij}=-p_0\delta_{ij}+\frac{\partial W}{\partial\alpha_{ik}}(\delta_{kj}-2\alpha_{kj}),\\ W(I_1,I_2)=(a-\mu)I_1+aI_2+bI_1^2-\kappa I_1I_2-\theta I_1^3+cI_1^4+\\ +dI_2^2+kI_1^2I_2+\chi I_1^2I_2+\ldots\\ I_1=\alpha_{ii},\quad I_2=\alpha_{ij}\alpha_{ji},\quad \dot u_i=\frac{\partial u_i}{\partial t},\quad u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скорости, α_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера-Коши, p_0 — функция добавочного гидростатического давления, W — функция упругого потенциала, задаваемого разложением в ряд Тейлора относительно свободного сотояния, μ, a, b, κ, θ, c, d, k, χ — упругие модули среды в адиабатическом приближении, $\rho=\rho_0=const$ — плотность среды. В системе (1.1) и далее принимается суммирование по повторяющемуся латинскому индексу, многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высокой малостью.

Дополнительно примем слабую неоднородность свойств среды линейного типа в направлении координатной оси x_1:

$$\begin{gathered}\rho_0=\tilde\rho_0+\delta^2\tilde\rho_1 s,\quad \mu=\mu_0+\delta^2\mu_1 s,\quad a=a_0+\delta^2a_1s,\quad b=b_0+\delta^2b_1s,\\ \kappa=\kappa_0+\delta^2\kappa_1s,\quad \theta=\theta_0+\delta^2\theta_1s,\quad c=c_0+\delta^2c_1s,\quad d=d_0+\delta^2d_1s,\\ k=k_0+\delta^2k_1s,\quad \chi=\chi_0+\delta^2\chi_1s,\quad s=\frac{x_1}{C_0T},\quad C_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde\rho_0}},\end{gathered}\tag{1.2}$$

где T и C_0T — характерное время и характерное расстояние, $\tilde\rho_0$, $\tilde\rho_1$, μ_0, μ_1, a_0, a_1, b_0, b_1, κ_0, κ_1, θ_0, θ_1, c_0, c_1, d_0, d_1, k_0, k_1 — константы, $\delta\ll 1$ — первый малый параметр задачи. Асимптотический анализ основной системы уравнений (1.1) далее покажет, что именно квадрат малого параметра δ позволит учесть и фактор неоднородности свойств материала, и нелинейность модельных соотношений.

Пусть, начиная с момента $t=0$, к границе $x_1=0$ предварительно недеформированного несжимаемого полупространства $x_1\geq 0$ приложены нагрузки:

$$\sigma_{1j}\Big|_{x_1=0,\,t\geq0}=g_j(t),\quad j=2,3,\quad \sigma_{11}\Big|_{x_1=0,\,t\geq0}=0,\tag{1.3}$$

где $g_j(t)$ — известные функции времени. Считаем, что следствием такого нагружения будет поле перемещений $u_1=0$, $u_2=u_2(x_1,t)$, $u_3=u_3(x_1,t)$ и мгновенно или с течением времени по среде начинают распространяться поверхности сильных разрывов — ударные волны. В этом случае необходимо учитывать дополнительные условия: геометрические, кинематические и динамические условия совместности [10], [11]:

$$\begin{gathered}
[f_{,i}] = \left[\frac{df}{dn}\right] n_i + a^{\alpha\beta}[f]_{,\alpha} x_{i,\beta}, \quad [\dot{f}] = -G\left[\frac{df}{dn}\right] + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \\
[\rho(v_i n_i - G)] = 0, \quad [\sigma_{ij}]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \\
\sigma_{ij}^+[v_i]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)\left\{\frac{[v_i][v_i]}{2} + [e]\right\} - [q_j]n_j, \\
a_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha}x_{i,\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial y^\beta}, \quad a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad n_i n_i = 1, \quad x_{i,\alpha}n_i = 0, \\
\frac{df}{dn} = f_{,i}n_i, \quad [f] = f^+ - f^-, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где e — плотность распределения внутренней энергии, q_j — компоненты вектора теплового потока, n_i — компоненты единичной внешней нормали к поверхности ударной волны Σ, G — скорость ударной волны в направлении внешней нормали, y^α — поверхностные координаты, $a_{\alpha\beta}$ — ковариантная метрика на ударной волне, индексами «+» и «-» обозначаем предельные значения разрывной величины перед Σ и сразу за ней, квадратными скобками обозначен разрыв величины, заключенной в них, $\delta/\delta t$ — производная по Томасу [11] (дельта-производная).

В рассматриваемой задаче зависимость напряжений σ_{12}, σ_{13} от деформаций имеет вид:

$$\begin{gathered}
\sigma_{12} = u_{2,1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k h^k, \quad \sigma_{13} = u_{3,1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k h^k, \quad h = \frac{u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2}{2}, \\
\gamma_0 = \mu, \quad \gamma_1 = 2\left(a + b + \kappa + d\right), \ldots
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Подстановка соотношений (1.5) в условия совместности (1.4) дает систему уравнений относительно компонент волнового вектора разрывов:

$$\begin{gathered}
\tau_2\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\left(h^+\right)^k - \left[\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k h^k\right]\right\} + u_{2,1}^+\left[\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k h^k\right] = \rho G^2\tau_2, \\
\tau_3\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\left(h^+\right)^k - \left[\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k h^k\right]\right\} + u_{3,1}^+\left[\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k h^k\right] = \rho G^2\tau_3, \\
\tau_2 = \left[u_{2,1}\right], \quad \tau_3 = \left[u_{3,1}\right],
\end{gathered} \tag{1.6}$$

которая имеет нетривиальное решение в двух случаях. В первом из них $\dfrac{u_{2,1}^+}{u_{3,1}^+} = \dfrac{\tau_2}{\tau_3}$, т.е. предварительные деформации не изменяют свою направленность и по среде распространяется плоскополяризованная ударная волна Σ_1 со скоростью

$$\begin{gathered}
G_1 = \left\{\rho^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k h^k + \frac{u_{3,1}^+ - \tau_3}{\tau_3}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k h^k\right]\right)\right\}^{1/2}, \\
\frac{u_{3,1}^+ - \tau_3}{\tau_3} = \frac{u_{2,1}^+ - \tau_2}{\tau_2}.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Во втором случае $[h] = 0$ и по среде распространяется ударная волна круговой поляризации Σ_2, изменяющая только направление предварительного сдвига без изменения его абсолютной величины. Скорость такой волны

$$G_2 = \left\{\rho^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\left(h^+\right)^k\right\}^{1/2}. \tag{1.8}$$

Волна Σ_1 может возникать и на границе среды, и внутри объема. Волна Σ_2 образуется только на нагружаемой поверхности. Отметим, что скорость волны Σ_1 больше, чем скорость волны Σ_2 [12], [13]. Если предварительных деформаций в среде нет, то образуется общий передний фронт ударной волны Σ, скорость которого G вычисляется как

$$G = \left\{\rho^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\left(h^-\right)^k\right\}^{1/2}. \tag{1.9}$$

На этой поверхности изменяется и интенсивность деформаций, и их направленность. Отметим, что волна круговой поляризации может образоваться и впоследствии при $t > 0$. В настоящей статье будем рассматривать решение задачи при условии общего единственного переднего фронта Σ ударного процесса. Исходя из такого предположения, поставим краевые условия на ударной волне:

$$u_2|_\Sigma = u_3|_\Sigma = 0, \quad x_1|_\Sigma = \int_0^t G(\xi)\,d\xi. \tag{1.10}$$

Из системы уравнений (1.1) остановимся на уравнениях движения Навье, определяющих кинематику точек среды:

$$\begin{gathered}
u_{2,11}\left(\mu+\alpha\left(u_{2,1}^2+u_{3,1}^2\right)\right)+2\alpha u_{2,1}\left(u_{2,1}u_{2,11}+u_{3,1}u_{3,11}\right)+\mu_{,1}u_{2,1}+\\
+\alpha_{,1}u_{2,1}\left(u_{2,1}^2+u_{3,1}^2\right)+\ldots=\rho\ddot{u}_2,\\
u_{3,11}\left(\mu+\alpha\left(u_{2,1}^2+u_{3,1}^2\right)\right)+2\alpha u_{3,1}\left(u_{2,1}u_{2,11}+u_{3,1}u_{3,11}\right)+\mu_{,1}u_{3,1}+\\
+\alpha_{,1}u_{3,1}\left(u_{2,1}^2+u_{3,1}^2\right)+\ldots=\rho\ddot{u}_3,\\
\alpha=a+b+\kappa+d.
\end{gathered} \tag{1.11}$$

Поставленная краевая задача (1.3), (1.10), (1.11) существенно нелинейная, поэтому построить ее точное решение невозможно. Для получения ее приближенного аналитического решения воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений.

2. Метод малого параметра для одномерной задачи с переменной сдвиговой нагрузкой на границе. Для перехода к методу малого параметра введем безразмерные переменные внешней области:

$$s = \frac{x_1}{C_0T}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w_i(s,m) = \frac{u_i(x_1,t)}{C_0T}\varepsilon^{-1}, \quad i = 2,3, \tag{2.1}$$

где ε — второй малый параметр задачи, связанный с относительной малостью возникающих на границе и внутри среды перемещений. Его конкретный вид определяется выбором функции $g_j(t)$. Перемещения u_2 и u_3 считаем одного порядка малости. Возможны различные варианты связи малых параметров задачи δ и ε, но наиболее интересный случай возникает, когда они равны. В переменных (2.1) система уравнений движения (1.11) и краевые условия (1.3) записываются как внешняя краевая задача:

$$\begin{gathered}
w_{i,ss}\left\{1+\alpha_0\varepsilon^2 s+\varepsilon^2(\alpha_1+\alpha_2\varepsilon^2 s)(w_{2,s}^2+w_{3,s}^2)\right\}+2\varepsilon^2(\alpha_1+\alpha_2\varepsilon^2 s)w_{i,s}(w_{2,s}w_{2,ss}+\\
+w_{3,s}w_{3,ss})+\alpha_0\varepsilon^2 w_{i,s}+\alpha_2\varepsilon^4 w_{i,s}(w_{2,s}^2+w_{3,s}^2)=(1+\varepsilon^2\rho_1 s)w_{i,mm},\\
\alpha_0=\frac{\mu_1}{\mu_0},\ \rho_1=\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_0},\ \alpha_1=\frac{a_0+b_0+\kappa_0+d_0}{\mu_0},\ \alpha_2=\frac{a_1+b_1+\kappa_1+d_1}{\mu_0},\\
w_{i,s}\Big|_{s=0}=f_i(m), \quad i=2,3,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $f_i(m)$ — известные функции времени, определяемые граничными условиями (1.3). Искомые безразмерные перемещения представим асимптотическими рядами по четным степеням малого параметра:

$$w_i(s,m) = w_{i0}(s,m) + \varepsilon^2 w_{i2}(s,m) + \varepsilon^4 w_{i4}(s,m) + \ldots, \quad i = 2,3. \tag{2.3}$$

Подстановка рядов (2.3) в формулы (2.2) позволяет получить внешнее решение до требуемого порядка методом последовательных линейных приближений:

$$\begin{gathered} w_i(s,m) = -\int\limits_0^{\xi} f_i(\tilde\xi)d\tilde\xi + \varepsilon^2\left\{-\frac{\alpha_0+\rho_1}{4}s^2 f_i(\xi) - \frac{\alpha_1}{2}f_i(\xi)f(\xi)s - \right. \\ \left. -\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{\alpha_0-\rho_1}{4}\tilde\xi + \frac{\alpha_1}{2}f\left(\tilde\xi\right)\right)f_i\left(\tilde\xi\right)d\tilde\xi + \frac{\alpha_0-\rho_1}{4}(\xi+s)\int\limits_0^{\xi} f_i(\tilde\xi)d\tilde\xi\right\} + \ldots, \\ \xi = m - s, \;\; f(\xi) = f_2^2(\xi) + f_3^2(\xi). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Полученное решение (2.4) не может учесть условий, поставленных на ударной волне (1.10). Область неравномерности для рядов (2.4) впервые возникает при $s \sim \varepsilon^{-1}$, $\xi \sim 1$. Поэтому дополнительное внутреннее решение построим в прифронтовой области для переменных $n_1 = \varepsilon s$, $l = s - m$, $w_i = w_i(n_1, l)$, причем функции w_i представим асимптотическими рядами по степеням малого параметра ε. В результате на i-м шаге метода приходим к системе волновых уравнений:

$$h_{ji,n_1} + \frac{1}{2}(\alpha_0 - \rho_1)n_1 h_{ji,l} = H_{ji}, \quad h_{ji} = w_{ji,l}, \quad H_{j0} = 0, \quad j = 2,3, \tag{2.5}$$

где функции $H_{ji}(n_1, l)$ определяются предыдущими шагами метода. Общее решение (2.5) в нулевом приближении представим в характеристическом виде:

$$\begin{gathered} h_{j0}(n_1,l) = h_{j0}\left(l - \frac{1}{2}\gamma n_1^2\right), \quad \gamma = \frac{1}{2}(\alpha_0 - \rho_1), \\ w_{j0}(n_1,l) = \int h_{j0}(\zeta)d\zeta, \quad \zeta = l - \frac{1}{2}\gamma n_1^2. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Это решение показывает, что при $s \sim \varepsilon^{-1}$ необходимо учитывать уточнение полухарактеристической координаты l за счет неоднородности свойств среды. Переменная ζ лишь в предельном переходе при $n_1 \to 0$ дает исходное линейное представление характеристик.

Функции $w_{j1}(n_1, l)$, необходимые для определения последующей области неравномерности по пространственной координате, на следующем шаге метода задаются формулами:

$$\begin{gathered} w_{21}(n_1,l) = \frac{1}{2}(\gamma-\alpha_0)w_{20}(\zeta)n_1 + \frac{\gamma}{6}(2\alpha_0-\gamma)n_1^3 h_{20}(\zeta) - \frac{\alpha_1}{2}(h_{20}^3(\zeta) + \\ + h_{20}(\zeta)h_{30}^2(\zeta))n_1 + \vartheta_2(\zeta) + \eta_2(n1), \\ w_{31}(n_1,l) = \frac{1}{2}(\gamma-\alpha_0)w_{30}(\zeta)n_1 + \frac{\gamma}{6}(2\alpha_0-\gamma)n_1^3 h_{30}(\zeta) - \frac{\alpha_1}{2}(h_{30}^3(\zeta) + \\ + h_{30}(\zeta)h_{20}^2(\zeta))n_1 + \vartheta_3(\zeta) + \eta_3(n1), \end{gathered} \tag{2.7}$$

где функции $\vartheta_j(\zeta)$, $\eta_j(n_1)$ находятся из краевых условий (1.10) и сравнения с внешним решением (2.4). При этом решение не только определяется системой падающих характеристик, но и косвенно через функции $\eta_j(n_1)$ учитывает взаимодействие падающих характеристик с волной и отражение характеристик. Неизвестные функции $\vartheta_j(\zeta)$, $\eta_j(n_1)$ не влияют на оценку равномерности полученного решения. Неравномерность рядов для функций $w_j(n_1, l)$ возникает при $n_1 \sim \varepsilon^{-1/3}$, $\zeta \sim 1$. Поэтому следующими переменными выберем:

$$\begin{gathered} \theta = l - \frac{1}{2}\gamma n_1^2, \quad x = \varepsilon^{1/3}n_1 = \varepsilon^{4/3}s, \quad w_j = w_j(x,\theta), \\ w_j(x,\theta) = w_{j0}(x,\theta) + \varepsilon^{2/3}w_{j1}(x,\theta) + \varepsilon^{4/3}w_{j2}(x,\theta) + \ldots \end{gathered} \tag{2.8}$$

Запись уравнений движения (2.2) в переменных (2.8) приводит на нулевом шаге метода к уравнениям

$$w_{j0,\theta x}+\frac{1}{2}\gamma(\gamma-2\alpha_0)xw_{j0,\theta\theta}=0, \tag{2.9}$$

решения которых

$$h_{j0}=w_{j0,\theta},\quad h_{j0}=F_j(\sigma)=F_j\left(\theta-\frac{1}{6}\gamma(\gamma-2\alpha_0)x^3\right) \tag{2.10}$$

строятся вдоль вновь уточненных характеристик. Две рассмотренные выше внутренние области носят промежуточный характер. Они показывают, что неоднородность среды приводит к необходимости построения предельной цепочки рекуррентных внутренних задач, связанных со сжатием пространственной координаты s в $2k/(k+1)$ раз для k-ой задачи и уточнением полухарактеристики за счет накопления неоднородных свойств среды. Предельная внутренняя задача получается при $k\to\infty$. При этом происходит совместное изменение обеих координат, выполненное специальным образом:

$$n=\varepsilon^2 s=\lim_{k\to\infty}n_k,\;\; n_k=\varepsilon^{\frac{2k}{k+1}}s,\;\; r=s-m-\sum_{k=1}^{\infty}R_k\varepsilon^{2k}s^{k+1},\;\; w_i=w_i(n,r), \tag{2.11}$$

константы R_k вычисляются при последовательном сжатии пространственной переменной. Заметим, что $r=\varepsilon^{-2}\left(n-\sum_{k=1}^{\infty}R_kn^{k+1}\right)-m$, и определим функцию, отражающую искажение полухарактеристики:

$$\Psi(n)=\left(n-\sum_{k=1}^{\infty}R_kn^{k+1}\right)'=1-\sum_{k=1}^{\infty}R_k(k+1)n^k. \tag{2.12}$$

Записывая уравнения движения задачи в переменных (2.11) с учетом (2.12) и представляя неизвестные функции безразмерных перемещений $w_i(n,r)$ асимптотическими рядами по четным степеням малого параметра, получим, что нетривиальное решение при минимальной степени малого параметра возможно при

$$\Psi(n)=\sqrt{\frac{1+\rho_1 n}{1+\alpha_0 n}}. \tag{2.13}$$

С учетом (2.13) в нулевом приближении получим систему двух эволюционных уравнений:

$$\begin{gathered}(1+\alpha_0 n)\Psi y_{,n}+\frac{3}{2}(\alpha_1+\alpha_2 n)\Psi^4 yy_{,r}+(\alpha_0\Psi+(1+\alpha_0 n)\Psi')y=0,\\ (1+\alpha_0 n)z_{,n}+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2 n)\Psi^3 yz_{,r}=0,\\ y=w_{20,r}^2+w_{30,r}^2,\;\; z=w_{30,r}w_{20,r}^{-1},\end{gathered} \tag{2.14}$$

описывающих два волновых процесса. Один из них показывает изменение квадрата интенсивности воздействия, второй связан исключительно с изменением направления воздействия. В формулах (2.14) эти процессы представлены первым и вторым уравнениями соответственно. При этом изменение квадрата интенсивности сдвига y полностью определяется первым уравнением. На определение изменения угла направленности сдвига z влияют структура y, нелинейность задачи и неоднородность среды. Дополнительно отметим, что структура функции $\Psi(n)$ связана с предположением о линейной по пространственной координате неоднородности свойств среды. При выборе другой функциональной зависимости сам вид уравнений системы (2.14) и область значений пространственной координаты, для которой они решаются, могли бы измениться. В случае однородной среды ($\alpha_0,\ \rho_1=0$) функция $\Psi(n)$ перестает играть роль масштабного фактора и система эволюционных уравнений (2.14) сводится к системе уравнений для среды, однородной по своим свойствам [14].

Применяя к системе уравнений (2.14) преобразование годографа и вводя замену переменной, ее общее решение можно представить в виде соотношений

$$\begin{gathered} r-\frac{3}{2}y_1(n)N(n)=\Phi_1(y_1),\quad y_1^{3/2}N(n)+\int y_1^{1/2}\Phi_1'(y_1)dy_1=\Phi_2(z),\\ y_1(n)=y(1+\alpha_0 n)\Psi(n),\quad N(n)=\int(\alpha_1+\alpha_2 n)(1+\alpha_0 n)^{-2}(\Psi(n))^2dn, \end{gathered}\tag{2.15}$$

где $\Phi_1(y_1)$ и $\Phi_2(z)$ — неизвестные функции, определяемые из сопоставления внешнего и внутреннего решений.

В качестве одного из наиболее простых примеров решения данной задачи рассмотрим иррациональные краевые условия вида

$$w_{i,s}\big|_{s=0}=\sqrt{A_i-B_i m},\quad A_i,B_i=const,\quad i=2,3,\tag{2.16}$$

которые означают мгновенное образование двух совпавших волновых фронтов. Внешнее решение получим подстановкой краевых условий (2.16) в формулы (2.4). Сравнение внешнего решения и общего представления внутреннего решения (2.15) позволяет предположить, что для внутренней области выполняется условие

$$\begin{gathered} y_1=F\left(r-\frac{3}{2}y_1(n)N(n)\right)=a+b\left(r-\frac{3}{2}y_1(n)N(n)\right),\\ F=\Phi_1^{-1},\quad a=A_1+A_2,\quad b=B_1+B_2, \end{gathered}\tag{2.17}$$

где F – обратная функция к $\Phi_1(y_1)$. Тогда из формул (2.17) и (2.15) для поставленной задачи получим

$$\begin{gathered} y_1(n,r)=\frac{a+br}{1+\dfrac{3}{2}bN(n)},\\ z(n,r)=\sqrt{\frac{E_1\left(1+\dfrac{3}{2}bN(n)\right)^{1/3}+E_2(a+br)}{E_3\left(1+\dfrac{3}{2}bN(n)\right)^{1/3}+E_4(a+br)}},\\ E_1=-E_3=\frac{A_2B_1-B_2A_1}{b\left(1-\dfrac{3b}{4}(\alpha_1\alpha_0+\alpha_1\rho_1+\alpha_0+3\rho_1)\right)^{1/3}},\quad E_2=\frac{B_2}{b},\quad E_4=\frac{B_1}{b}. \end{gathered}\tag{2.18}$$

Для определения поля перемещений учитываем, что

$$w_{2,r}=z\sqrt{\frac{y_1}{(1+\alpha_0 n)\Psi(1+z^2)}},\quad w_{3,r}=\sqrt{\frac{y_1}{(1+\alpha_0 n)\Psi(1+z^2)}}.\tag{2.19}$$

Подставляя в соотношения (2.19) формулы (2.18) и интегрируя, получим

$$\begin{gathered} w_2(n,r)=\frac{2\left\{E_1\left(1+\dfrac{3}{2}bN(n)\right)^{1/3}+E_2(a+br)\right\}^{3/2}}{3B_2\left(1+\dfrac{3}{2}bN(n)\right)^{1/2}(1+\rho_1 n)^{1/4}(1+\alpha_0 n)^{1/4}}+\varphi_2(n),\\ w_3(n,r)=\frac{2\left\{E_3\left(1+\dfrac{3}{2}bN(n)\right)^{1/3}+E_4(a+br)\right\}^{3/2}}{3B_1\left(1+\dfrac{3}{2}bN(n)\right)^{1/2}(1+\rho_1 n)^{1/4}(1+\alpha_0 n)^{1/4}}+\varphi_3(n), \end{gathered}\tag{2.20}$$

где $\varphi_2(n)$ и $\varphi_3(n)$ — неизвестные функции, которые находим из краевых условий (1.10):

$$w_2|_{r=r(n)} = 0, \quad w_3|_{r=r(n)} = 0, \tag{2.21}$$

где функция $r(n)$ задает положение ударной волны. Положение переднего фронта ударной волны в нулевом приближении определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{gathered}\frac{dr_0}{dn} = \frac{1}{2}\frac{\alpha_1 + \alpha_2 n}{1+\alpha_0 n}\Psi^3(n)\left(w_{20,r}^2 + w_{30,r}^2\right), \\ r(n) = r_0(n) + \varepsilon^2 r_2(n) + \ldots, \quad r_0(0) = 0.\end{gathered} \tag{2.22}$$

Найденная функция $r_0(n)$ позволяет получить неизвестные функции:

$$\begin{gathered}\varphi_2(n) = -\frac{2A_2^{3/2}}{3B_2(1+\rho_1 n)^{1/4}(1+\alpha_0 n)^{1/4}\left(1 - \dfrac{3b}{4}(\alpha_1\alpha_0 + \alpha_1\rho_1 + \alpha_0 + 3\rho_1)\right)^{1/2}}, \\ \varphi_3(n) = -\frac{2A_1^{3/2}}{3B_1(1+\rho_1 n)^{1/4}(1+\alpha_0 n)^{1/4}\left(1 - \dfrac{3b}{4}(\alpha_1\alpha_0 + \alpha_1\rho_1 + \alpha_0 + 3\rho_1)\right)^{1/2}}.\end{gathered} \tag{2.23}$$

В результате находим точное решение задачи для нулевого шага метода. Построенное решение — простейшее, так как координата r, связанная со временем, имеет ту же форму зависимости, что и нагружение на границе. В более общем случае решение будет отражать и затухание импульса по координате, и его искажение.

3. Заключение. В статье рассмотрена одномерная краевая задача о динамическом деформировании нелинейно-упругой несжимаемой среды, вызванном переменной сдвиговой нагрузкой на границе, с распространением по среде общего переднего фронта волновых процессов. В общем случае возможно существование двух типов ударных волн: плоскополяризованной волны и ударной волны круговой поляризации. Влияние фактора неоднородности свойств материала приводит к необходимости изменять в прифронтовой области ударной волны все безразмерные переменные внутренней задачи метода малого параметра специальным образом. Показано, что в этом случае решение определяется системой эволюционных уравнений. При этом одно из уравнений системы отвечает за изменение величины первоначального сдвига, а другое – за изменение его направленности. Получено общее решение этой системы, построено частное решение для иррациональных краевых условий.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бленд, Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Р. Бленд. – М. : Мир, 1972. – 183 с.

[2] *Гельфанд, И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И. М. Гельфанд // Успехи матем. наук. – 1959. – Т. 14. – № 9. – С. 87-158.

[3] *Рождественский, Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.

[4] *Уизем, Дж.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1977. – 622 с.

[5] *Ван-Дайк, М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 239 с.

[6] *Буренин, А. А.* Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова. // Известия СГУ. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2009. – Т. 9. – Вып. 4. – Ч. 2. – С. 14–24.

[7] *Рагозина, В. Е.* Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.

[8] *Рагозина, В. Е.* Эволюционное уравнение для одномерных сдвиговых волн разрыва деформаций / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2011. – № 2(83). – С. 91–104.

[9] *Рагозина, В. Е.* Влияние неоднородности среды на эволюционные уравнения плоских ударных волн / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // ПМТФ. – 2013. – Т. 54. – № 5. – С. 142–153.

[10] *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1,2. Изд-е 2-ое испр. и дополн. / Л. И. Седов.– М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с. Т. 2. – 584 с.

[11] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.

[12] *Куликовский, А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – М. : Московский Лицей, 1998. – 412 с.

[13] *Буренин, А. А.* Динамика упругих сред при ударных воздействиях : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А. А. Буренин. – Владивосток, 1990. – 26 с.

[14] *Рагозина, В. Е.* Об ударной деформации несжимаемого полупространства под действием сдвигающей нагрузки переменного направления / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17. – № 2(58). – С. 87–96.

Рагозина Виктория Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: ragozina@vlc.ru

Иванова Юлия Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования отдела механики деформируемого твердого тела, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток

e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru

V. E. Ragozina, Y. E. Ivanova

THE PERTURBATION METHOD IN ONE-DIMENSIONAL DYNAMICS OF INHOMOGENEOUS INCOMPRESSIBLE ELASTIC HALF-SPACE UNDER THE ACTION OF SHEAR LOADING OF A VARIABLE DIRECTION

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences

Abstract. The solution of one-dimensional boundary value problems for the variable shear loading at the boundary of nonlinear elastic incompressible weakly inhomogeneous half-space is obtained by the matched asymptotic expansions method. It is shown that the solution in the frontal region is determined by the system of evolution equations for the changes in the square of the shear intensity and shear direction. Its general solution is obtained, the particular solution for irrational functions of loading on the boundary is constructed.

Keywords: nonlinear elastic incompressible inhomogeneous medium, transverse shock waves, shear load with variable directivity, the evolution equations system, the evolution equation for the change of shear intensity, the evolution equation for the change of shear direction.

REFERENCES

[1] *Bland, D. R.* Nonlinear dynamic theory of elasticity / D. R. Bland. – M. : Mir, 1972. – 183 p.

[2] *Gelfand, I. M.* Some problems in the theory of quasilinear equations / I. M. Gelfand // Successes of Mathematical Sciences. – 1959. – Vol. 14. – No. 9. – P. 87–158.

[3] *Rozhdestvensky, B. L.* Systems of quasilinear equations and their applications in gas dynamics/ B. L. Rozhdestvensky, N. N. Yanenko. – M. : Nauka, 1978. – 688 p.

[4] *Whitham, G. B.* Linear and Nonlinear Waves / G. B. Whitham. – M. : Mir, 1977. – 622 p.

[5] *Van Dyke, M.* Perturbation methods in fluid mechanics /M. Van Dyke.– M. : Mir, 1967. – 239 p.

[6] *Burenin, A. A.* The evolutionary equation for wave processes of the shift deformation / A. A. Burenin, V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Proceedings of the SSU. Series "Mathematics. Mechanics. Informatics". – 2009. – Vol. 9. – No. 4. – Ch. 2. – P. 14–24.

[7] *Ragozina, V. E.* About the evolutionary equations of flat problems of a shock straining of solids / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Computational Continuum Mechanics. – 2009. – Vol. 2. – No 3. – P. 82–95.

[8] *Ragozina, V. E.*The evolutionary equation for one-dimensional shift waves of a rupture of strains / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. – 2011. – № 2(83). – P. 91–104.

[9] *Ragozina, V. E.* Effect of the medium inhomogeneity on the evolution equation of plane shock waves / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2013. – Vol. 54. – No 5. – P. 809–818.

[10] *Sedov, L. I.* Continuum mechanics. Vol. 1,2. 2nd edition revised and updated / L. I. Sedov. – M. : Nauka, – 1973. – Vol. 1. – 536 p. Vol. 2. – 584 p.

[11] *Tomas, T.* Plastic Flow and Fracture in Solids / T. Y. Thomas – Academic Press, 1961. – 267 p.

[12] *Kulikovskii, A. G.* Nonlinear waves in elastic mediums / A. G. Kulikovskii, E. I. Sveshnikova. – M. : Moscow Lyceum, 1998. – 412 p.

[13] *Burenin, A. A.* Dynamics of elastic mediums under impact loading / A. A. Burenin. – Dissertation ... Dr. Sci. Vladivostok, 1990. – 236 p.

[14] *Ragozina, V. E.* On the impact deformation of an incompressible half-space under action of a shear load of variable direction / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2014. – Vol. 8. – No 3. – P. 1–10.

Ragozina, Victoria Evgenevna

Candidate of Phys.&Math., Senior researcher, Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok

Ivanova, Yulia Evgenevna

Candidate of Phys.&Math., Researcher, Laboratory of Nonlinear dynamics of deformation, Department of Mechanics of Deformable Solid, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok