

А. С. Бегун¹, Л. В. Ковтанюк¹, А. О. Лемза²

ПОЛЗУЧЕСТЬ И РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МАТЕРИАЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ЕГО РОТАЦИОННОМ ДВИЖЕНИИ

¹Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

²Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В рамках теории больших деформаций рассматривается деформирование материала с нелинейными упругими и вязкими свойствами, находящегося в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при повороте внутренней поверхности. Исследуется равноускоренное движение внутреннего цилиндра, последующее его движение с постоянной скоростью и дальнейшее равнозамедленное движение до остановки. Рассчитаны напряжения, обратимые и необратимые деформации, перемещения, исследована релаксация напряжений после полной остановки цилиндра.

Ключевые слова: большие деформации, упругость, ползучесть, остаточные напряжения, необратимые деформации.

УДК: 539.374

Для значительного формоизменения некоторых материалов предпочтительным оказывается способ их холодной формовки в условиях ползучести [1]. Этим вызван интерес к постановкам задач теории больших деформаций, когда при кинематическом воздействии на материалы необратимые деформации накапливаются в условиях

© Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О., 2016

Бегун Александра Сергеевна

e-mail: asustinova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iasp.dvo.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией механики необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Лемза Александр Олегович

e-mail: alsu-24@yandex.ru, аспирант, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований «Дальний Восток» (0262-2015-0064, 0262-2015-0065).

Поступила 19.07.2016

ползучести при низкой температуре. Задача о деформировании материала, расположенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами, при повороте внутреннего цилиндра за счет приложенного к нему момента закручивания была рассмотрена ранее [2]. Здесь рассмотрен аналогичный случай, но при переменной скорости поворота жесткой поверхности. Выбор кинематического краевого условия позволяет исследовать релаксацию напряжений после полной остановки вращающейся жесткой поверхности.

1. Основные модельные соотношения. Для решения задачи будем использовать математическую модель больших деформаций, в которой обратимая и необратимая составляющие полных деформаций определяются дифференциальными уравнениями изменения [3]–[5]. Основное достоинство этой модели — следование требованиям классической теории упругопластичности, когда пластические деформации в областях упругого деформирования и при разгрузке изменяются так же, как при жестком перемещении среды. В прямоугольной системе пространственных декартовых координат Эйлера x_i кинематика среды задается соотношениями:

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} [(\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj})], \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
r_{ij} &= \omega_{ij} + z_{ij}(e_{ks}, \varepsilon_{ks}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \\
z_{ij} &= A^{-1} [(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})B^2 + B(\varepsilon_{ik}e_{ks}e_{sj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{sj}) + e_{ik}\varepsilon_{ks}e_{st}e_{tj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{st}e_{tj}], \\
A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1, \\
E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}.
\end{aligned} \tag{1}$$

В зависимостях (1) u_i и v_i — компоненты перемещений и скоростей точек среды; d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} и p_{ij} — их обратимая и необратимая составляющие; D/Dt — оператор используемой объективной производной тензоров по времени, которая записана для произвольного тензора n_{ij} ; r_{ij} — компоненты тензора вращений. Источники γ_{ij} и $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij}$ в уравнениях изменения необратимых и обратимых деформаций — скорости их накопления. Когда $\gamma_{ij} = 0$, компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так же, как при повороте системы координат, или, что то же, как при движении среды без деформирования ($\frac{Dp_{ij}}{Dt} = 0$). При равенстве нулю нелинейной составляющей z_{ij} тензора вращений r_{ij} производная в (1) переходит в производную Яумана.

Следуя [3]–[5], полагаем, что используемый термодинамический потенциал (плотность распределения свободной энергии ψ) — изотропная функция только обратимых

деформаций. Тогда, согласно закону сохранения энергии, напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и связаны с ними формулой, аналогичной формуле Мурнагана в нелинейной теории упругости [6]. Запишем данное соотношение для рассматриваемого здесь случая несжимаемой среды:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (2)$$

В (2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p — неизвестная функция добавочного гидростатического давления. Для упругого потенциала $W = \rho_0\psi$, где ρ_0 — плотность, принимаем его разложение в ряд Маклорена относительно свободного состояния:

$$\begin{aligned} W &= -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1 I_2 - \chi I_1^3 + \dots, \\ I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{ks}e_{sk}, \quad I_2 = e_{ks}e_{sk} - e_{ks}e_{st}e_{tk} + \frac{1}{4}e_{ks}e_{st}e_{tn}e_{nk}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь μ — модуль сдвига, b, χ — постоянные материала.

Диссипативный механизм деформирования, определяющий накопление необратимых деформаций, связан с реологическими и пластическими свойствами материала. Далее будем считать, что необратимые деформации накапливаются с начала процесса деформирования и связаны с ползучестью материала.

Для задания соответствующего диссипативного механизма деформирования введем термодинамический потенциал $V(\sigma_{ij})$ в форме степенного закона ползучести Нортонна [7]:

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma_{ij} = \dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4)$$

В (4) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, B, n — параметры ползучести материала, $\dot{\varepsilon}'_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести.

Так как пластическое течение в материале не возникает, напряженное состояние не должно достигать поверхности текучести. Используя в качестве такой поверхности условие текучести Треска, имеем, что в течение всего процесса деформирования

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| < 2k, \quad (5)$$

где k — предел текучести материала.

2. Постановка и решение задачи. Рассмотрим деформирование несжимаемого материала, расположенного в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями с недеформируемыми стенками, при повороте внутренней поверхности радиуса $r = r_0$ с заданной угловой скоростью ω_0 , в то время как внешняя поверхность радиуса $r = R$ остается неподвижной. В дальнейшем используется цилиндрическая система координат r, φ, z . Считаем, что в рассматриваемом случае все точки среды

движутся по окружностям, тогда, согласно соотношениям (1), кинематика среды задается зависимостями:

$$u_r = r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta,$$

$$d_{rr} = -\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad v_\varphi = r\omega = r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \quad \omega_{r\varphi} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \quad r_{r\varphi} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(1 - e_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2},$$

где $\theta = \theta(r, t)$ — центральный угол закручивания.

На жестких стенках выполняются условия прилипания. Тогда граничные условия запишем в виде:

$$\vec{u}\Big|_{r=R} = \vec{v}\Big|_{r=R} = 0, \quad \omega\Big|_{r=r_0} = \omega_0, \quad \theta\Big|_{r=r_0} = \theta_0 = \int_0^t \omega_0 dt, \quad \sigma_{rr}\Big|_{r=R} = a_0. \quad (7)$$

В (7) ω_0, a_0 — задаваемые функции. Учитывая, что для задач данного класса диагональные компоненты тензоров деформаций являются малыми более высокого порядка по сравнению с недиагональными компонентами [8–11], далее ограничимся слагаемыми первого порядка по диагональным компонентам и второго — по недиагональным. Данное ограничение не является принципиальным для решения задачи, но позволяет значительно упростить вычисления. Из формул (2) и (3) в рассматриваемом случае найдем напряжения в среде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\varphi\varphi} + \mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{\varphi\varphi} + 2be_{rr} + \mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{zz} &= -p - 2\mu + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - 2\mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi}, \quad \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{r\varphi}} = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пренебрегая силами инерции, т.е. находясь в рамках квазистатического приближения, уравнения равновесия запишем в форме

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (9)$$

Интегрируя уравнения (9), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{c(t)}{2\mu r^2}. \quad (10)$$

Учитывая замечание перед формулами (8), в потенциале $V(\sigma_{ij})$, принимающем в цилиндрической системе координат для рассматриваемого случая форму

$$V(\sigma_{ij}) = B \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{r\varphi}\sigma_{\varphi r} \right]^{\frac{n}{2}},$$

ограничимся слагаемыми до порядка n по напряжениям, тогда для скоростей деформаций ползучести, согласно (4) и (8), получим соотношения:

$$\varepsilon_{r\varphi}^\nu = (-1)^n 2^{n-1} B n \sigma_{r\varphi}^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^\nu = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^\nu = \frac{\varepsilon_{r\varphi}^\nu}{2} \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}. \quad (11)$$

Из соотношений $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^\nu$, (6), (10) и (11), используя условия прилипания (7) на стенке $r = R$, получим зависимости для угловой скорости и угла поворота:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\dot{c}}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{(-1)^n 2^{n-1} B n c^{n-1}}{1-n} \left(\frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right), \\ \theta &= \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + (-1)^n \frac{B n 2^{n-1}}{1-n} c_1(t) \left(\frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right), \\ c_1(t) &= \int_0^t c^{n-1}(t) dt.\end{aligned}\quad (12)$$

С учетом граничных условий (7) на внутренней поверхности $r = r_0$, из (12) следует дифференциальное уравнение для неизвестной функции $c_1(t)$:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\dot{c}_1^{\frac{1}{n-1}}(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + (-1)^n \frac{B n 2^{n-1}}{1-n} c_1(t) \left(\frac{1}{r_0^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right), \quad c_1(0) = 0. \quad (13)$$

Используя уравнения изменения компонент деформаций из (1), получим систему уравнений для нахождения компонент тензоров упругих деформаций $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}$ и деформаций ползучести $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}$ и $p_{r\varphi}$, которая в рассматриваемом приближении имеет вид:

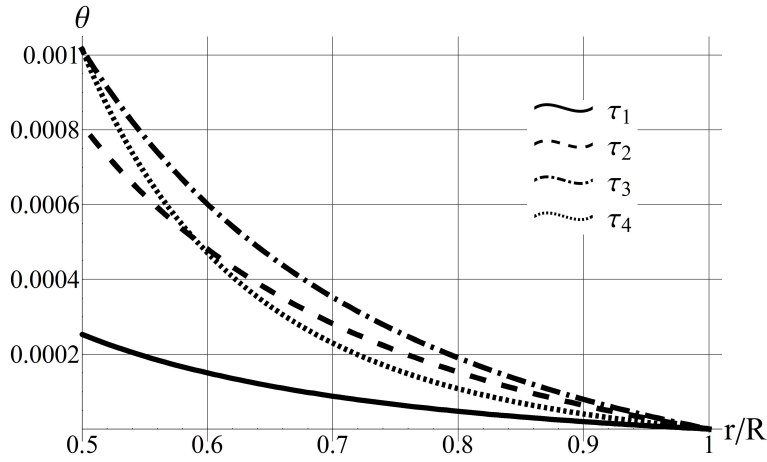
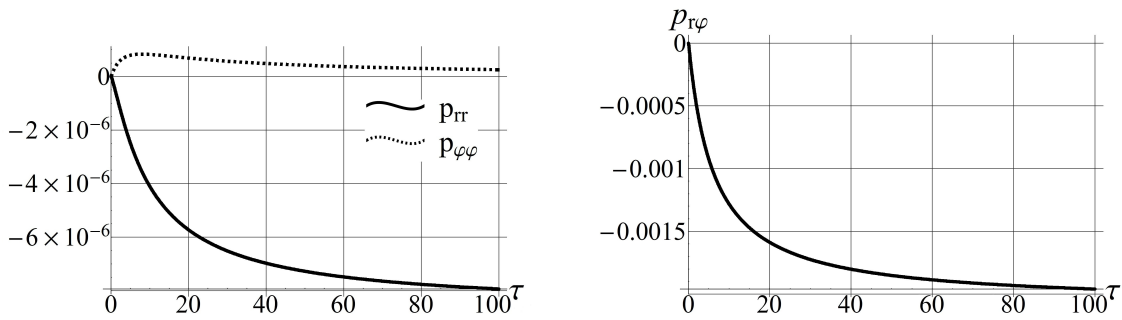
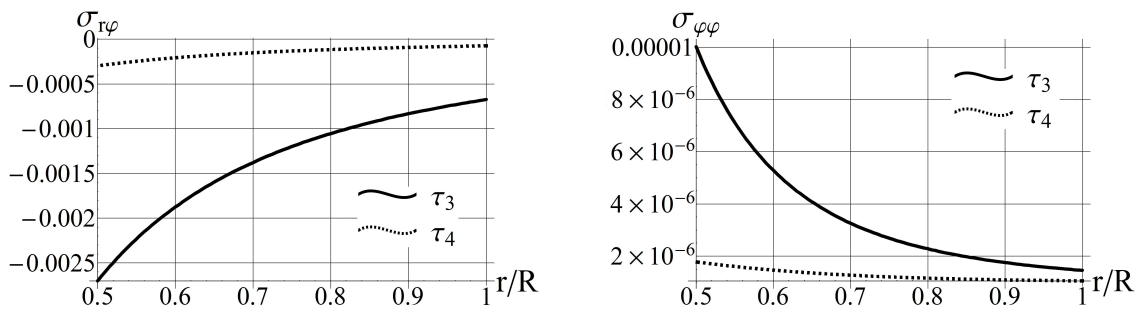
$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} &= \varepsilon_{r\varphi}^\nu, \quad \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = -\varepsilon_{r\varphi}^\nu \frac{p_{\varphi\varphi} - e_{r\varphi}^2}{e_{r\varphi}} + \frac{4\varepsilon_{r\varphi} p_{r\varphi}}{2 + e_{r\varphi}^2} \left(1 + p_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi} \right), \\ e_{rr} &= p_{\varphi\varphi} - \frac{3}{2} e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2, \quad e_{rr} + e_{\varphi\varphi} = -e_{r\varphi}^2.\end{aligned}\quad (14)$$

Система (14) интегрируется численно. Компонента напряжений σ_{rr} находится из первого уравнения равновесия (9) с использованием краевого условия из (7). Затем из зависимостей (8) определяются гидростатическое давление p , компоненты напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} .

Полагаем, что скорость движения внутренней цилиндрической поверхности сначала увеличивается ($0 \leq t \leq t_1$), затем становится постоянной ($t_1 \leq t \leq t_2$), потом уменьшается до нуля ($t_2 \leq t \leq t_3$) и далее равна нулю ($t \geq t_3$). Тогда значение ω_0 выберем таким:

$$\omega_0 = \begin{cases} \alpha^2 t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \alpha^2 t_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ \alpha^2 t_1 - \beta^2 (t - t_2), & t_2 \leq t \leq t_3, \\ 0, & t \geq t_3. \end{cases}$$

Расчеты проводились в безразмерных переменных $\tilde{r} = r/R, \tau = \alpha t$ при значениях постоянных $k/\mu = 0.003, r_0/R = 0.5, n = 3, B\mu^2/\alpha = 3.5$. На рис. 1 показан угол поворота θ в моменты времени τ_1, τ_2, τ_3 и $\tau_4 \gg \tau_3$. Изменение необратимых деформаций в точках внутренней поверхности $r = r_0$ показано на рис. 2. Релаксация компонент напряжений $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (наибольшей из диагональных компонент) после остановки внутренней поверхности приведена на рис. 3.

Рис. 1. Угол поворота θ Рис. 2. Изменение необратимых деформаций при $r = r_0$ Рис. 3. Релаксация компонент напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$

Заключение. Таким образом, решена задача о деформировании материала с нелинейными упругими и вязкими свойствами, находящегося в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при повороте внутренней поверхности с задаваемой скоростью вращения. Произведен расчет напряжений и деформаций в среде, рассмотрена релаксация напряжений в теле после полной остановки цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Олейников А. И., Пекарш А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. М. : Эком, 2009. 109 с.
- [2] Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О. Необратимое деформирование материала между жесткими коаксиальными цилиндрами в условиях ползучести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 14–21.
- [3] Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
- [4] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток : Дальнаука, 2013. 312 с.
- [5] Белых С. В., Бормотин К. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 145–157.
- [6] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980. 512 с.
- [7] Norton F. H. The Creep of Steel at High Temperatures. Y. : McGraw Hill Book Company, 1929. 110 p.
- [8] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 2. С. 143–151.
- [9] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С. Вискозиметрическое течение упруговязкопластической среды, ослабленной слоем более податливого материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 83–99.
- [10] Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежесткого сцепления // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 2. С. 146–158.
- [11] Бегун А. С., Буренин А. А., Жилин С. Г., Ковтанюк Л. В. Об учете упругих свойств вязкопластической смазки между соосными вращающимися цилиндрами // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 3. С. 213–223.

A. S. Begun¹, L. V. Kovtanyuk¹, A. O. Lemza²

CREEP AND STRESS RELAXATION IN THE CYLINDRICAL LAYER OF A MATERIAL AT ITS ROTATIONAL MOTION

¹*Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia*

²*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

Abstract. This paper considers a deformation process of the material with nonlinear elastic and viscous properties. The material is placed between two rigid coaxial cylindrical surfaces and deformed at the rotation of the internal one. The rotation is considered to be uniformly accelerated, uniform and then uniformly retarded until rotation stopping. Stresses, reversible and irreversible strains, displacements were calculated. Stress relaxation after internal cylinder rotation stopping was investigated.

Keywords: large strains, elasticity, creep, residual stresses, irreversible deformations.

REFERENCES

- [1] Oleinikov A. I., Pekarsh A. I. Integrated design of the manufacturing processes of integral panels. M. : Ekom, 2009. 109 p. (in Russian).
- [2] Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. Irreversible deformations of the material between the rigid coaxial cylinders under creep // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 3 (21). P. 14–21. (in Russian).
- [3] Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Kovtanyuk L. V. A simple model of finite strains in an elastoplastic medium // Doklady Akademii Nauk. 1996. Vol. 347. № 2. P. 199–201. (in Russian).
- [4] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible strains and elastic aftereffect. Vladivostok : Dal'nauka, 2013. 312 p. (in Russian).
- [5] Belykh S. V., Bormotin K. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. On large isothermal deformation of materials with elastic, viscous and plastic properties // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 4 (22). P. 145–157. (in Russian).
- [6] Lur'e A. I. Nonlinear theory of elasticity. M. : Nauka, 1980. – 512 p. (in Russian).
- [7] Norton F. H. The Creep of Steel at High Temperatures. Y. : McGraw Hill Book Company, 1929. 110 p.

Begun Alexandra Sergeevna

e-mail: asustinova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Junior Researcher of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Kovtanyuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Lemza Alexander Olegovich

e-mail: alsu-24@yandex.ru, Postgraduate Student, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

[8] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Ustinova A. S. Accounting the elastic properties of a non-Newtonian material under its viscosimetric flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2008. Vol. 49. № 2. P. 143–151. (in Russian).

[9] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Ustinova A. S. A viscosimetric current of the elastoviscoplastic environment weakened by a layer of more pliable material // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 2 (8). P. 83–99. (in Russian).

[10] Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Flow of an elastoviscoplastic material between rotating cylindrical surfaces with nonrigid cohesion // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56. № 2. P. 146–158. (in Russian).

[11] Begun A. S., Burenin A. A., Zhilin S. G., Kovtanyuk L. V. Accounting the elastic properties of viscoplastic lubricant between coaxial rotating cylinders // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56. № 3. P. 213–223. (in Russian).