*Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4 (30). С. 12–23*

*Г. С. Тлюстангелов*

# РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАСТЕКАЮЩЕМСЯ ВЯЗКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ И ОСЕВОГО ДВИЖЕНИЯ

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

***Аннотация.*** Исследуется эволюция во времени трехмерной картины возмущений, наложенных на радиально-вращательное растекание либо сток подверженного осевому течению вязкого цилиндрического слоя, параметры которого зависят от времени и радиальной координаты. Движение границ цилиндрического слоя задано как в основном движении, так и в возмущенном. На основе метода интегральных соотношений [1], [2], примененного к линеаризованной задаче в возмущениях, выводятся достаточные оценки экспоненциальной устойчивости основного движения.

***Ключевые слова***: вязкая жидкость, растекание, сток, возмущение, осевое течение, метод интегральных соотношений, неравенства Фридрихса, оценки устойчивости.

*УДК*: 532.517

## 1. Невозмущенное течение и его параметры.

Рассмотрим течение ньютоновской вязкой жидкости с плотностью $\rho$ и динамической вязкостью $\mu$, реализуемое в цилиндрическом слое

$$\Omega_t = \{a(t) < r < b(t),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\infty < z < \infty\}, \tag{1}$$

где $(r, \theta, z)$ – цилиндрическая система координат. Функции $a(t)$ и $b(t)$ известны и в силу несжимаемости связаны условием $b^2 - a^2 = b_0^2 - a_0^2$; $a_0 = a(t_0)$, $b_0 = b(t_0)$. Движение представляет собой комбинацию радиально-вращательного растекания либо стока и осевого течения и характеризуется нестационарными полями скоростей, скоростей деформаций и девиатора тензора напряжений

$$v_r^\circ = \frac{C(t)}{r}, \quad v_\theta^\circ = v_\theta^\circ(r,t), \quad v_z^\circ = v_z^\circ(r,t) \tag{2}$$

$$v_{rr}^\circ = -v_{\theta\theta}^\circ = -\frac{C(t)}{r^2}, \quad v_{r\theta}^\circ = \frac{1}{2}\Big(v_{\theta,r}^\circ - \frac{v_\theta^\circ}{r}\Big), \quad v_{rz}^\circ = \frac{1}{2}v_{z,r}^\circ \tag{3}$$

---



*Тлюстангелов Галим Султанович*
`e-mail:` gs_angelov@mail.ru, аспирант механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848).

Поступила 15.10.2016

$$s^\circ_{rr} = -s^\circ_{\theta\theta} = -\frac{2\mu C(t)}{r^2}, \quad s^\circ_{r\theta} = \mu\Big(v^\circ_{\theta,r} - \frac{v^\circ_\theta}{r}\Big), \quad s^\circ_{rz} = \mu v^\circ_{z,r} \tag{4}$$

где $2\pi C(t)$ – заданный расход через окружность любого радиуса от $a(t)$ до $b(t)$, связанный с этими функциями соотношениями

$$a\dot a = b\dot b = C; \quad a^2 = a_0^2 + 2\int\limits_{t_0}^{t} C(\tau)\,d\tau, \quad b^2 = b_0^2 + 2\int\limits_{t_0}^{t} C(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Из уравнения движения в проекции на угловое направление

$$\rho\Big(v^\circ_{\theta,t} + \frac{C}{r}\,v^\circ_{\theta,r} + \frac{C}{r^2}\,v^\circ_\theta\Big) = \frac{1}{r^2}(r^2 s^\circ_{r\theta})_{,r} \tag{6}$$

и определяющего соотношения вязкой жидкости (4) следует параболическое уравнение для компоненты $v^\circ_\theta$:

$$\nu v^\circ_{\theta,rr} + \frac{\nu - C}{r}\,v^\circ_{\theta,r} - \frac{\nu + C}{r^2}\,v^\circ_\theta = v^\circ_{\theta,t}\,, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{7}$$

А из уравнения движения в проекции на осевое направление

$$\rho\Big(v^\circ_{z,t} + \frac{C}{r}\,v^\circ_{z,r}\Big) = -p^\circ_{,z} + \frac{1}{r}(r s^\circ_{rz})_{,r} \tag{8}$$

и определяющего соотношения вязкой жидкости (4) получаем параболическое уравнение для компоненты $v^\circ_z$:

$$-\frac{1}{\rho}p^\circ_{,z} + \nu v^\circ_{z,rr} + \frac{\nu - C}{r}\,v^\circ_{z,r} = v^\circ_{z,t}\,, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \tag{9}$$

где $p^\circ_{,z} = -k(t)$ – заданная функция времени.

В качестве граничных условий выберем условия прилипания к расширяющимся и одновременно вращающимся стенкам слоя $\Omega_t$:

$$v^\circ_\theta|_{r=a(t)} = v^\circ_{\theta a}(t), \quad v^\circ_\theta|_{r=b(t)} = v^\circ_{\theta b}(t), \tag{10}$$

и условия непротекания:

$$v^\circ_z|_{r=a(t)} = v^\circ_z|_{r=b(t)} = 0. \tag{11}$$

Требуется также начальное условие при $t = t_0$, согласованное с (10) и (11):

$$v^\circ_\theta|_{t=t_0} = U(r); \quad U(a_0) = v^\circ_{\theta a}(t_0), \;\; U(b_0) = v^\circ_{\theta b}(t_0), \quad v^\circ_z|_{t=t_0} = F(r). \tag{12}$$

В результате интегрирования задачи (7), (10) и (12) и подстановки $v^\circ_\theta(r,t)$ в спроектированное на радиус уравнение движения

$$\frac{\rho}{r}\Big(\dot C - v^{\circ 2}_\theta - \frac{C^2}{r^2}\Big) = -p^\circ_{,r} \tag{13}$$

выводится уравнение для нахождения давления $p^\circ(r,t)$.

**2. Трехмерная картина возмущений.**

Помеченные выше верхним индексом $\circ$ величины будем относить к невозмущенному плоскому радиально-вращательному растеканию-стоку цилиндрического слоя $\Omega_t$. Наложим на это течение трехмерную картину возмущений $\delta v_\alpha$, $\delta v_{\alpha\beta}$, $\delta s_{\alpha\beta}$, $\delta p$.

Так как выбранное основное движение не зависит от угловой и осевой координат $\theta$ и $z$, отделим множители с этими переменными

$$\begin{gathered}\delta v_\alpha(r,\theta,z,t)=V_{\alpha(ns)}(r,t)e^{i(n\theta+sz)},\quad n=0,1,2,\ldots,\quad s>0\\ \delta s_{\alpha\beta}(r,\theta,z,t)=S_{\alpha\beta(ns)}(r,t)e^{i(n\theta+sz)},\quad (\alpha,\beta)=(r,\theta,z)\\ \delta p(r,\theta,z,t)=P_{(ns)}(r,t)e^{i(n\theta+sz)},\end{gathered}\tag{14}$$

рассматривая отдельные гармоники неизвестных величин по $\theta$ и $z$. Для краткости будем опускать у комплекснозначных амплитуд $V_{\alpha(ns)}$, $S_{\alpha\beta(ns)}$, $P_{(ns)}$ нижние индексы $n$ и $s$ в скобках.

Подставляя (14) в линеаризованные уравнения движения, условие несжимаемости и определяющие соотношения вязкой жидкости, получим

$$\begin{gathered}\rho\Big(V_{r,t}+\frac{C}{r}\,V_{r,r}-\frac{C}{r^2}\,V_r+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ V_r+isv_z^\circ V_r-\frac{2}{r}\,v_\theta^\circ V_\theta\Big)=\\ =-P_{,r}+S_{rr,r}+\frac{in}{r}\,S_{r\theta}+isS_{rz}+\frac{1}{r}(S_{rr}-S_{\theta\theta})\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}\rho\Big(V_{\theta,t}+\frac{C}{r}\,V_{\theta,r}+\frac{C}{r^2}V_\theta+v_{\theta,r}^\circ V_r+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ V_\theta+\frac{1}{r}\,v_\theta^\circ V_r+isv_z^\circ V_\theta\Big)=\\ =-\frac{in}{r}\,P+S_{r\theta,r}+\frac{in}{r}\,S_{\theta\theta}+isS_{\theta z}+\frac{2}{r}\,S_{r\theta}\end{gathered}\tag{16}$$

$$\rho\Big(V_{z,t}+\frac{C}{r}\,V_{z,r}+v_{z,r}^\circ V_r+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ V_z+isv_z^\circ V_z\Big)=-isP+S_{rz,r}+\frac{in}{r}\,S_{\theta z}+isS_{zz}+\frac{1}{r}\,S_{rz}\tag{17}$$

$$V_{r,r}+\frac{1}{r}\,V_r+\frac{in}{r}\,V_\theta+isV_z=0\tag{18}$$

$$\begin{gathered}S_{rr}=2\mu V_{r,r},\quad S_{r\theta}=\mu\Big(\frac{in}{r}\,V_r+V_{\theta,r}-\frac{1}{r}\,V_\theta\Big),\quad S_{\theta\theta}=\frac{2\mu}{r}(V_r+inV_\theta),\\ S_{\theta z}=i\mu\Big(sV_\theta+\frac{n}{r}\,V_z\Big),\quad S_{zz}=2i\mu sV_z,\quad S_{rz}=\mu(isV_r+V_{z,r}).\end{gathered}\tag{19}$$

Подставим соотношения (19) в (15) – (18). Получим замкнутую систему четырех уравнений относительно четырех комплекснозначных функций $V_r$, $V_\theta$, $V_z$ и $P$:

$$\begin{gathered}\rho\Big(V_{r,t}+\frac{C}{r}\,V_{r,r}-\frac{C}{r^2}\,V_r+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ V_r+isv_z^\circ V_r-\frac{2}{r}\,v_\theta^\circ V_\theta\Big)=\\ =-P_{,r}+2\mu V_{r,rr}+\mu\Big(-\frac{n^2}{r^2}V_r+\frac{in}{r}V_{\theta,r}-\frac{in}{r^2}V_\theta\Big)+\\ +is\mu\Big(V_{z,r}+isV_r\Big)+\frac{2\mu}{r}\Big(V_{r,r}-\frac{in}{r}V_\theta-\frac{1}{r}V_r\Big)\end{gathered}\tag{20}$$

$$\begin{gathered}\rho\Big(V_{\theta,t}+\frac{C}{r}\,V_{\theta,r}+\frac{C}{r^2}V_\theta+v_{\theta,r}^\circ V_r+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ V_\theta+\frac{1}{r}\,v_\theta^\circ V_r+isv_z^\circ V_\theta\Big)=\\ =-\frac{in}{r}\,P+\mu\Big(-\frac{in}{r^2}V_r+\frac{in}{r}V_{r,r}+V_{\theta,rr}+\frac{1}{r^2}V_\theta-\frac{1}{r}V_{\theta,r}\Big)+\\ +\frac{2\mu in}{r^2}\Big(inV_\theta+V_r\Big)-s\mu\Big(sV_\theta+\frac{n}{r}V_z\Big)+\frac{2\mu}{r}\Big(\frac{in}{r}V_r+V_{\theta,r}-\frac{1}{r}V_\theta\Big)\end{gathered}\tag{21}$$

$$\begin{gathered}\rho\Big(V_{z,t}+\frac{C}{r}\,V_{z,r}+v_{z,r}^\circ V_r+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ V_z+isv_z^\circ V_z\Big)=-isP+\mu\Big(V_{z,rr}+isV_{r,r}\Big)-\\ -\frac{n\mu}{r}\Big(sV_\theta+\frac{n}{r}V_z\Big)-2\mu s^2V_z+\frac{\mu}{r}\Big(V_{z,r}+isV_r\Big)\end{gathered}\tag{22}$$

$$V_{r,r} + \frac{1}{r}\,V_r + \frac{in}{r}\,V_\theta + isV_z = 0. \tag{23}$$

Положим, что в возмущенном течении границы слоя $\Omega_t$ движутся так же, как и в основном, и на них сохраняются условия прилипания

$$r = a(t) \ \text{ и } \ r = b(t): \quad V_r = V_\theta = V_z = 0. \tag{24}$$

**3. Применение метода интегральных соотношений.**

Умножим обе части уравнений (20) – (22) соответственно на $r\bar V_r$, $r\bar V_\theta$ и $r\bar V_z$ (верхняя черта означает комплексное сопряжение). Сложим эти уравнения и проинтегрируем по $r$ от $a(t)$ до $b(t)$. Рассмотрим действительные части, переходя к одному равенству для квадратичных функционалов, зависящих от $t$ [3].

После умножения уравнений (20) – (22) соответственно на $r\bar V_r$, $r\bar V_\theta$ и $r\bar V_z$ и умножения уравнения (23) на $r$ получим:

$$\begin{gathered}
rV_{r,t}\bar V_r + CV_{r,r}\bar V_r - \frac{C}{r}V_r\bar V_r + inv^\circ_\theta V_r\bar V_r - 2v^\circ_\theta V_\theta\bar V_r + isrv^\circ_z V_r\bar V_r = \\
= -\frac{r}{\rho}P_{,r}\bar V_r + 2\nu rV_{r,rr}\bar V_r - \frac{\nu n^2}{r}V_r\bar V_r + \nu inV_{\theta,r}\bar V_r - \frac{\nu in}{r}V_\theta\bar V_r + \\
+ is\nu rV_{z,r}\bar V_r - \nu s^2 rV_r\bar V_r + 2\nu V_{r,r}\bar V_r - \frac{2in\nu}{r}V_\theta\bar V_r - \frac{2\nu}{r}V_r\bar V_r
\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}
rV_{\theta,t}\bar V_\theta + CV_{\theta,r}\bar V_\theta + \frac{C}{r}V_\theta\bar V_\theta + rv^\circ_{\theta,r}V_r\bar V_\theta + inv^\circ_\theta V_\theta\bar V_\theta + v^\circ_\theta V_r\bar V_\theta + \\
+ isrv^\circ_z V_\theta\bar V_\theta = -\frac{in}{\rho}P\bar V_\theta - \frac{\nu in}{r}V_r\bar V_\theta + \nu inV_{r,r}\bar V_\theta + \nu rV_{\theta,rr}\bar V_\theta + \\
+ \frac{\nu}{r}V_\theta\bar V_\theta - \nu V_{\theta,r}\bar V_\theta - \frac{2\nu n^2}{r}V_\theta\bar V_\theta + \frac{2\nu in}{r}V_r\bar V_\theta - \nu s^2 rV_\theta\bar V_\theta - \nu snV_z\bar V_\theta + \\
+ \frac{2\nu in}{r}V_r\bar V_\theta + 2\nu V_{\theta,r}\bar V_\theta - \frac{2\nu}{r}V_\theta\bar V_\theta
\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}
rV_{z,t}\bar V_z + CV_{z,r}\bar V_z + inv^\circ_\theta V_z\bar V_z + rv^\circ_{z,r}V_r\bar V_z + isrv^\circ_z V_z\bar V_z = \\
= -\frac{1}{\rho}isrP\bar V_z + \nu rV_{z,rr}\bar V_z + \nu isrV_{r,r}\bar V_z - \nu nsV_\theta\bar V_z - \\
- \frac{\nu n^2}{r}V_z\bar V_z - 2\nu s^2 rV_z\bar V_z + \nu V_{z,r}\bar V_z + \nu isV_r\bar V_z
\end{gathered} \tag{27}$$

$$rV_{r,r} + V_r + inV_\theta + isrV_z = 0 \tag{28}$$

Сложим теперь уравнения (25) – (27), проинтегрируем по $r$ от $a(t)$ до $b(t)$ и выделим действительные части.

Запишем сумму (25) – (27), перегруппировав слагаемые:

$$\begin{gathered}\Big[rV_{r,t}\bar V_r + rV_{\theta,t}\bar V_\theta + rV_{z,t}\bar V_z\Big] + \Big[i\Big(nv_\theta^\circ + srv_z^\circ\Big)\Big(V_r\bar V_r + V_\theta\bar V_\theta + V_z\bar V_z\Big)\Big] + \\ + \Big[CV_{r,r}\bar V_r + CV_{\theta,r}\bar V_\theta + CV_{z,r}\bar V_z\Big] = \Big[-\frac{1}{\rho}\Big(rP_{,r}\bar V_r + inP\bar V_\theta + isrP\bar V_z\Big)\Big] + \\ + \Big[\Big(\frac{C}{r} - \frac{\nu n^2}{r} - \nu s^2 r - \frac{2\nu}{r}\Big)V_r\bar V_r - \Big(\frac{C}{r} + \frac{\nu}{r} + \frac{2\nu n^2}{r} + \nu s^2 r\Big)V_\theta\bar V_\theta - \\ - \Big(\frac{\nu n^2}{r} + 2\nu s^2 r\Big)V_z\bar V_z\Big] + \Big[2\nu rV_{r,rr}\bar V_r + 2\nu V_{r,r}\bar V_r + \nu rV_{\theta,rr}\bar V_\theta + \nu V_{\theta,r}\bar V_\theta + \\ + \nu rV_{z,rr}\bar V_z + \nu V_{z,r}\bar V_z\Big] + \Big[2v_\theta^\circ V_\theta\bar V_r - rv_{\theta,r}^\circ V_r\bar V_\theta - v_\theta^\circ V_r\bar V_\theta - rv_{z,r}^\circ V_r\bar V_z\Big] + \\ + \Big[\nu inV_{\theta,r}\bar V_r + \nu inV_{r,r}\bar V_\theta\Big] + \Big[-\frac{3\nu in}{r}V_\theta\bar V_r + \frac{3\nu in}{r}V_r\bar V_\theta\Big] + \\ + \Big[-\nu snV_z\bar V_\theta - \nu snV_\theta\bar V_z\Big] + \Big[\nu isrV_{z,r}\bar V_r + \nu isrV_{r,r}\bar V_z + \nu isV_r\bar V_z\Big].\end{gathered} \tag{29}$$

Преобразуем теперь каждое слагаемое, заключенное в квадратные скобки, проинтегрировав его по $r$ от $a(t)$ до $b(t)$ и выделив действительную часть [4]. Нижние индексы $*$ и $**$ обозначают действительную и мнимую части.

1°. $\Big[rV_{r,t}\bar V_r + rV_{\theta,t}\bar V_\theta + rV_{z,t}\bar V_z\Big]$

$$\begin{gathered}\Big(\int_a^b rV_{r,t}\bar V_r\,dr\Big)_* = \frac12\int_a^b r\big(|V_r|^2\big)_{,t}\,dr = \frac12\frac{d}{dt}\int_a^b r\big(|V_r|^2\big)\,dr - \frac{b\dot b}{2}V_r(b(t),t) + \\ + \frac{a\dot a}{2}V_r(a(t),t) = \frac12\frac{d}{dt}\int_a^b r\big(|V_r|^2\big)\,dr.\end{gathered}$$

Здесь использованы граничные условия (24) и правило дифференцирования по времени интеграла с переменными пределами:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\,dx + \dot b f(b(t),t) - \dot a f(a(t),t). \tag{30}$$

Действуя аналогичным образом получаем, что

$$\Big(\int_a^b rV_{\theta,t}\bar V_\theta\,dr\Big)_* = \frac12\frac{d}{dt}\int_a^b r\big(|V_\theta|^2\big)\,dr\,,\ \Big(\int_a^b rV_{z,t}\bar V_z\,dr\Big)_* = \frac12\frac{d}{dt}\int_a^b r\big(|V_z|^2\big)\,dr\,.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\Big(\int_a^b\Big[rV_{r,t}\bar V_r + rV_{\theta,t}\bar V_\theta + rV_{z,t}\bar V_z\Big]\,dr\Big)_* = \\ = \frac12\frac{d}{dt}\int_a^b r\Big(|V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2\Big)\,dr = \frac12\frac{d}{dt}\int_a^b r|V|^2\,dr\,,\end{gathered} \tag{31}$$

где обозначено $|V|^2 = |V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2$ .

$2^\circ$. $\Big[i\Big(nv_\theta^\circ + srv_z^\circ\Big)\Big(V_r\bar{V}_r + V_\theta\bar{V}_\theta + V_z\bar{V}_z\Big)\Big]$

$$\begin{aligned}&\Big(\int\limits_a^b \Big[i\Big(nv_\theta^\circ + srv_z^\circ\Big)\Big(V_r\bar{V}_r + V_\theta\bar{V}_\theta + V_z\bar{V}_z\Big)\Big]\,dr\Big)_* = \\ &= \Big(\int\limits_a^b \Big[i\Big(nv_\theta^\circ + srv_z^\circ\Big)\Big(|V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2\Big)\Big]\,dr\Big)_* = 0.\end{aligned} \tag{32}$$

$3^\circ$. $\Big[CV_{r,r}\bar{V}_r + CV_{\theta,r}\bar{V}_\theta + CV_{z,r}\bar{V}_z\Big]$

$\Big(C\int\limits_a^b V_{r,r}\bar{V}_r\,dr\Big)_* = \frac{C}{2}\int\limits_a^b (|V_r|^2)_{,r}\,dr = 0$ в силу граничных условий (24).

Аналогично $\Big(C\int\limits_a^b V_{\theta,r}\bar{V}_\theta\,dr\Big)_* = 0\,,\ \Big(C\int\limits_a^b V_{z,r}\bar{V}_z\,dr\Big)_* = 0.$

Тогда

$$\Big(\int\limits_a^b \Big[CV_{r,r}\bar{V}_r + CV_{\theta,r}\bar{V}_\theta + CV_{z,r}\bar{V}_z\Big]\,dr\Big)_* = 0. \tag{33}$$

$4^\circ$. $\Big[-\frac{1}{\rho}\Big(rP_{,r}\bar{V}_r + inP\bar{V}_\theta + isrP\bar{V}_z\Big)\Big]$

Сумма трех слагаемых, содержащих давление $P$, в силу сопряжения к условию (28), обнулится:

$$-\int\limits_a^b (rP_{,r}\bar{V}_r + inP\bar{V}_\theta + isrP\bar{V}_z)\,dr = \int\limits_a^b (\bar{V}_r + r\bar{V}_{r,r} - in\bar{V}_\theta - isr\bar{V}_z)P\,dr = 0.$$

Тем самым

$$\int\limits_a^b \Big[-\frac{1}{\rho}\Big(rP_{,r}\bar{V}_r + inP\bar{V}_\theta + isrP\bar{V}_z\Big)\Big]\,dr = 0. \tag{34}$$

$5^\circ$. $\Big[\Big(\frac{C}{r} - \frac{\nu n^2}{r} - \nu s^2 r - \frac{2\nu}{r}\Big)V_r\bar{V}_r - \Big(\frac{C}{r} + \frac{\nu}{r} + \frac{2\nu n^2}{r} + \nu s^2 r\Big)V_\theta\bar{V}_\theta - \Big(\frac{\nu n^2}{r} + 2\nu s^2 r\Big)V_z\bar{V}_z\Big]$

$$\begin{aligned}&\Big(\int\limits_a^b \Big[\Big(\frac{C}{r} - \frac{\nu n^2}{r} - \nu s^2 r - \frac{2\nu}{r}\Big)V_r\bar{V}_r - \Big(\frac{C}{r} + \frac{\nu}{r} + \frac{2\nu n^2}{r} + \nu s^2 r\Big)V_\theta\bar{V}_\theta - \\ &-\Big(\frac{\nu n^2}{r} + 2\nu s^2 r\Big)V_z\bar{V}_z\Big]\,dr\Big)_* = \int\limits_a^b \Big(\frac{C}{r} - \frac{\nu n^2 + 2}{r} + s^2 r\Big)|V_r|^2\,dr - \\ &-\int\limits_a^b \Big(\frac{C}{r} + \nu\Big(\frac{1}{r} + s^2 r + \frac{2n^2}{r}\Big)\Big)|V_\theta|^2\,dr - \int\limits_a^b \nu\Big(\frac{n^2}{r} + 2s^2 r\Big)|V_z|^2\,dr.\end{aligned} \tag{35}$$

$6^\circ$. $\Big[2\nu rV_{r,rr}\bar{V}_r + 2\nu V_{r,r}\bar{V}_r + \nu rV_{\theta,rr}\bar{V}_\theta + \nu V_{\theta,r}\bar{V}_\theta + \nu rV_{z,rr}\bar{V}_z + \nu V_{z,r}\bar{V}_z\Big]$

$$2\nu\int\limits_a^b rV_{r,rr}\bar V_r\,dr+2\nu\int\limits_a^b V_{r,r}\bar V_r\,dr=2\nu\int\limits_a^b\Big(rV_{r,r}\bar V_r\Big)_{,r}dr-2\nu\int\limits_a^b V_{r,r}\bar V_r\,dr-$$
$$-2\nu\int\limits_a^b rV_{r,r}\bar V_{r,r}\,dr+2\nu\int\limits_a^b V_{r,r}\bar V_r\,dr=-2\nu\int\limits_a^b r|V_{r,r}|^2\,dr\,,$$

в силу граничных условий (24). С помощью аналогичных преобразований получаем, что

$$\nu\int\limits_a^b rV_{\theta,rr}\bar V_\theta\,dr+\nu\int\limits_a^b V_{\theta,r}\bar V_\theta\,dr=-\nu\int\limits_a^b r|V_{\theta,r}|^2\,dr\,,$$
$$\nu\int\limits_a^b rV_{z,rr}\bar V_z\,dr+\nu\int\limits_a^b V_{z,r}\bar V_z\,dr=-\nu\int\limits_a^b r|V_{z,r}|^2\,dr\,.$$

Тогда

$$\Big(\int\limits_a^b\Big[2\nu rV_{r,rr}\bar V_r+2\nu V_{r,r}\bar V_r+\nu rV_{\theta,rr}\bar V_\theta+\nu V_{\theta,r}\bar V_\theta+\nu rV_{z,rr}\bar V_z+\nu V_{z,r}\bar V_z\Big]\,dr\Big)_*=$$
$$=-\nu\int\limits_a^b r\Big(2|V_{r,r}|^2+|V_{\theta,r}|^2+|V_{z,r}|^2\Big)\,dr. \tag{36}$$

7°. $\Big[2v^\circ_\theta V_\theta\bar V_r-rv^\circ_{\theta,r}V_r\bar V_\theta-v^\circ_\theta V_r\bar V_\theta-rv^\circ_{z,r}V_r\bar V_z\Big]$

$$\Big(\int\limits_a^b\Big[2v^\circ_\theta V_\theta\bar V_r-rv^\circ_{\theta,r}V_r\bar V_\theta-v^\circ_\theta V_r\bar V_\theta-rv^\circ_{z,r}V_r\bar V_z\Big]\,dr\Big)_*=$$
$$=-\int\limits_a^b\Big(rv^\circ_{\theta,r}-v^\circ_\theta\Big)\Big(V_r\bar V_\theta\Big)_*\,dr-\int\limits_a^b rv^\circ_{z,r}\Big(V_r\bar V_z\Big)_*\,dr. \tag{37}$$

8°. $\Big[\nu inV_{\theta,r}\bar V_r+\nu inV_{r,r}\bar V_\theta\Big]$

$\int\limits_a^b\nu inV_{\theta,r}\bar V_r\,dr=\int\limits_a^b\nu in\Big(V_\theta\bar V_r\Big)_{,r}dr-\int\limits_a^b\nu inV_\theta\bar V_{r,r}\,dr=-\nu n\int\limits_a^b iV_\theta\bar V_{r,r}\,dr$ , в силу граничных условий (24).

Тогда

$$\Big(\int\limits_a^b\Big[\nu inV_{\theta,r}\bar V_r+\nu inV_{r,r}\bar V_\theta\Big]\,dr\Big)_*=\int\limits_a^b\nu n\Big[i\Big(V_{r,r}\bar V_\theta-\bar V_{r,r}V_\theta\Big)\Big]_*\,dr=$$
$$=-\int\limits_a^b 2\nu n\Big(V_{r,r}\bar V_\theta\Big)_{**}\,dr. \tag{38}$$

Преобразуем далее интеграл, стоящий в правой части формулы (38).

В силу уравнения несжимаемости (28):

$$-\int\limits_a^b 2\nu n V_{r,r}\bar{V}_\theta\,dr = \int\limits_a^b 2\nu n\Big[\frac{in}{r}V_\theta + \frac{1}{r}V_r + isV_z\Big]\bar{V}_\theta\,dr.$$

Тогда

$$\begin{gathered}-\int\limits_a^b 2\nu n\Big(V_{r,r}\bar{V}_\theta\Big)_{**}dr = \int\limits_a^b\Big[\frac{2\nu n^2}{r}|V_\theta|^2 + \frac{2\nu n}{r}\Big(V_r\bar{V}_\theta\Big)_{**} + 2\nu ns\Big(iV_z\bar{V}_\theta\Big)_{**}\Big]\,dr = \\ = \int\limits_a^b\frac{2\nu n^2}{r}|V_\theta|^2\,dr + \int\limits_a^b\frac{2\nu n}{r}\Big(V_r\bar{V}_\theta\Big)_{**}dr + \int\limits_a^b 2\nu ns\Big(V_\theta\bar{V}_z\Big)_{*}dr.\end{gathered} \tag{39}$$

9°. $\Big[-\frac{3\nu in}{r}V_\theta\bar{V}_r + \frac{3\nu in}{r}V_r\bar{V}_\theta\Big]$

$$3\nu n\int\limits_a^b\frac{1}{r}\Big(iV_r\bar{V}_\theta - i\bar{V}_rV_\theta\Big)_{*}dr = -6\nu n\int\limits_a^b\frac{1}{r}\Big(V_r\bar{V}_\theta\Big)_{**}dr. \tag{40}$$

10°. $\Big[-\nu snV_z\bar{V}_\theta - \nu snV_\theta\bar{V}_z\Big]$

$$-\int\limits_a^b\nu sn\Big(V_\theta\bar{V}_z + \bar{V}_\theta V_z\Big)_{*}dr = -\int\limits_a^b 2\nu sn\Big(V_\theta\bar{V}_z\Big)_{*}dr. \tag{41}$$

11°. $\Big[\nu isrV_{z,r}\bar{V}_r + \nu isrV_{r,r}\bar{V}_z + \nu isV_r\bar{V}_z\Big]$.

Воспользуемся граничными условиями (24). Тогда

$$\begin{gathered}\nu is\int\limits_a^b rV_{r,r}\bar{V}_z\,dr + \nu is\int\limits_a^b V_r\bar{V}_z\,dr = \nu is\int\limits_a^b\Big(rV_r\bar{V}_z\Big)_{,r}dr - \nu is\int\limits_a^b rV_r\bar{V}_{z,r}\,dr- \\ -\nu is\int\limits_a^b V_r\bar{V}_z\,dr + \nu is\int\limits_a^b V_r\bar{V}_z\,dr = -\nu is\int\limits_a^b rV_r\bar{V}_{z,r}\,dr\,.\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\Big(\nu s\int\limits_a^b riV_{z,r}\bar{V}_r\,dr - \nu s\int\limits_a^b ri\bar{V}_{z,r}V_r\,dr\Big)_{*} = \nu s\int\limits_a^b r\Big[i\Big(V_{z,r}\bar{V}_r - \bar{V}_{z,r}V_r\Big)\Big]_{*}dr = \\ = -2\nu s\int\limits_a^b r\Big(V_{z,r}\bar{V}_r\Big)_{**}dr.\end{gathered} \tag{42}$$

Далее преобразуем интеграл, стоящий в правой части формулы (42), используя условие несжимаемости (28) и граничные условия (24).

$$
\begin{aligned}
-\int_a^b 2\nu s r V_{z,r}\bar{V}_r\,dr = \int_a^b 2\nu s V_z\bar{V}_r\,dr + \int_a^b 2\nu s r V_z\bar{V}_{r,r}\,dr = \int_a^b 2\nu s V_z\bar{V}_r\,dr+ \\
+\int_a^b 2\nu s n i V_z\bar{V}_\theta\,dr - \int_a^b 2\nu s V_z\bar{V}_r\,dr + \int_a^b 2\nu s^2 r i|V_z|^2\,dr = \\
= \int_a^b 2\nu s n i V_z\bar{V}_\theta\,dr + \int_a^b 2\nu s^2 r i|V_z|^2\,dr\,.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
-\int_a^b 2\nu s r\Big(V_{z,r}\bar{V}_r\Big)_{**}dr = \int_a^b 2\nu s^2 r|V_z|^2\,dr + \int_a^b 2\nu s n\Big(iV_z\bar{V}_\theta\Big)_{**}dr = \\
= \int_a^b 2\nu s^2 r|V_z|^2\,dr + \int_a^b 2\nu s n\Big(V_\theta\bar{V}_z\Big)_{*}dr\,.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

С учетом пунктов $1^\circ - 11^\circ$ получим окончательный вид равенства для действительных частей квадратичных функционалов:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b r|V|^2\,dr = -\nu\int_a^b r\big(2|V_{r,r}|^2 + |V_{\theta,r}|^2 + |V_{z,r}|^2\big)\,dr+ \\
+\int_a^b\Big[\frac{C}{r} - \nu\Big(\frac{n^2+2}{r} + s^2 r\Big)\Big]|V_r|^2\,dr - \int_a^b\Big[\frac{C}{r} + \nu\Big(\frac{1}{r} + s^2 r\Big)\Big]|V_\theta|^2\,dr- \\
-\nu n^2\int_a^b\frac{1}{r}\,|V_z|^2\,dr + \int_a^b\Big[2\nu n s(V_\theta\bar{V}_z)_* + \frac{4\nu n}{r}(V_\theta\bar{V}_r)_{**}- \\
-(r v^\circ_{\theta,r} - v^\circ_\theta)(V_r\bar{V}_\theta)_* - r v^\circ_{z,r}(V_r\bar{V}_z)_*\Big]\,dr\,,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

где обозначено $|V|^2 = |V_r|^2 + |V_\theta|^2 + |V_z|^2$; нижние индексы $*$ и $**$ означают действительную и мнимую части.

Для верхней оценки правой части (45) воспользуемся неравенствами Фридрихса [5], [6] для функций с однородными граничными условиями (24)

$$
\int_a^b r|V_{\alpha,r}|^2\,dr \geq a\int_a^b |V_{\alpha,r}|^2\,dr \geq \frac{\pi^2 a}{(b-a)^2}\int_a^b |V_\alpha|^2\,dr, \quad \alpha = r,\theta,z,
\tag{46}
$$

и неравенствами Коши–Буняковского в пространстве $H_2[a;b]$

$$\int\limits_a^b (V_\theta \bar{V}_z)_* dr \le \int\limits_a^b |V_\theta||V_z|\, dr \le \left(\int\limits_a^b |V_\theta|^2\, dr\right)^{1/2} \left(\int\limits_a^b |V_z|^2\, dr\right)^{1/2} \le \\ \le \frac{1}{2}\int\limits_a^b |V_\theta|^2\, dr + \frac{1}{2}\int\limits_a^b |V_z|^2\, dr \tag{47}$$

$$\int\limits_a^b \frac{1}{r}(V_\theta \bar{V}_r)_{**} dr \le \frac{1}{2a}\int\limits_a^b |V_\theta|^2\, dr + \frac{1}{2a}\int\limits_a^b |V_r|^2\, dr \tag{48}$$

$$-\int\limits_a^b (rv^\circ_{\theta,r} - v^\circ_\theta)(V_r \bar{V}_\theta)_*\, dr \le \frac{q(t)}{2}\int\limits_a^b |V_r|^2\, dr + \frac{q(t)}{2}\int\limits_a^b |V_\theta|^2\, dr \tag{49}$$

$$q(t) = \sup_{a<r<b} |rv^\circ_{\theta,r} - v^\circ_\theta|$$

$$-\int\limits_a^b rv^\circ_{z,r}(V_r \bar{V}_z)_*\, dr \le \frac{m(t)}{2}\int\limits_a^b |V_r|^2\, dr + \frac{m(t)}{2}\int\limits_a^b |V_z|^2\, dr \tag{50}$$

$$m(t) = \sup_{a<r<b} |rv^\circ_{z,r}|.$$

С учетом неравенств (46) – (50) из (45) будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_a^b r|V|^2\, dr \le \int\limits_a^b r\big(\Phi_r|V_r|^2 + \Phi_\theta|V_\theta|^2 + \Phi_z|V_z|^2\big)\, dr \tag{51}$$

$$\Phi_r(r,t) = \frac{1}{r^2}\Big(C + \frac{qr}{2} + \frac{mr}{2} - \frac{2\pi^2 a\nu r}{(b-a)^2} - \nu(n^2+2) - \nu s^2 r^2 + \frac{2\nu nr}{a}\Big) \tag{52}$$

$$\Phi_\theta(r,t) = \frac{1}{r^2}\Big(-C + \frac{qr}{2} - \frac{\pi^2 a\nu r}{(b-a)^2} - \nu - \nu s^2 r^2 + \nu snr + \frac{2\nu nr}{a}\Big) \tag{53}$$

$$\Phi_z(r,t) = \frac{1}{r^2}\Big(\frac{mr}{2} - \frac{\pi^2 a\nu r}{(b-a)^2} - \nu n^2 + \nu nsr\Big). \tag{54}$$

**4. Оценки затухания возмущений.**

Пусть на интервале времени $t_0 \le t \le t_1 \le \infty$ для всех $r \in [a(t); b(t)]$ верны три неравенства

$$\Phi_r(r,t) < 0, \quad \Phi_\theta(r,t) < 0, \quad \Phi_z(r,t) < 0. \tag{55}$$

Продолжим тогда оценку (51):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_a^b r|V|^2\, dr \le \Phi_r^0(t)\int\limits_a^b r|V_r|^2\, dr + \Phi_\theta^0(t)\int\limits_a^b r|V_\theta|^2\, dr + \\ + \Phi_z^0(t)\int\limits_a^b r|V_z|^2\, dr \le Q(t)\int\limits_a^b r|V|^2\, dr \tag{56}$$

$$\Phi_\alpha^0(t) = \sup_{a<r<b} \Phi_\alpha(r,t) < 0, \quad Q(t) = \max_{\alpha=r,\theta,z} \Phi_\alpha^0(t) < 0. \tag{57}$$

На основании (56) несложно получить окончательную верхнюю интегральную оценку экспоненциального затухания функционала $\int_a^b r|V|^2\,dr$ на интервале $t_0 \le t \le t_1$:

$$\int\limits_a^b r|V|^2\,dr \le \int\limits_{a_0}^{b_0} r|V|^2_{t=t_0}\,dr \cdot \exp\left(2\int\limits_{t_0}^t Q(\tau)\,d\tau\right), \tag{58}$$

что говорит об экспоненциальной устойчивости (в интегральном смысле) развития возмущений, накопленных к моменту $t_0$.

Подставив условия (52) – (54) в систему неравенств (55) получим достаточные условия ее удовлетворения:

$$\begin{gathered}\sup_{a<r<b}\Big[\frac{qr}{2} - \nu\Big(1 + \frac{\pi^2 a}{(b-a)^2}\,r - nsr - \frac{2n}{a}\,r + s^2r^2\Big)\Big] < C(t) < \\ < \inf_{a<r<b}\Big[-\frac{r(q+m)}{2} + \nu\Big(n^2 + 2 + \frac{2\pi^2 a}{(b-a)^2}\,r - \frac{2n}{a}\,r + s^2r^2\Big)\Big]\end{gathered} \tag{58}$$

$$s < \frac{1}{n}\Big(-\frac{m}{2\nu} + \frac{\pi^2 a}{(b-a)^2} + \frac{n^2}{b}\Big), \tag{59}$$

предъявляемых к расходу $2\pi C(t)$ и волновым числам $n$ и $s$ возмущений вдоль угловой координаты и оси цилиндрического слоя $\Omega_t$.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Козырев О. Р., Степанянц Ю. А. Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3-89.

[2] Георгиевский Д. В. Вариационные оценки и метод интегральных соотношений в задачах устойчивости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 23. С. 96–146.

[3] Климов Д. М., Петров А. Г., Георгиевский Д. В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2005. 394 с.

[4] Георгиевский Д. В. Эволюция трехмерной картины возмущений, наложенных на вращательно-осевое течение в цилиндрическом зазоре // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 3. С. 345–354.

[5] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 504 с.

[6] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.

*G. S. Tlyustangelov*

**EVOLUTION OF PERTURBATIONS IN SPREADING VISCOUS CYLINDRIC LAYER, SUBJECT TO ROTATION AND AXIAL MOTION**

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

***Abstract.*** An evolution in time of 3D picture of perturbations imposed on a radial-rotational spreading of a viscous cylindric layer moving axially is investigated. The parameters of the main deformation depend on both time and radial coordinate. A motion of the boundaries of the cylindric layer is given in the main process as well as in perturbed one. On the basis of the integral relations method [1], [2] applied to the linearized problem in terms of perturbations some sufficient estimates of exponential stability of the main process are derived.

***Keywords***: spreading, viscous fluid, flow, perturbation, axial motion, integral relations method, Friedrichs inequalities, stability bounds.

## REFERENCES

[1] Kozyrev O. R., Stepanyants Yu. A. Integral relations method in the linear theory of hydrodynamic stability // Itogi Nauki Tekhniki. Ser. Mekh. Zhidkosti Gaza. M.,: VINITI, 1991. Vol. 25. P. 3–89. (in Russian).

[2] Georgievskii D. V. Variational bounds and integral relations method in problems od stability // Journal of Mathematical Science. 2008. Vol. 154. № 4. P. 549-603.

[3] Klimov D. M., Petrov A. G., Georgievskii D. V. Viscoelastic flows: dynamic chaos, stability, mixing. M.: Nauka, 2005. 394 p.(in Russian).

[4] Georgievskii D. V. Evolution of three-dimensional picture of disturbances imposed on a rotational-axial flow in a cylindrical clearance // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 10. № 3. P. 345–354. (in Russian).

[5] Collatz L. Eigenvalue problems with engineering applications. M.: Nauka, 1968. 504 p. (in Russian).

[6] Rectoris K. Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering. M.: Mir, 1985. 590 p. (in Russian).

*Tlyustangelov Galim Sultanovich*
`e-mail:` gs_angelov@mail.ru, Postgraduate Student, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.