Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4 (30). С. 33–41

Е. А. Микишанина, А. Г. Терентьев

ФИЛЬТРАЦИЯ ЧЕРЕЗ УПРУГО-ПОРИСТУЮ ПЛИТУ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается деформация тонкой упруго-пористой плиты, лежащей на упругом основании. Задача разбивается на две последовательные задачи: изгиб пластины на упругом основании и фильтрация жидкости сквозь пористую среду. Для решения первой задачи используется аппарат почти-периодических функций, для второй – численный метод граничных элементов.

Ключевые слова: упруго-пористая среда, плита, изгиб, почти-периодические функции, фильтрация, метод граничных элементов.

УДК: 532.685

Введение. Процессы фильтрации жидкости через изогнутые под действием внешней нагрузки упруго-пористые пластины и плиты малой толщины представляют практический интерес в различных технологических процессах, связанных с фильтрацией загрязненной жидкости, очищением среды от твердых фракций, а также при фильтрации жидкости в грунт (подпочвенный полив) или, напротив, извлечении жидкости из грунта (дренажные устройства, эксплуатационные скважины и др.). Фильтрация через мелкопористый материал может использоваться, например, для извлечения кислорода из воды. Ниже рассматривается фильтрация через тонкую упруго-пористую плиту, контактирующую с упругим основанием (грунтом). Предполагается, что изгиб плиты слабый, что позволяет краевую задачу формулировать на горизонтальной плоскости и воспользоваться методами теории оболочек.

Постановка задачи. Рассматривается деформация жесткой упруго-пористой плиты при одновременном выполнении обобщенного закона упругости Гука и закона фильтрации Дарси. Плита имеет форму бесконечной полосы $-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq$

Микишанина Евгения Арифжановна
`e-mail:` evaeva_84@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.
Терентьев Алексей Григорьевич
`e-mail:` agterent@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет имени И. Н Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.11.2016

$y \leq 1$ толщиной h и жестко защемлена по краям $y = 0$ и $y = 1$. На верхней поверхности этой пластины $z = h/2$ действуют нагрузка $q_0 = q_0\,(y)$[1] и атмосферное давление $p_a = 0$, на нижней поверхности $z = -h/2$ давление жидкости равно $p_0 = \alpha w(x,y)$, где $w(x,y)$ – функция прогиба серединной плоскости плиты, α – коэффициент пропорциональности.

Тензор напряжений при установившейся через пластину фильтрации изменяется за счет гидростатического давления $P = P(x,y,z)$:

$$\tilde{\sigma}_{i,k} = \sigma_{i,k} - P\delta_{i,k}, \quad P = p + \rho g(h/2 - z).$$

В соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява [1], на поверхности пластины $\tilde{\sigma}_{1,3} = \tilde{\sigma}_{2,3} = 0$. Напряжение $\tilde{\sigma}_{3,3}$ в противоречии гипотезам Кирхгофа-Лява отлично от нуля, доказано в [2]. С учетом известных выражений для напряжений $\tilde{\sigma}_{1,1},\ \tilde{\sigma}_{2,2},\ \tilde{\sigma}_{1,2}$ [3], напряжения $\sigma_{1,1},\ \sigma_{2,2},\ \sigma_{1,2}$ определятся как

$$\begin{gathered}
\sigma_{1,1} = -\frac{Ez}{(1-v^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + P,\\
\sigma_{2,2} = -\frac{Ez}{(1-v^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + P,\\
\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = -\frac{Ez}{(1-v^2)}(1-v)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
\end{gathered}$$

где $E,\ \ v$ – коэффициенты упругости и Пуассона соответственно.

Из уравнений равновесия и условия равенства нулю на поверхностях $z = \pm h/2$ напряжения $\sigma_{1,3},\ \ \sigma_{2,3}$ определяются как

$$\begin{gathered}
\sigma_{1,3} = \frac{E\left(z^2 - h^2/4\right)}{2\left(1-v^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w,\\
\sigma_{2,3} = \frac{E\left(z^2 - h^2/4\right)}{2\left(1-v^2\right)}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w.
\end{gathered} \tag{1}$$

Из последнего уравнения равновесия с учетом парности касательных напряжений и с учетом (1) получим

$$\frac{\partial\left(\sigma_{3,3} - P\right)}{\partial z} = -\frac{E\left(z^2 - h^2/4\right)}{2\left(1-v^2\right)}\Delta^2 w. \tag{2}$$

Проинтегрируем правую и левую части равенства (2):

$$\sigma_{3,3}(h/2) - P\,(h/2) - \sigma_{3,3}(-h/2) + P\,(-h/2) = D\Delta^2 w,$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-v^2)}$.

В соответствии со статическими граничными условиями на поверхностях плиты

$$\sigma_{3,3}\left.\right|_{z=h/2} = q_0, \quad \sigma_{3,3}\left.\right|_{z=-h/2} = p_0\ ,$$

уравнение чистого изгиба тонкой плиты, сквозь которую происходит установившаяся фильтрация, определяется уравнением Софи Жермен [3]

[1]Считается, что нагрузка на поверхности пластины тоже является проницаемой и не препятствует процессу фильтрации.

$$\Delta^2 w = \frac{q_0}{D}. \tag{3}$$

Таким образом, изменяющееся внутри пластины давление при установившейся фильтрации не влияет на изгиб.

Если пластина на упругом проницаемом основании, то уравнение (3) преобразуется к виду [4]:

$$\Delta^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{q_0}{D}, \tag{4}$$

где k – положительная постоянная, характеризующая жесткость основания (коэффициент постели).

Для упрощения введем обозначения $K^2 = \dfrac{k}{D}$, $q = \dfrac{q_0}{D}$, тогда уравнение (4) перепишется в виде

$$\Delta^2 w + K^2 w = q. \tag{5}$$

В силу уравнения неразрывности давление является решением уравнения Лапласа

$$\Delta P = 0,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Учитывая, что решение $w = w(x,\ y)$ дифференциального уравнения (5) характеризует изгиб серединного сечения пластины $z = 0$, то при изгибе на поверхностях пластины выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} P|_{z=-w(x,y)+h/2} &= p_a, \\ P|_{z=-w(x,y)-h/2} &= \alpha w(x,y), \end{aligned}$$

где α – коэффициент пропорциональности.

Приведенная задача разбивается на две последовательные задачи: изгиб пластины на упругом основании и фильтрация жидкости сквозь пористую среду. Для решения первой будем использовать аппарат почти-периодических функций, для решения второй – численный метод граничных элементов.

Расчет изгиба однородно-изотропной тонкой пористой плиты на упругом основании. Найти непрерывную вместе со своими производными до четвертого порядка в области $-\infty < x < +\infty$, $0 \le y \le 1$ функцию $w = w(x,\ y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (5), если на границе заданы условия:

$$\begin{aligned} &w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=1} = 0, \\ &\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=1} = 0. \end{aligned}$$

Решение. Воспользуемся аппаратом почти-периодических функций и обобщенного дискретного преобразования Фурье, введенного и изученного в работе [5]. Ранее этот аппарат уже применялся в [6] при решении некоторых задач фильтрации.

Будем искать решение уравнения (5) в виде почти-периодических функций [5], [6], то есть в виде

$$w(x,y) = A_0(y) + \sum_{\lambda} A_\lambda(y)\, e^{i\lambda x}, \quad w(x,y) \in \Pi_W^y,$$

где $\{\lambda\}$ – множество действительных чисел, не сгущающихся к нулю.

Применяя обратное преобразование Фурье к системе (5), переходим к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\lambda = 0, \quad {A_0}^{(4)} + K^2 A_0 - q = 0, \tag{6}$$

$$\lambda \neq 0, \quad {A_\lambda}^{(4)} - 2\lambda^2 {A_\lambda}^{(2)} + \left(\lambda^4 + K^2\right) A_\lambda = 0, \tag{7}$$

где $A_0 = A_0(y), \ \ A_\lambda = A_\lambda(y)$. Решения уравнений (6) и (7) имеют вид:

при $\lambda = 0$

$$A_0(y) = a_0(y) + d_1 e^{n\,y} \cos ny + d_2 e^{n\,y} \sin ny + d_3 e^{-n\,y} \cos ny + d_4 e^{-n\,y} \sin ny,$$

где $n = \sqrt{K/2}, \quad a_0(y)$ – некоторое частное решение уравнения (6);

при $\lambda \neq 0$

$$A_\lambda(y) = c_1 e^{\alpha y} \cos \beta y + c_2 e^{\alpha y} \sin \beta y + c_3 e^{-\alpha y} \cos \beta y + c_4 e^{-\alpha y} \sin \beta y,$$

где $\alpha = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\lambda^4 + K^2} + \lambda^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\lambda^4 + K^2} - \lambda^2}{2}}.$

Итак, искомая функция прогибов имеет вид

$$\begin{aligned} w(x,y) &= a_0(y) + d_1 e^{n\,y} \cos ny + d_2 e^{n\,y} \sin ny + d_3 e^{-n\,y} \cos ny + d_4 e^{-n\,y} \sin ny + \\ &+ \sum_{\lambda \neq 0} \left(c_1 e^{\alpha y} \cos \beta y + c_2 e^{\alpha y} \sin \beta y + c_3 e^{-\alpha y} \cos \beta y + c_4 e^{-\alpha y} \sin \beta y\right) \cdot e^{i\lambda x}. \end{aligned}$$

Константы $c_m = c_m(\lambda), \ \ d_m, \ \ m = \overline{1,4}$ находятся из граничных условий, то есть из системы уравнений

$$\begin{cases} d_1 + d_3 = -a_0(0), \\ d_1 e^n \cos n + d_2 e^n \sin n + d_3 e^{-n} \cos n + d_4 e^{-n} \sin n = -a_0(1), \\ d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = -\dfrac{{a'}_0(0)}{n} \\ d_1 \left(e^n \cos n - e^n \sin n\right) + d_2 \left(e^n \sin n + e^n \cos n\right) + \\ +d_3 \left(-e^{-n} \cos n - e^{-n} \sin n\right) + d_4 \left(-e^{-n} \sin n + e^{-n} \cos n\right) = -\dfrac{{a'}_0(1)}{n}, \\ c_1 + c_3 = 0, \\ \alpha c_1 + \beta c_2 - \alpha c_3 + \beta c_4 = 0, \\ c_1 e^\alpha \cos \beta + c_2 e^\alpha \sin \beta + c_3 e^{-\alpha} \cos \beta + c_4 e^{-\alpha} \sin \beta = 0, \\ c_1 \left(\alpha e^\alpha \cos \beta - \beta e^\alpha \sin \beta\right) + c_2 \left(\alpha e^\alpha \sin \beta + \beta e^\alpha \cos \beta\right) + \\ +c_3 \left(-\alpha e^{-\alpha} \cos \beta - \beta e^{-\alpha} \sin \beta\right) + c_4 \left(-\alpha e^{-\alpha} \sin \beta + \beta e^{-\alpha} \cos \beta\right) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из системы (8) постоянные $c_m = 0$, а постоянные d_m определяются единственным образом.

Таким образом, функция прогиба зависит только от y, то есть имеет вид

$$w(y) = a_0(y) + d_1 e^{n\,y} \cos ny + d_2 e^{n\,y} \sin ny + d_3 e^{-n\,y} \cos ny + d_4 e^{-n\,y} \sin ny, \tag{9}$$

где постоянные d_m определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} d_1 + d_3 = -a_0(0), \\ d_1 e^n \cos n + d_2 e^n \sin n + d_3 e^{-n} \cos n + d_4 e^{-n} \sin n = -a_0(1), \\ d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = -\dfrac{a'_0(0)}{n}, \\ d_1 \left(e^n \cos n - e^n \sin n\right) + d_2 \left(e^n \sin n + e^n \cos n\right) + \\ +d_3 \left(-e^{-n} \cos n - e^{-n} \sin n\right) + d_4 \left(-e^{-n} \sin n + e^{-n} \cos n\right) = -\dfrac{a'_0(1)}{n}. \end{cases} \tag{10}$$

Определение давления внутри однородно-изотропной пористой плиты при установившейся фильтрации. При условии, что давление в области не зависит от x (граничные условия не зависят от x), задача его определения сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \tag{11}$$

с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{y=1} = 0, \tag{12}$$

$$P\left.\right|_{-w(y)+h/2} = 0, \quad P\left.\right|_{-w(y)-h/2} = \alpha w(y), \tag{13}$$

Граничные условия (12) характеризуют непроницаемые (твердые) границы, условия (13) – проницаемые.

Итак, необходимо найти непрерывную вместе со своими производными до второго порядка в области $0 \le y \le 1, \quad -w(y) - h/2 \le z \le -w(y) + h/2$ функцию $P(y,\ z)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (11), если на границе заданы условия (12), (13).

Решение последней задачи целесообразно получить численно с помощью метода граничных элементов [7].

Для составления численного алгоритма следует воспользоваться интегральным тождеством Грина

$$\varepsilon P(z) = \oint\limits_{\partial T} P_n\left(\tau\right) G\left(r\right) ds - \oint\limits_{\partial T} P\left(\tau\right) G_n\left(r\right) ds \tag{14}$$

где r – расстояние между точками z и τ, $\varepsilon = 0.5$ для $z \in \partial T$, $\varepsilon = 1$ для $z \in T$.

В соответствии с методом граничных элементов аппроксимируем границу области N-вписанным многоугольником с вершинами (узлами) в точках $\left(y^k, z^k\right)$. Граничные условия выполняются в средней (контрольной) точке $\left(Y^k, Z^k\right)$. Тогда каждый интеграл может быть представлен в виде произведения значения искомой функции в контрольной точке и интеграла по хорде, например,

$$\int\limits_{s^{j-1}}^{s^j} P\left(Y\left(s\right), Z\left(s\right)\right) G_n\left(s, Y^k, Z^k\right) ds = P\left(Y^j, Z^j\right) \int\limits_{s^{j-1}}^{s^j} G_n\left(s, Y^k, Z^k\right) ds = A_{kj} P_j.$$

Выражая все интегралы в виде аналогичных сумм, запишем интегральное уравнение (14) в матричной форме:

$$(\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A})\ \mathbf{P} - \mathbf{B}\,\mathbf{Q} = 0,$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матрицы с элементами

$$A_{kj} = \int\limits_{s^{j-1}}^{s^j} G_n\left(s, Y^k, Z^k\right) ds, \quad B_{kj} = \int\limits_{s^{j-1}}^{s^j} G\left(s, Y^k, Z^k\right) ds,$$

$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ – вектор-столбцы с элементами $P_j = P(Y^j,\ Z^j),\ \ Q_j = Q(Y^j,\ Z^j)$.

Для определения давления в любой точке области достаточно принять $\varepsilon = 1$ в равенстве (14).

Числовой пример. Сквозь однородно-изотропную тонкую плиту $-\infty < x < +\infty$, $0 \le y \le 1$, $\ -w(y) - h/2 \le z \le -w(y) + h/2$, $\ h = 0.1$ на упругом основании с коэффициентом, характеризующим жесткость основания $K = \sqrt{\dfrac{k}{D}} = 2$, происходит установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости, которая оказывает на нижней поверхности пластины давление $p_0 = 10^6\, w(y)$. На верхней поверхности плиты действует изгибающая нагрузка $q = 4 + 16y^2$.

Решение. Функция прогиба имеет вид (9), то есть в данном случае

$$w(y) = 1 + 4y^2 - 0.11951375\, e^y \cos(y) - 2.231724\, e^y \sin(y) - \\ -0.88048625\, e^{-y} \cos(y) + 1.4707515\, e^{-y} \sin(y).$$

График функции прогиба изображен на рис. 1.

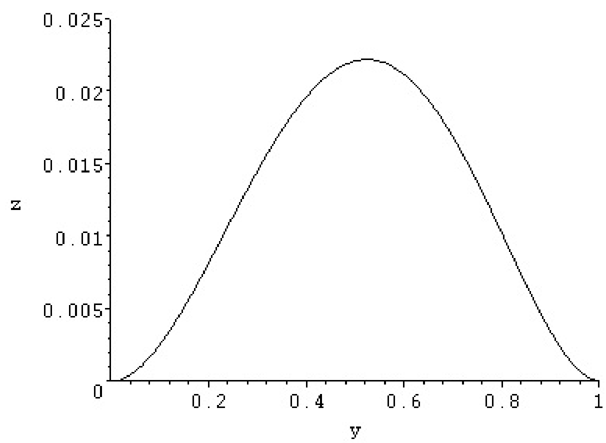

Рис. 1. Функция прогиба

Максимального прогиба $z = 0.0222$ плита достигает в точке $y = 0.525$.

Теперь решаем задачу стационарной фильтрации в области $0 \le y \le 1$, $-w(y) - h/2 \le z \le -w(y) + h/2$. Изменение давления внутри области на каждой кривой $z = -w(y) + a$, $\ a \in [-h/2,\ h/2]$, параллельной средней линии, изображено на рис. 2:

$a = -h/2$ (1), $a = -2h/5$ (2), $a = -h/5$ (3), $a = 0$ (4), $a = h/5$ (5), $a = 2h/5$ (6).

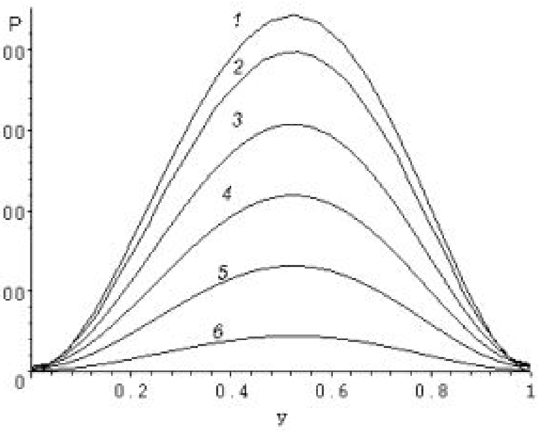

Рис. 2. Изменение давления в плите

Графики распределения давления и его нормальной производной на границе области представлены на рис. 3 и 4. Обход контура производится против часовой стрелки, начиная с нижней крайней правой точки границы.

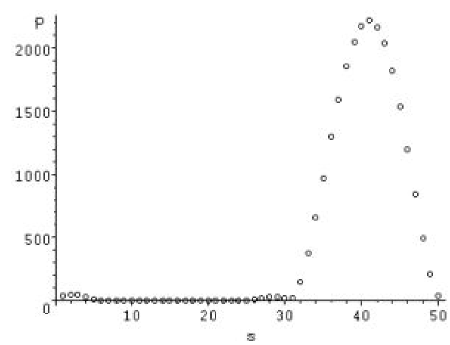

Рис. 3. Изменение функции давления на границе

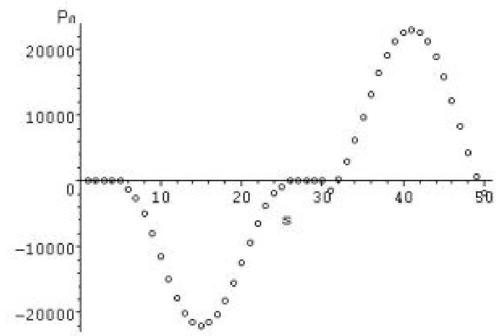

Рис. 4. Изменение нормальной производной функции давления на границе

По рис. 2 можно сделать вывод: давление падает при движении от нижней границы области к верхней, а на каждой кривой $z = -w(y) + a$ максимального значения давление достигает в месте наибольшего прогиба плиты.

Композиционное использование метода граничных элементов и аппарата почти-периодических функций позволило решить задачу изгиба тонкой упруго-пористой плиты на упругом основании при одновременной фильтрации через плиту жидкости. Стоит отметить, что область применения этих методов довольно широка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. London : Taylor and Francis, 2007. 547 p.

[2] Саченков А. А. Цикл лекций по теории изгиба пластин: учебное пособие. Казань : Казан. (Приволж.) федер. ун-т, 2012. 53 с.

[3] Терентьев А. Г. Теория упругости с элементами сопротивления материалов и пластичности : учебное пособие. Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 2016. 264 с.

[4] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М. : Физматлит, 1948. 296 с.

[5] Кулагина М. Ф. Обобщенное дискретное преобразование Фурье и его приложения // Сборник научных статей Российской ассоциации «Женщины-математики». Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 1993. Вып. 1. С. 79–83.

[6] Микишанина Е. А. Компьютерное моделирование решений плоской краевой задачи теории фильтрации // Вестник Чувашского университета. 2016. № 1. С. 145–153.

[7] Терентьев А. Г., Афанасьев К. Е. Численные методы в гидродинамике : учеб. пособие. Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 1987. 80 с.

E. A. Mikishanina, A. G. Terentiev

FILTRATION IN ELASTIC POROUS PLATE

Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. The article describes the deformation of a thin elastic-porous plate lying on an elastic foundation. The task is divided into two consecutive tasks: the bending of a plate on an elastic foundation and fluid filtration through porous medium. To solve the first problem we use the technique of almost-periodic functions, to the second numerical method of boundary elements.

Keywords: elastic-porous medium, plate, bending, almost periodic functions, filtering, boundary element method.

REFERENCES

[1] Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. London : Taylor and Francis, 2007. 547 p.

[2] Sachenkov A. A. Series of lectures on the theory of bending of plates : a tutorial. Kazan : Kazan. (Privolzh.) Feder. University, 2012. 53 p. (in Russian).

[3] Terentiev A. G. Theory of elasticity elements of strength of materials and plasticity : a tutorial. Cheboksary : Publishing House of the Chuvash University, 2016. 264 p. (in Russian).

[4] Vekua I. N. New methods for solving elliptic equations. Moscow : Fizmathlit, 1948. 296 p. (in Russian).

[5] Kulagina M. F. Generalized discrete Fourier transform and its applications // Collection of scientific articles of the Russian Association «Women-mathematicians». N. Novgorod : Publishing House N. Nogorod University, 1993. Vol. 1. P. 79–83. (in Russian).

[6] Mikishanina E. A. Computer simulation of solutions of the flat boundary's problem of filtration theory // Bulletin of the Chuvash University. 2016. № 1. P. 145–153. (in Russian).

[7] Terentiev A. G., Afanasiev K. E. Numerical methods in fluid dynamics : a tutorial. Cheboksary : Publishing House of the Chuvash University, 1980. 80 p. (in Russian).

Mikishanina Evgeniya Arifzhanovna

`e-mail:` evaeva_84@mail.ru, Senior Lecturer, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Terentiev Aleksei Grigor'evich

`e-mail:` agterent@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.