

А. В. Ковалев, И. Э. Свиридов, Ю. Д. Щеглова

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ В СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПИИ ОБЩЕГО ВИДА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассматривается задача упругопластического кручения стержня некругового поперечного сечения. Материал стержня предполагается анизотропным и обладает свойствами анизотропии, частными случаями которой являются анизотропия согласно Хиллу и трансляционная анизотропия. С использованием метода малого параметра определены напряженно-деформированное состояние стержня и упругопластическая граница в первом приближении.

Ключевые слова: деформации, напряжение, упругопластическое кручение, анизотропия по Хиллу, трансляционная анизотропия.

Определению напряженно-деформированного состояния в цилиндрических трубах при температуре и сжимаемости посвящены работы [5], [7], [8]. В работе [1] в рамках метода возмущений определено напряженное состояние в цилиндрической трубе, подверженной действию внешнего и внутреннего давлений, с границами поперечного сечения близкими к круговым. При этом рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения задачи на основе теоремы о неявных функциях. В работах [3], [11] представлены соотношения трансляционной идеальнопластической анизотропии и анизотропии по Хиллу при кручении. Работы [6], [9] посвящены исследованию напряженно-деформированного состояния пластически анизотропной толстостенной трубы при упругопластическом кручении в случае трансляционной анизотропии, а в работе [10] рассмотрена анизотропия согласно Хиллу. Случай анизотропии общего

© Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д., 2016

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kav-mail@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Свиридов Илья Эдуардович

e-mail: synettt@gmail.com, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Щеглова Юлия Дмитриевна

e-mail: scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 02.10.2016

вида, включающей в себя, как частные случаи, анизотропию по Хиллу и трансляционную анизотропию, рассмотрен в работе [13] при упругопластическом состоянии толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. В данной работе с использованием метода малого параметра [2], [12] исследована задача упругопластического кручения цилиндрического стержня некругового поперечного сечения в случае анизотропии общего вида. Определены в первом приближении поле напряжений и перемещений в пластической и упругой областях и упругопластическая граница.

Рассмотрим цилиндрический стержень, находящийся под действием кручения [4]. Боковые поверхности стержня свободны от нагрузки. Поперечное сечение стержня ограничено контурами внешним L_1 и внутренним L_2 (рис. 1).

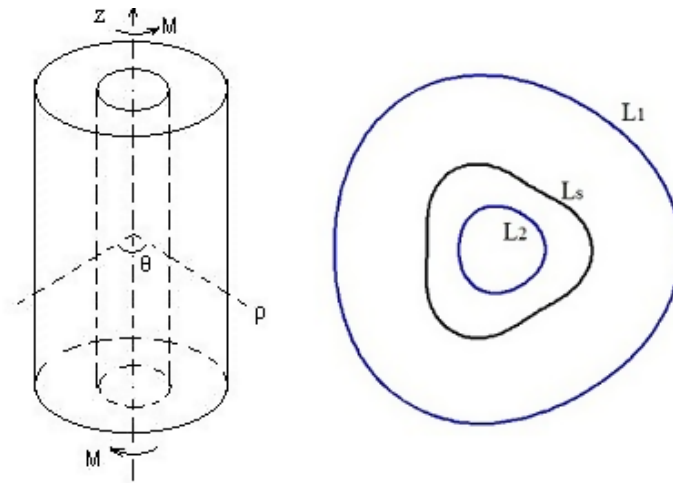


Рис. 1. Упругопластическое кручение стержня кругового поперечного сечения.

Условие пластичности анизотропии общего вида в случае кручения может быть записано в виде

$$A(\tau_{xz} - k_1)^2 + B(\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2, \quad (1)$$

где A, B, k_1, k_2 — параметры анизотропии, k_0 — предел текучести материала.

Для определения напряженно-деформированного состояния стержня будем использовать определяющие соотношения, записанные в цилиндрической системе координат в безразмерном виде (ρ, θ, z — цилиндрическая система координат, ось z направлена по оси стержня). Величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к пределу текучести k_0 , величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении ρ_0 .

Используя известную связь между компонентами напряжений в декартовой и цилиндрической системах координат [6]

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_{\rho z} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta, \\ \tau_{yz} &= \tau_{\rho z} \sin \theta + \tau_{\theta z} \cos \theta, \end{aligned}$$

и осуществляя переход к безразмерным координатам, соотношения (1) получим в виде

$$A(\tau_{\rho z}^p \cos \theta - \tau_{\theta z}^p \sin \theta - k_1)^2 + B(\tau_{\rho z}^p \sin \theta + \tau_{\theta z}^p \cos \theta - k_2)^2 = 1. \quad (2)$$

Уравнение равновесия для задачи кручения имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \quad (3)$$

В упругой области имеют место соотношения Коши

$$\varepsilon_{\rho z}^e = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w^e}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z}^e = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^e}{\partial \theta} + \rho \right), \quad (4)$$

связывающие компоненты тензора деформаций с функцией w^e , характеризующей деформацию поперечного сечения. Через ω обозначена крутка или угол кручения на единицу длины.

Соотношения закона Гука в упругой области имеют вид

$$\tau_{\rho z}^e = 2G\varepsilon_{\rho z}^e, \quad \tau_{\theta z}^e = 2G\varepsilon_{\theta z}^e, \quad (5)$$

где G — модуль сдвига.

Полная деформация в пластической области складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{\rho z}^e + \varepsilon_{\rho z}^p, \quad \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{\theta z}^e + \varepsilon_{\theta z}^p. \quad (6)$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения для приращения пластических деформаций, учитывая (2), будем иметь

$$d\varepsilon_{\rho z}^p = d\lambda \left((A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \tau_{\rho z}^p + (B - A) \tau_{\theta z}^p \cos \theta \sin \theta - Ak_1 \cos \theta - Bk_2 \sin \theta \right), \quad (7)$$

$$d\varepsilon_{\theta z}^p = d\lambda \left((B \cos^2 \theta + A \sin^2 \theta) \tau_{\theta z}^p + (B - A) \tau_{\rho z}^p \sin \theta \cos \theta + Ak_1 \sin \theta - Bk_2 \cos \theta \right), \quad (8)$$

где $d\lambda$ — неизвестный скалярный множитель.

Упругие деформации связаны с напряжениями в пластической области законом Гука

$$\varepsilon_{\rho z}^e = \frac{\tau_{\rho z}^p}{2G}, \quad \varepsilon_{\theta z}^e = \frac{\tau_{\theta z}^p}{2G}. \quad (9)$$

Полные деформации связаны с перемещениями в пластической области соотношениями Коши

$$\varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \frac{\partial w^p}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right). \quad (10)$$

В соотношениях (2)–(10) и далее символ “ e ” сверху обозначает принадлежность величин к упругой области, а символ “ p ” — к пластической.

Граничные условия в напряжениях на внешнем L_1 и внутреннем L_2 контурах поперечного сечения имеют вид

$$\{\tau_{\rho z}^p n_{\rho 1} + \tau_{\theta z}^p n_{\theta 1}\} \Big|_{L_1} = 0, \quad (11)$$

$$\{\tau_{\rho z}^e n_{\rho 2} + \tau_{\theta z}^e n_{\theta 2}\} \Big|_{L_2} = 0, \quad (12)$$

где $n_{\rho i}$, $n_{\theta i}$ ($i = 1, 2$) являются компонентами единичной нормали к контуру L_i .

Уравнение внешнего контура поперечного сечения стержня L_1 примем в виде

$$\Phi_1(\rho, \theta) = 0, \quad (13)$$

внутреннего L_2

$$\Phi_2(\rho, \theta) = 0. \quad (14)$$

Компоненты единичной нормали к контуру L_i ($i = 1, 2$) поперечного сечения стержня определяются по формулам

$$\begin{aligned} n_{\rho i} &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ n_{\theta i} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

На упругопластической границе L_s (рис. 1), которая заранее неизвестна и определяется в процессе решения, выполняются условия непрерывности компонент напряжений и функции перемещения

$$[\tau_{\rho z}] \Big|_{L_s} = [\tau_{\theta z}] \Big|_{L_s} = [w] \Big|_{L_s} = 0. \quad (16)$$

В упругой области из уравнения равновесия (3), учитывая (5) и (4), получим уравнение

$$\Delta w^e = 0, \quad (17)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ — оператор Лапласа.

Следуя методу возмущений [2], параметры анизотропии представим в виде [13]

$$\begin{aligned} A &= 1 + \delta a_1 + \delta^2 a_2 + \dots, & B &= 1 + \delta b_1 + \delta^2 b_2 + \dots, \\ k_1 &= \delta k_1^{(1)} + \delta^2 k_1^{(2)} + \dots, & k_2 &= \delta k_2^{(1)} + \delta^2 k_2^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где δ — безразмерный малый параметр, $\delta \ll 1$.

Уравнение контуров поперечного сечения (13), (14) представим в виде

$$\Phi_1(\rho, \theta) = \rho - (R_0 + \delta_2 R_1 + \delta_2^2 R_2 + \dots), \quad (19)$$

$$\Phi_2(\rho, \theta) = \rho - (r_0 + \delta_1 r_1 + \delta_1^2 r_2 + \dots), \quad (20)$$

где δ_1, δ_2 — безразмерные малые параметры, r_0, R_0 — константы, $r_i = r_i(\theta)$, $R_i = R_i(\theta)$ — функции координаты θ .

Примем $\delta_1 = d_1 \delta$, $\delta_2 = d_2 \delta$, где $-1 \leq d_i \leq 1$ ($i = 1, 2$).

Решение будем искать в виде разложения по степеням малого параметра δ

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta\tau_{ij}^{(1)} + \delta^2\tau_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \delta\varepsilon_{ij}^{(1)} + \delta^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (22)$$

$$w = w^{(0)} + \delta w^{(1)} + \delta^2 w^{(2)} + \dots, \quad (23)$$

$$\rho_s = \rho_0 + \delta\rho_1 + \delta^2\rho_2 + \dots, \quad (24)$$

где соотношение (24) – представление упругопластической границы.

Согласно методу малого параметра [2], [12] подставляя разложение (18)–(24) в (2)–(17) и приравнивая члены при одинаковых степенях параметра δ , получим системы уравнений для каждого приближения.

В нулевом приближении имеет место известная задача упругопластического кручения изотропного стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца радиусов $r_0 = \alpha$ и $R_0 = \beta$ ($\alpha < \beta$).

Решение этой задачи имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{p(0)} &= 1, \quad \tau_{\rho z}^{p(0)} = 0, \quad w^{p(0)} = 0, \\ \tau_{\theta z}^{e(0)} &= G\omega\rho, \quad \tau_{\rho z}^{e(0)} = 0, \quad w^{e(0)} = 0, \quad \rho_0 = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим первое приближение.

Уравнение внешней границы (19) примем в виде, следуя [12]

$$\rho = \beta(1 + \delta d_1 \cos m\theta). \quad (26)$$

Уравнение внутреннего контура (20) согласно [12] представим в форме

$$\rho = \alpha(1 + \delta d_2 \cos m\theta). \quad (27)$$

Условие пластичности (2) в первом приближении с учетом известного решения в нулевом приближении (25) дает соотношение для компоненты $\tau_{\theta z}^{p(1)}$ в виде

$$\tau_{\theta z}^{p(1)} = -k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta - \frac{1}{2} (a_1 \sin^2 \theta + b_1 \cos^2 \theta). \quad (28)$$

Подставляя (15), (19) и (21) в граничное условие на внешнем контуре (11), получим

$$\tau_{\rho z}^{p(1)} \Big|_{\rho=R_0} = \frac{\dot{R}_1}{R_0} \tau_{\theta z}^{p(0)} \Big|_{\rho=R_0} - R_1 \frac{\partial \tau_{\rho z}^{p(0)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_0}. \quad (29)$$

Для определения компоненты напряжений $\tau_{\rho z}^{p(1)}$ из уравнения равновесия (3) и граничного условия (29), учитывая (25) и (26), получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \tau_{\rho z}^{p(1)}) &= -\frac{\partial \tau_{\theta z}^{p(1)}}{\partial \theta}, \\ \tau_{\rho z}^{p(1)} \Big|_{\rho=\beta} &= -d_1 m \sin m\theta. \end{cases}$$

Решая эту систему с учетом (28), найдем

$$\tau_{\rho z}^{p(1)} = \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{1}{2} (a_1 - b_1) \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\beta}{\rho} \right) - \frac{d_1 \beta m}{\rho} \sin m\theta. \quad (30)$$

В упругой области из соотношений (4) и (15) получим компоненты напряжений в виде

$$\tau_{\rho z}^{e(1)} = G\omega \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z}^{e(1)} = G\omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \theta}. \quad (31)$$

Граничное условие на внутреннем контуре (12) с учетом (15), (20) и (21) примет форму

$$\tau_{\rho z}^{e(1)} \Big|_{\rho=r_0} = \frac{1}{G\omega} \left(\dot{r}_1 \tau_{\theta z}^{e(0)} \Big|_{\rho=r_0} - r_1 \frac{\partial \tau_{\rho z}^{e(0)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_0} \right). \quad (32)$$

Условия непрерывности для компонент напряжений на упругопластической границе (16) при подстановке (21) и (24) в первом приближении дают соотношения

$$\left(\frac{\partial \tau_{\rho z}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\rho z}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_0} = \left(\frac{\partial \tau_{\rho z}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\rho z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_0}, \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{\theta z}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\theta z}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_0} = \left(\frac{\partial \tau_{\theta z}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\theta z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (34)$$

Объединяя (17), а также (32) и (33) с учетом (31), (27) и (25), получим задачу Неймана для определения функции перемещений в упругой области

$$\begin{cases} \Delta w^{e(1)} = 0, & \alpha < \rho < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{1}{G\omega} \tau_{\rho z}^{p(1)} \Big|_{\rho=1}, \\ \frac{\partial w^{p(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\alpha} = -d_2 m \sin m\theta. \end{cases} \quad (35)$$

Подставляя найденное ранее выражение для $\tau_{\rho z}^{p(1)}$ (30) и решая систему (34), получим

$$\begin{aligned} w^{e(1)} = & -\frac{(\beta-1)}{G\omega(1-\alpha^2)} \left(\rho + \frac{\alpha^2}{\rho} \right) \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta \right) - \\ & - \frac{(a_1 - b_1)(\beta-1)}{4G\omega(1-\alpha^4)} \left(\rho^2 + \frac{\alpha^4}{\rho^2} \right) \sin 2\theta + \\ & + \left(\frac{-d_1\beta + G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{G\omega(1-\alpha^{2m})} \left(\rho^m + \frac{\alpha^{2m}}{\rho^m} \right) + \frac{d_2 \alpha^{m+2}}{\rho^m} \right) \sin m\theta. \end{aligned} \quad (36)$$

Напряженное состояние в упругой области определяется подстановкой (36) в (31).

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z}^{e(1)} = & -\frac{\beta-1}{1-\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta \right) + \frac{(a_1 - b_1)}{2(1+\alpha^2)} \left(\rho - \frac{\alpha^4}{\rho^3} \right) \sin 2\theta \right] + \\ & + m \left(\frac{-d_1\beta + G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{1-\alpha^{2m}} \left(\rho^{m-1} - \frac{\alpha^{2m}}{\rho^{m+1}} \right) - \frac{G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{\rho^{m+1}} \right) \sin m\theta, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{e(1)} = & -\frac{\beta-1}{1-\alpha^2} \left[\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) (-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) + \frac{a_1 - b_1}{2(1+\alpha^2)} \left(\rho + \frac{\alpha^4}{\rho^3}\right) \cos 2\theta \right] + \\ & + m \left(\frac{-d_1\beta + G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{1-\alpha^{2m}} \left(\rho^{m-1} + \frac{\alpha^{2m}}{\rho^{m+1}}\right) - \frac{G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{\rho^{m+1}} \right) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (38)$$

Из условия (34), учитывая (25), получим соотношение для определения радиуса упругопластической границы

$$\rho_1 = \left(\tau_{\theta z}^{p(1)} - \tau_{\theta z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=1}. \quad (39)$$

Подставляя в (39) полученные выше выражения для компоненты напряжений $\tau_{\theta z}^{(1)}$ (28) и (38), найдем

$$\begin{aligned} \rho_1 = & \left(\frac{(\beta-1)(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2} + 1 \right) (-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) + \\ & + \frac{a_1 - b_1}{4} \left(\frac{2(\beta-1)(1+\alpha^4)}{1-\alpha^4} + 1 \right) \cos 2\theta - \frac{a_1 + b_1}{4} - \\ & - m \left(\frac{-d_1\beta + G\omega d_2 \alpha^{m+2}}{1-\alpha^{2m}} - G\omega d_2 \alpha^{m+2} \right) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (40)$$

Определим в первом приближении функцию перемещений в пластической области $w^{p(1)}$.

Из соотношений ассоциированного закона пластического течения (7), (8) получим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{\rho z}^p \left((A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta) \tau_{\theta z}^p + (B - A) \tau_{\rho z}^p \cos \theta \sin \theta + A k_1 \sin \theta - B k_2 \cos \theta \right) = \\ d\varepsilon_{\theta z}^p \left((A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \tau_{\rho z}^p + (B - A) \tau_{\theta z}^p \cos \theta \sin \theta - A k_1 \cos \theta - B k_2 \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Подставляя в (41) разложения (18), (21), (22), в первом приближении будем иметь

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{\rho z}^{p(0)} \left(\tau_{\theta z}^{p(0)} (a_1 \sin^2 \theta + b_1 \cos^2 \theta) + \tau_{\theta z}^{p(1)} + (b_1 - a_1) \tau_{\rho z}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta + k_1^{(1)} \sin \theta - k_2^{(1)} \cos \theta \right) \\ + d\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} \tau_{\theta z}^{p(0)} = \\ = d\varepsilon_{\theta z}^{p(0)} \left(\tau_{\rho z}^{p(0)} (a_1 \cos^2 \theta + b_1 \sin^2 \theta) + \tau_{\rho z}^{p(1)} + (b_1 - a_1) \tau_{\theta z}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta - k_1^{(1)} \cos \theta - k_2^{(1)} \sin \theta \right) \\ + d\varepsilon_{\theta z}^{p(1)} \tau_{\rho z}^{p(0)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Учет нулевого приближения (25) в (42) позволяет получить ассоциированный закон в виде

$$d\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z}^{p(0)} \left(\tau_{\rho z}^{p(1)} + \frac{b_1 - a_1}{2} \sin 2\theta - k_1^{(1)} \cos \theta - k_2^{(1)} \sin \theta \right), \quad (43)$$

где, следуя [9],

$$\varepsilon_{\theta z}^{p(0)} = \lambda^0 = \frac{G\omega\rho - 1}{2G}, \quad (44)$$

$\lambda^{(0)}$ — скалярный множитель в нулевом приближении.

Подставляя (30) в (43), получим

$$d\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} = -\frac{\beta}{\rho} \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta + d_1 m \sin m\theta \right) d\lambda^{(0)}. \quad (45)$$

В процессе нагружения частица тела переходит в пластическое состояние в момент прохождения через нее упругопластической границы, что соответствует $\rho = 1$. Следовательно, в процессе пластического деформирования безразмерный радиус в точке будет изменяться от 1 до некоторого значения ρ , соответствующего текущему значению приложенных внешних усилий [12].

Соотношение (44) позволяет в (45) перейти от интегрирования по $\lambda^{(0)}$ к интегрированию по радиусу упругопластической границы, в результате чего получим

$$\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} = \frac{\omega\beta}{2} \left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta + d_1 m \sin m\theta \right) \ln \frac{1}{\rho}. \quad (46)$$

Определить перемещения в пластической зоне позволяет уравнение, полученное из первых соотношений в (6),(9),(10), а также выражений (30) и (45),

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{p(1)}}{\partial \rho} = \frac{\beta}{G} \left[\left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta \right) \left(G\omega \ln \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\beta} \right) + \right. \\ \left. + d_1 m \sin m\theta \left(G\omega \ln \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Решая уравнение (47), найдем $w^{p(1)}$ с точностью до функции координаты θ .

$$\begin{aligned} w^{p(1)} = \frac{\beta}{G} \left[\left(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta \right) \left(G\omega\rho \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \ln \rho + \frac{\rho}{\beta} \right) + \right. \\ \left. + d_1 m \sin m\theta \left(G\omega\rho \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \ln \rho + \frac{\rho}{\beta} \right) \right] + \varphi(\theta). \end{aligned} \quad (48)$$

Функция $\varphi(\theta)$ определяется из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе (16). В первом приближении это условие с учетом (23), (24) и (25) будет иметь вид

$$w^{p(1)} \Big|_{\rho=1} = w^{e(1)} \Big|_{\rho=1}. \quad (49)$$

Подставляя (48) и (36) в (49), а затем найденное выражение для функции $\varphi(\theta)$ в (48), получим поле перемещений в пластической области в первом приближении

$$\begin{aligned}
w^{p(1)} = \frac{1}{G} & \left[(k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta) \left\{ G\omega\beta\rho \left(\ln \left(\frac{1}{\rho} \right) + 1 \right) - \beta \ln \rho + \rho + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} - G\omega\beta - 1 \right\} + \right. \\
+ \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta & \left\{ G\omega\beta\rho \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \ln \rho + \rho + \frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^4)}{2(1 - \alpha^4)} - G\omega\beta - 1 \right\} + \\
& + \sin m\theta \left\{ d_1 m \left(G\omega\beta\rho \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \ln \rho - G\omega\beta \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{d_1\beta + 2G\omega d_2\alpha^{m+2}}{1 - \alpha^{2m}} \right\} \right]. \quad (50)
\end{aligned}$$

Используя вторые соотношения в (6), (9) и (10), а также и (28), (50), найдем компоненты деформации $\varepsilon_{\theta z}^{(1)}$ и $\varepsilon_{\theta z}^{p(1)}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta z}^{(1)} = \frac{1}{2G} & \left[(-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) \left\{ G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} - G\omega\beta - 1 \right) + 1 \right\} + \right. \\
& + (a_1 - b_1) \cos 2\theta \left\{ G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^4)}{2(1 - \alpha^4)} - G\omega\beta - 1 \right) + 1 \right\} + \right. \\
& m \cos m\theta \left\{ d_1 m \left(G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho - \frac{G\omega\beta}{\rho} \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1 - d_1\beta + 2G\omega d_2\alpha^{m+2}}{\rho(1 - \alpha^{2m})} \right\} \right], \\
\varepsilon_{\theta z}^{p(1)} = \frac{1}{2G} & \left[(-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) \left\{ G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} - G\omega\beta - 1 \right) \right\} + \right. \\
& + (a_1 - b_1) \cos 2\theta \left\{ G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\beta - 1)(1 + \alpha^4)}{2(1 - \alpha^4)} - G\omega\beta - 1 \right) + \frac{3}{4} \right\} + \right. \\
& m \cos m\theta \left\{ d_1 m \left(G\omega\beta \left(\ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) - \beta \frac{1}{\rho} \ln \rho - \frac{G\omega\beta}{\rho} \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1 - d_1\beta + 2G\omega d_2\alpha^{m+2}}{\rho(1 - \alpha^{2m})} \right\} + \frac{a_1 + b_1}{4} \right].
\end{aligned}$$

На рис. 2 изображена упругопластическая граница в нулевом приближении ρ_0 и в первом приближении $\rho_s = \rho_0 + \delta\rho_1$ при $\delta = 0.04$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.6$, $b_1 = 0.4$, $a_1 = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $m = 3$, $G\omega = 1$, $G = 323.67$.

На рис. 3, при тех же значениях параметров, представлено поле перемещений в упругой и пластической областях.

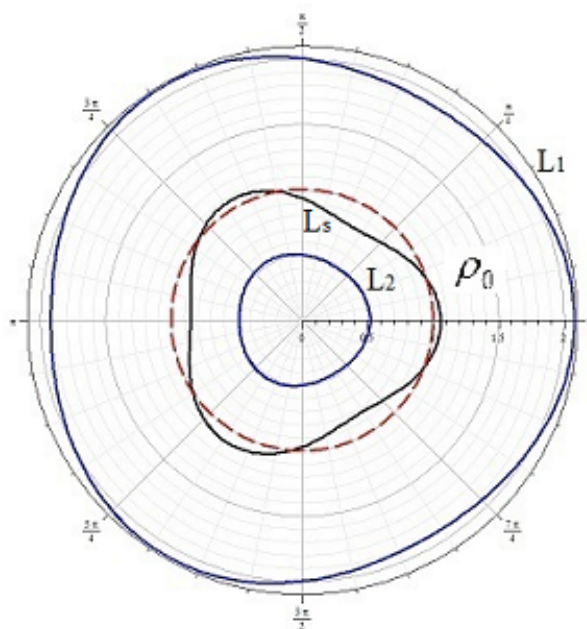


Рис. 2. Упругопластическая граница в нулевом и первом приближении.

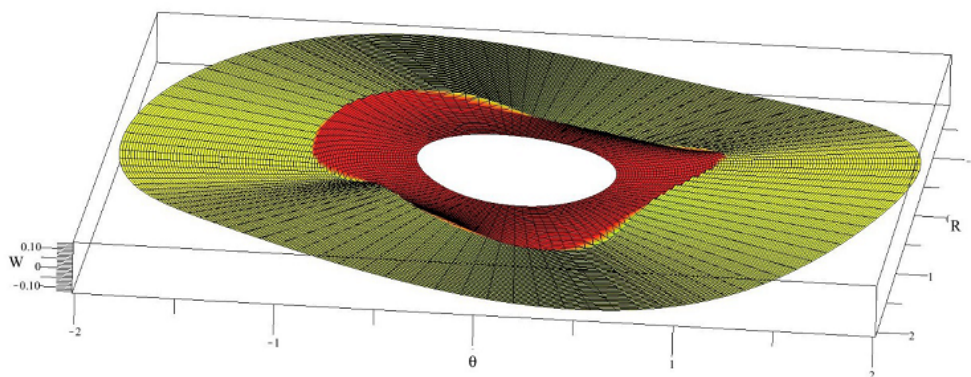


Рис. 3. Поле перемещений в упругой и пластической областях при первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Задорожний В. Г., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 1. С.138–146.
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 560–600.
- [4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [5] Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1. С. 64–68.
- [6] Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д., Свиридов И. Э. Упругопластическое кручение толстостенной трубы в случае трансляционной анизотропии // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Чебоксары, 2014. Ч. 1. С. 193–199.
- [7] Ковалев А. В., Горностаев К. К. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 135–140.
- [8] Ковалев А. В., Горностаев К. К. О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3. С. 176–184.
- [9] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Об определении перемещений в задаче упругопластического кручения кругового цилиндра в случае трансляционной анизотропии // Материалы Всероссийской научной школы-конференции „Механика предельного состояния и смежные вопросы“, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. Чебоксары, 2015. С. 113–117.
- [10] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Упругопластическое кручение кругового цилиндра в случае анизотропии согласно Хиллу // Сборник трудов Международной научно-технической конференции. Воронеж, 2015. С. 68–71.
- [11] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении анизотропных цилиндрических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). С. 150–155.
- [12] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004. 219 с.
- [13] Фоминых С. О. Определение упругопластического состояния в толстостенной трубе при условии идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 150–153.

A. V. Kovalev, I. E. Sviridov, Ju. D. Scheglova

ELASTOPLASTIC TORSION OF THICK-WALLED NON-CIRCULAR CROSS-SECTION SHAFT IN CASE OF GENERAL FORM ANISOTROPY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The present work is devoted to the problem of elastoplastic torsion of the thick-walled non-circular cross-section shaft. It is considered as an anisotropic material that in particular cases is in the kinematic properties of the anisotropy and anisotropy according to Hill. With using perturbation method, stress-strain state and elastoplastic boundary at first approximate is defined.

Keywords: stress, strain, elastoplastic torsion, anisotropy according to Hill, kinematic anisotropy.

REFERENCES

- [1] Zadorozhniy V. G., Kovalev A. V., Sporykhin A. N. An analytic solution of the plane elastoplastic problem // Russian Academy of Sciences. Mechanics of solid body. 2008. № 1. P. 138–146. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbing approximation in theory of elastoplastic body. M.: Science, 1978. 208 p. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D., Mironov B. G. On ratio of translational perfectly plastic anisotropy at torsion // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 560–600. (in Russian).
- [4] Kachanov L. M. Basics of the theory of plasticity. M.: Science, 1969. 420 p. (in Russian).
- [5] Kovalev A. V. On account of the associated compressibility of the elastic-plastic bodies in the case of the plane strain // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 1. P.64–68. (in Russian).
- [6] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastoplastic torsion of the thick-walled shaft in case of translational anisotropy // Materials of VIII All-Russian conference of mechanics of deformable bodies. Cheboksary, 2014. Vol. 1. P. 193–199. (in Russian).
- [7] Kovalev A. V., Gornostaev K. K. An elastoplastic state of thick-walled pipes with respect to temperature for the complex material model // Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015. № 1. P. 135–140. (in Russian).
- [8] Kovalev A. V., Gornostaev K. K. A symmetrical deformation of hardening elastoviscoplastic pipe with temperature// Bulletin of the Yakovlev Chuvash State

© Kovalev A. V., Sviridov I. E., Scheglova J. D., 2016

Kovalev Alexey Victorovich

e-mail: kav-mail@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Simulation, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Scheglova Julia Dmitrievna

e-mail: scheglova@gmail.com, Candidate of Phys. & Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Simulation, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Sviridov Ilya Eduardovich

e-mail: synettt@gmail.com, Post Graduate Student, Department of Mechanics and Computer Simulation, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3. P. 176–184. (in Russian).

[9] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Determination of displacements in problem of the elastoplastic torsion of the circle cross-section pipe in case of translational anisotropy // Materials of All-Russian Scientific School-Conference «Mechanics of limit state and related questions», dedicated on the 85th anniversary of Prof. D.D. Ivlev. Cheboksary, 2015. P. 113–117. (in Russian).

[10] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastoplastic torsion of the circle pipe in case of anisotropy according Hill // Proceedings of the International scientific-technical conference. Voronezh, 2015. P. 68–71. (in Russian).

[11] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Torsion of the anisotropy cylindrical // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2011. № 1 (9). P. 150–155. (in Russian).

[12] Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D. One-dimensional problems of elastic visco-plasticity with an unknown boundary. Voronezh : Publishing House of Voronezh State University, 2004. 219 p. (in Russian).

[13] Fominyh S. O. Definition of elastoplastic state in the thick-walled pipe in case of ideal plastic translational anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 2 (16). P. 150–153. (in Russian).