Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4 (30). С. 73–80

Н. М. Матченко[1], *И. Н. Матченко*[2]

К ПОСТРОЕНИЮ ЧЕТЫРЕХКОНСТАНТНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ИЗОТРОПНО УПРУГОЙ СРЕДЫ

[1] *Тульский государственный университет, г. Тула, Россия*

[2] *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Предлагается подход к формулировке четырех константных определяющих соотношений изотропно упругой среды, заключающийся в использовании первых двух инвариантов тензора напряжений и параметра жесткости вида напряженного состояния. Показано, что для определения констант, характеризующих механические свойства упругой среды, достаточно двух базовых экспериментов на одноосное растяжение и сжатие.

Ключевые слова: инварианты напряженного состояния, параметр жесткости нагружения, квази линейная упругая среда, четырехконстантный упругий потенциал.

УДК: 539.3

Довольно подробный обзор работ, посвященный построению определяющих соотношений, учитывающих чувствительность деформирования упругой среды к виду напряженного состояния, представлен в статьях [3]–[5].

Рассмотрим возможности построения четырех константных квазиквадратичных потенциалов изотропной среды на базе двух первых инвариантов тензора напряжений и весового коэффициента равного в трехмерном векторном пространстве главных напряжений косинусу угла между направлением гидростатической оси и вектора тензора напряжений. Показано, что для определения четырех констант достаточно экспериментов на одноосное растяжение и сжатие.

1. Инварианты напряженного состояния. Сплошную среду отнесем к декартовой системе координат $\mathrm{x}_i \quad (i = 1, 2, 3)$. Напряженное состояние в элементе сплошной среды характеризуется симметричным тензором напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Растягивающее усилие считается положительным.

Матченко Николай Михайлович
e-mail: ekc_05@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.
Матченко Илья Николаевич
e-mail: ekc_05@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 19.11.2016

Напряженное состояние изотропной среды также можно характеризовать триэдром направлений главных напряжений σ_i и тремя инвариантами напряженного состояния. Далее рассмотрим сплошные среды, механические характеристики, которые не зависят от третьих инвариантов тензора напряжений.

В качестве примера выберем следующие первый и второй инварианты тензора напряжений [8], [9]: инварианты, полученные сверткой произведения тензоров напряжений,

$$H_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad H_{II} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2; \tag{1.1}$$

естественные инварианты

$$I_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_{II} = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2; \tag{1.2}$$

алгебраические инварианты

$$J_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1. \tag{1.3}$$

Заметим, что некоторые из приведенных инвариантов имеют ясный механический смысл. Так, например, первые инварианты равны между собой и пропорциональны гидростатическому давлению $H_I = I_I = J_I = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = 3\sigma$. Инвариант $\sqrt{H_{II}} = \Sigma$ равен модулю вектора напряжений $\vec{\Sigma}$ в трехмерном векторном пространстве главных напряжений [6]. Инвариант $I_{II} = \sqrt{3}\Sigma_d$ пропорционален модулю вектора девиаторных напряжений $\vec{\Sigma}_d$.

2. Квадратичные потенциалы линейноупругой среды. Квадратичные потенциалы линейноупругой среды Гука можно представить через приведенные выше инварианты (1.1)–(1.3):

$$\mathrm{W} = (A_h H_I^2 + B_h H_{II}), \tag{2.1}$$

или

$$\mathrm{W} = (A_i I_I^2 + B_i I_{II}), \tag{2.2}$$

или

$$\mathrm{W} = (A_j J_I^2 + B_j J_{II}). \tag{2.3}$$

Используя потенциалы (2.1)–(2.3), можно получить выражения для главных деформаций e_i. Например, из потенциала (2.1) следует

$$e_1 = 2(A_h H_I + B_h \sigma_1) \quad (123). \tag{2.4}$$

Знак (123) означает, что выражения для главных деформаций e_2, e_3 получаются из (2.4) круговой перестановкой.

Механические характеристики линейно упругой среды находятся из эксперимента на одноосное растяжение (или сжатие). Напряженное состояние при этом задается в виде $\sigma_1 = \omega$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Из (2.1) следует

$$e_1 = 2(A_h + B_h)\omega, \quad e_2 = e_3 = 2A_h\omega.$$

Учитывая, что

$$e_1/\omega = 2(A_h + B_h) = 1/E, \quad e_2/\omega = e_3/\omega = 2A_h = -\nu/E,$$

получим

$$A_h = -\nu/2E, \quad B_h = (1+\nu)/2E.$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Рассуждая аналогично, в соответствии с формулировкой потенциала (2.2) запишем

$$e_1 = 2[A_i I_I + B_i(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)] \quad (123),$$

$$A_i = (1-2\nu)/6E, \quad B_i = (1+\nu)/6E.$$

Аналогично, потенциалу (2.3) соответствует

$$e_1 = 2A_j J_I + B_j(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (123),$$

$$A_j = 1/2E, \quad B_j = -(1+\nu)/E.$$

Следовательно, константы, входящие в потенциалы (2.1)–(2.3), вычисляются через две механические характеристики среды: модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Модель линейноупругой среды Гука постулирует независимость механических характеристик сплошной среды от вида напряженного состояния. Потенциалы (2.1)–(2.3), записанные через различные инварианты, прогнозируют в эксперименте на чистый сдвиг одинаковые значения модуля сдвига $G_\tau = E/2(1+\nu)$ и отсутствие дилатации $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

3. Четырехконстантные потенциалы. Рассмотрим сплошные среды, механические характеристики которых различны при одноосном растяжении и сжатии. Введем предположение, что коэффициенты квадратичных потенциалов (2.1)–(2.3) являются линейными функциями параметра жесткости нагружения [2]

$$\chi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}. \tag{3.1}$$

Параметр χ является инвариантом напряженного состояния и пропорционален косинусу угла между вектором главных напряжений $\vec{\Sigma}$ и направлением гидростатической оси в трехмерном векторном пространстве главных напряжений [6]. Это предположение позволяет сформулировать четырехконстантные квазиквадратичные потенциалы:

$$\mathrm{W} = (A_h + a_h\chi)H_I^2 + (B_h + b_h\chi)H_{II}, \tag{3.2}$$

или

$$\mathrm{W} = (A_i + a_i\chi)I_I^2 + (B_i + b_i\chi)I_{II}, \tag{3.3}$$

или

$$\mathrm{W} = (A_j + a_j\chi)J_I^2 + (B_j + b_j\chi)J_{II}. \tag{3.4}$$

Покажем, что четыре константы, входящие в каждый из квазиквадратичных потенциалов (3.2)–(3.4), однозначно определяются в эксперименте на одноосное растяжение и сжатие.

Из потенциала (3.2) следует

$$e_1 = 2A_h H_I + a_h[(\Sigma - \chi\sigma_1)\chi + 2H_I] + 2B_h\sigma_1 + b_h(\Sigma + \chi\sigma_1) \quad (123).$$

Из эксперимента на одноосное растяжение и сжатие имеем

$$2(A_h + a_h + B_h + b_h) = 1/\mathrm{E}_+, \quad 2A_h + 3a_h + b_h = -\nu_+/\mathrm{E}_+,$$

$$2(A_h - a_h + B_h - b_h) = 1/\mathrm{E}_-, \quad 2A_h - 3a_h - b_h = -\nu_-/\mathrm{E}_-. \tag{3.5}$$

Решая совместно уравнения (3.5), получим

$$A_h = -\frac{1}{4}\left(\frac{\nu_+}{E_+} + \frac{\nu_-}{E_-}\right), \quad B_h = \frac{1}{4}\left(\frac{1+\nu_+}{E_+} + \frac{1+\nu_-}{E_-}\right),$$

$$a_h = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right) + \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-}\right)\right], \quad b_h = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right) + \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-}\right)\right].$$

где E_+, E_- – модули упругости, ν_+, ν_- – коэффициенты Пуассона при одноосном растяжении и сжатии соответственно.

Из потенциала (3.3) имеем следующие определяющие соотношения:

$$e_1 = 2(A_i + a_i\chi)I_I + [a_i\chi^2 + b_i(1 + I_{II}/\Sigma^2)](\Sigma - \chi\sigma_1) + 2B_i(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \quad (123).$$

Обрабатывая данные, полученные в экспериментах на одноосное растяжение и сжатие, получим следующие выражения для констант:

$$A_i = \frac{1}{12}\left(\frac{1-2\nu_+}{E_+} + \frac{1-2\nu_-}{E_-}\right), \quad B_i = \frac{1}{12}\left(\frac{1+\nu_+}{E_+} + \frac{1+\nu_-}{E_-}\right),$$

$$a_i = -\frac{1}{6}\left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-}\right), \quad b_i = \frac{1}{12}\left[\left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right)\right].$$

Аналогично, рассматривая потенциал (3.4), получим определяющие соотношения

$$e_1 = 2(A_j + a_j\chi)J_I + [a_j\chi^2 + b_j J_{II}/\Sigma^2](\Sigma - \chi\sigma_1) + (B_j + b_j\chi)(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (123).$$

Эксперименты на одноосное растяжение и сжатие позволяют установить зависимости

$$A_j = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_+} + \frac{1}{E_-}\right), \quad a_j = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right),$$

$$B_j = -\frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu_+}{E_+} + \frac{1+\nu_-}{E_-}\right), \quad b_j = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right) + \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-}\right)\right].$$

Отметим, что при чистом сдвиге все три потенциала (3.2)–(3.4) дают одинаковый прогноз значений как для модуля сдвига G_τ

$$\frac{1}{G_\tau} = \frac{1+\nu_+}{E_+} + \frac{1+\nu_-}{E_-},$$

так и для объемной деформации

$$\theta_\tau = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-}\right) + \left(\frac{\nu_+}{E_+} - \frac{\nu_-}{E_-}\right)\right]\tau,$$

где τ – максимальное касательное напряжение.

4. Частный случай. В связи с тем, что при формулировке трех константных потенциалов, использующих только первые два инварианта, допускаются ошибки, сделаем несколько замечаний.

Если механические характеристики материала таковы, что $a_h = 0$, то из потенциала (3.2) следует трех константный потенциал деформаций [1]

$$\mathrm{W} = A_h H_I^2 + B_h H_{II} + b_h H_I \sqrt{H_{II}}. \tag{4.1}$$

Потенциал (4.1) аналогичен потенциалу напряжений В. П. Мясникова [7]

$$\mathrm{W} = 0,5\lambda\Lambda_I^2 + \mu\Lambda_{II} - \varepsilon\Lambda_I\sqrt{\Lambda_{II}}, \tag{4.2}$$

где $\Lambda_I = e_1 + e_2 + e_3$, $\Lambda_{II} = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$.

А. А. Трещев в монографии [10] утверждает, что потенциалы, построенные на использовании инвариантов свертки произведения тензоров, противоречат физическому смыслу.

Покажем, что это утверждение А. А. Трещева несостоятельно. Сначала приведем вариант физически противоречивого потенциала. Например, в работе [1] был рассмотрен квазиквадратичный трех константный потенциал вида

$$\mathrm{W} = f\sigma^2 + g\sigma\tau + h\tau^2, \tag{4.3}$$

где $3\sigma = I_1$, $3\tau = \sqrt{I_2}$.

Поскольку потенциал (4.3) не зависит от третьего инварианта, то вариация энергии упругого деформирования вычисляется по формуле [9]

$$\mathrm{W} = 3(e\delta\sigma + \gamma\delta\tau), \tag{4.4}$$

где $e = (e_1+e_2+e_3)/3$ – средняя деформация, $3\gamma = \sqrt{(e_1-e_2)^2 + (e_2-e_3)^2 + (e_3-e_1)^2}$ – параметр формоизменения.

Из (4.3) и (4.4) следуют определяющие соотношения

$$3e = 2f\sigma + g\tau, \quad 3\gamma = g\sigma + 2h\tau. \tag{4.5}$$

Подвергнем изотропный материал, механические свойства которого описывается потенциалом (4.2), воздействию гидростатического давления $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, $\tau = 0$.

Соотношения (4.5) принимают вид

$$3e = 2f\sigma, \quad 3\gamma = g\sigma. \tag{4.6}$$

Из второго соотношения в формулах (4.6) следует, что **воздействие гидростатического давления на изотропный материал приводит к его формоизменению, что противоречит физическому смыслу**.

Рассмотрим теперь потенциал (4.1). Учитывая, что $H_1 = 3\sigma$, $H_2 = 9(\sigma^2 + \tau^2)$, из потенциала (4.1) следуют определяющие соотношения

$$e = 3\left[2(A_h + B_h)\sigma + b_h\left(\sqrt{\sigma^2+\tau^2} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right)\right],$$
$$\gamma = 3\left[2B_h + b_h\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right)\right]\tau. \tag{4.6}$$

При воздействии на изотропный материал только гидростатического давления соотношения (4.6) принимают вид

$$e = 6(A_h + B_h + b_h)\sigma, \quad \gamma = 0. \tag{4.7}$$

Из второго соотношения в (4.7) видно, что наложение гидростатического давления на изотропный материал, подчиняющийся потенциалу (4.1), не приводит к формоизменению, следовательно, **потенциал (4.1) физически не противоречив**.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Буренин А. А., Якунина В. М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. М. : Физматлит, 2006. С. 100–106.

[2] Матченко Н. М. О выборе показателя пластичности // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 1987. № 3. С. 150–151.

[3] Матченко Н. М., Толоконников Л. А., Трещев А. А. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 1: Квазилинейные соотношения // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 73–78.

[4] Матченко Н. М., Толоконников Л. А., Трещев А. А. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 2: Нелинейные соотношения // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 87–95.

[5] Матченко Н. М., Трещев А. А. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения. Тула : ТулГУ, 2000. 149 с.

[6] Матченко Н. М., Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н. Шесть вариантов представления вектора интенсивности тензора напряжений в пространстве главных напряжений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (11). С. 90–97.

[7] Мясников В. П., Олейников А. И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322. № 1. С. 57–60.

[8] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие для мех. мат. и физ. спец. университетов. М. : Наука. 1988. 711 с.

[9] Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. М. : Высш. школа, 1979. С. 61.

[10] Трещев А. А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. Тула : ТулГУ, 2016. 326 с.

I. N. Mattchenko[1], *N. M. Mattchenko*[2]

FOUR-CONSTANT DEFINING ROLATIONS OF QUASI-LINTAR OF THE ISOTROPI-ELASTIC ENVIRONMENT

[1]*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

[2]*Tula State University, Tula, Russia*

Abstract. The approach to the formulation of four constant defining relations of the isotropic elastic environment, consisting in use of parameter of rigidity loading is offered. For definition of the constants describing mechanical properties of the elastic environment, it is enough only two experiments on unialxial stretching and compression.

Keywords: invariants of intense condition, parameter of rigidity loading, quasi-linear elastic environment, fourconstant elastic potential.

REFERENCES

[1] Burenin A. A., Yakunin V. M. To modelling deformation of the materials, differently resisting to a stretching and compression // Problems of mechanics of deformable firm bodies and rocks. M. : Phismathllit, 2006. P. 100–106. (in Russian).

[2] Matchenko N. M. About a choice of a parameter of plasticity // News of higher educational institutions. Ferrous metallurgy. 1987. № 3. P. 150–151. (in Russian).

[3] Matchenko N. M., Tolokonnikov L. A., Treshchev A. A. Define of a ratio isotropic differently resisting environments. Part 1: Quasi-linear parities // News of the Russian Academy of Science. MRS. 1995. № 1. P. 73–78. (in Russian).

[4] Matchenko N. M., Tolokonnikov L. A., Treshchev A. A. Define of a ratio isotropic differently resisting environments. Part 2: Nonlinear Ratio // News the Russian Academy of Sciences. MRS. 1999. № 4. P. 87–95. (in Russian).

[5] Matchenko N. M., Treshchev A. A. Theory of deformation of differently resisting materials. Defining ratio. Tula : Tula State University, 2000. 149 p. (in Russian).

[6] Matchenko N. M., Kuznetsov E. E., Matchenko I. N. Six of variants of representation of a vector of intensity тензора pressure in space of the main pressure // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2013. № 1 (11). P. 90–97. (in Russian).

[7] Mysnikov V. P., Olejnikov A. I. Core's butchers the general ratio of model is isotropic-elastic differently resisting environments // Reports of AS SSSR. 1992. Vol. 322. № 1. P. 57–60. (in Russian).

[8] Rabotnov J.N. Mechanics of a deformable firm body: manual for mech. and phis. spec. of Universities. M. : Nauka, 1988. 711 p. (in Russian).

[9] Tolokonnikov L. A. Mechanics of a deformable firm body. M. : Higher School, 1979. 318 p. (in Russian).

Matchenko Nikolay Mihalovich, Dr. Sci. Phys.& Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Matchenko Ilya Nikolaevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[10] Treshchev A. A. The theory of deformation and durability of materials with a primary or induced sensitivity to a kind of the intense condition. Determining correlations. Tula : Tula State University. 2016. 326 p. (in Russian).