Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4 (30). С. 102–107

А. Н. Максимов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВОЗМУЩЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ПРИ УСЛОВИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Методом малого параметра получено решение аналитической задачи определения нулевых и первых приближений компонент напряжений в упругой и пластической областях при условии полной пластичности для сжимаемого пространства, ослабленного полостью.

Ключевые слова: напряжения, деформации, пластичность, упругость.

УДК: 539.3+624.073

В работе исследуется напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого массива. В постановке задачи массив ослаблен полностью, внутри которого давление отсутствует, а на бесконечности приложены взаимно-перпендикулярные усилия. Задача решена методом малого параметра, в сферической системе координат, в безразмерных единицах длины (все величины, имеющие размерность длины отнесены к радиусу сферической полости ρ_0).

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды определено в виде [1]:

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \tag{1}$$

где σ'_{ij} – компоненты девиатора напряжения, k_0 – коэффициент сцепления, $a = tg\alpha$ – коэффициент внутреннего трения, α – угол внутреннего трения.

Для решения задачи в сферической системе координат используем уравнения равновесия [2]:

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\rho\phi}}{\partial\phi} + \frac{1}{\rho}(2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{\rho\theta}ctg\theta) = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial\phi} + \frac{1}{\rho}((\sigma_\theta - \sigma_\phi)ctg\theta + 3\tau_{\rho\theta}) = 0, \tag{2}$$

Максимов Алексей Николаевич
`e-mail:` alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.09.2016

$$\frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho}(3\tau_{\rho\phi} + 2\tau_{\theta\phi} ctg\theta) = 0.$$

Условия пластичности Треска-Сен-Венана [3] с учетом (1):

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\cdot\left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right) - \tau_{\rho\theta}^2 = 0,\\
&\left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\cdot\left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right) - \tau_{\theta\phi}^2 = 0,\\
&\left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\cdot\left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right) - \tau_{\rho\phi}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

а также

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\cdot \tau_{\theta\phi} = \tau_{\rho\theta}\cdot\tau_{\rho\phi},\\
&\left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\cdot \tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\phi}\cdot\tau_{\theta\phi},\\
&\left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\cdot \tau_{\rho\phi} = \tau_{\rho\theta}\cdot\tau_{\theta\phi}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho l + \tau_{\rho\theta} m + \tau_{\rho\phi} n = P_\rho,\\
&\tau_{\rho\theta} l + \sigma_\theta m + \tau_{\theta\phi} n = P_\theta,\\
&\tau_{\rho\phi} l + \tau_{\theta\phi} m + \sigma_\phi n = P_\phi,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\sigma_\rho, \tau_{\rho\theta}....$ – компоненты девиатора напряжения, l, m, n – направляющие косинусы нормали, P_ρ,P_θ,P_ϕ – проекции усилий на оси ρ, θ, ϕ, $\sigma = (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\phi)/3$ – среднее давление.

Компоненты напряжения представим в виде рядов по малому параметру $\delta_(\delta \ll 1)$:

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \delta\sigma'_\rho, \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta\sigma'_\theta, \sigma_\phi = \sigma_\phi^0 + \delta\sigma'_\phi,\\
&\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^0 + \delta\tau'_{\rho\theta}, \tau_{\rho\phi} = \tau_{\rho\phi}^0 + \delta\tau'_{\rho\phi}, \tau_{\theta\phi} = \tau_{\theta\phi}^0 + \delta\tau'_{\theta\phi}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Условия пластичности (3) и (4) могут быть удовлетворены в трех случаях. Случай, соответствующий сферической полости был рассмотрен в [4].

В работе рассматривается аналитическая задача, соответствующая случаю:

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho^0 - \sigma^0 + \tfrac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) = 0,\\
&\sigma_\theta^0 - \sigma^0 + \tfrac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) = 0,\\
&\sigma_\phi^0 - \sigma^0 + \tfrac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) \neq 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решая совместно (7) и (3), получим:

$$\sigma_\theta^0 = \sigma_\rho^0, \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\phi}^0 = \tau_{\theta\phi}^0 = 0. \tag{8}$$

Тогда (6) с учетом (8) примет вид:

$$\sigma^0 = (2\sigma_\rho^0 + \sigma_\phi^0)/3. \tag{9}$$

Решая совместно (7) и (9), получим:

$$\sigma_\rho^0 = \sigma_\phi^0/\mathrm{A} + D, \tag{10}$$

где $\mathrm{A} = (3+4a)/(3-2a), D = -6k_0/(3+4a)$.

Уравнения равновесия (2) с учетом (8) примут вид:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^0}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\phi^0) = 0, \frac{\partial\sigma_\phi^0}{\partial\phi} = 0, \frac{\partial\sigma_\rho^0}{\partial\theta} + (\sigma_\rho^0 - \sigma_\phi^0)ctg\theta = 0. \tag{11}$$

Решая совместно (10) и (11), получим для компонент нормального напряжения в нулевом приближении в пластической области:

$$\sigma_\theta^{0\mathrm{p}} = \sigma_\rho^{0\mathrm{p}} = (\mathrm{c}(\rho\sin\theta)^{\frac{6a}{3-2a}} - k_0)/a, \sigma_\phi^{0\mathrm{p}} = \mathrm{A}\sigma_\theta^{0\mathrm{p}} - AD, \tag{12}$$

где c – const, A и D определены выше.

Решая совместно (7), (8) и линеаризированные условия пластичности (3), получим:

$$\sigma'_\rho - \sigma'\left(1 - \frac{2}{3}\mathrm{a}\right) = 0, \sigma'_\theta - \sigma'\left(1 - \frac{2}{3}\mathrm{a}\right) = 0. \tag{13}$$

Тогда

$$\sigma'_\rho = \sigma'_\theta \tag{14}$$

$$\sigma' = (2\sigma'_\rho + \sigma'_\phi)/3. \tag{15}$$

Решая совместно (13) и (15), получим

$$\sigma'_\phi = \mathrm{A}\tilde{\sigma'}, \tag{16}$$

где

$$\tilde{\sigma'}{=}\sigma'_\rho = \sigma'_\theta. \tag{17}$$

Решая совместно (7), (8) и линеаризированные условия пластичности (4), получим:

$$\tau'_{\rho\theta} = 0. \tag{18}$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (17), (18) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\widetilde{\sigma'}}{\partial\varrho} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{\rho\phi}}{\partial\phi} + \frac{\widetilde{\sigma'}}{\rho}(1-A) = 0,\\
&\frac{\partial\widetilde{\sigma'}}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{\theta\phi}}{\partial\phi} + \widetilde{\sigma'}(1-A)\,\mathrm{ctg}\theta = 0,\\
&\frac{\partial\tau'_{\rho\phi}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau'_{\theta\phi}}{\partial\theta} + \frac{A}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\widetilde{\sigma'}}{\partial\phi} + \frac{1}{\rho}\left(3\tau'_{\rho\phi} + 2\tau'_{\theta\phi}\mathrm{ctg}\theta\right) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Для решения (14) водится функция $U(\rho,\theta,\phi)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$\widetilde{\sigma}' = \frac{\partial U}{\partial \phi}, \tau'_{\rho\phi} = -\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \sin\theta - (1-A)U\sin\theta, \tau'_{\theta\phi} = -\frac{\partial U}{\partial \theta}\sin\theta - (1-A)U\cos\theta. \qquad (20)$$

Тогда первые два уравнения (20) тождественно удовлетворяются, а последнее примет вид:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + (5-A)\rho\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + (4-A)\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{A}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{2(1-A)}{\sin^2\theta}U = 0. \qquad (21)$$

Решение (21) найдено методом разделения переменных:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2}\right)\left(a_{mn}\cos\frac{m}{\sqrt{A}}\phi + b_{mn}\sin\frac{m}{\sqrt{A}}\phi\right)(\sin\theta)^{\frac{A-3}{2}+\alpha}P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta), \qquad (22)$$

где первый сомножитель (22) представляет решение уравнения Эйлера, в котором:

$$\chi_{1,2} = \frac{A}{2} - 2 \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}-2\right)^2 + \lambda}, \qquad (23)$$

C_1 , C_2 – константы, которые могут быть определены из граничных условий и условий сопряжения.

$$\lambda = (2\alpha+1)(n+0,5) + n^2 - m^2 + 5A/2 - 4, \qquad (24)$$

$$\alpha = \sqrt{(\mathrm{A}+1)^2 - 4m^2}/2. \qquad (25)$$

Второй сомножитель представляет решение уравнения Фурье, в котором a_{mn}, b_{mn} – коэффициенты Фурье, определяемые:

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \tfrac{1}{N_{mn}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho_1(\theta,\phi)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos m\phi\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\phi, \\ b_{mn} &= \tfrac{1}{N_{mn}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho_1(\theta,\phi)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\sin m\phi\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\phi, \\ N_{mn} &= \tfrac{2\pi\varepsilon_m(n+m)!}{(2n+1)(n-m)}, \varepsilon_m = 2(m=0), 1(m>0), \end{aligned} \qquad (26)$$

где $P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta)$ – полином Якоби.

Подставляя (22) в (20) и принимая во внимание (16), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области:

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_\rho = \sigma'_\theta = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2})(b_{mn}\cos\frac{m\phi}{\sqrt{\mathrm{A}}} - a_{mn}\sin\frac{m\phi}{\sqrt{\mathrm{A}}})\cdot \\
&\cdot m(\sin\theta)^{\frac{A-3}{2}+\alpha} P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta), \\
&\sigma' = A\sigma'_\rho, \\
&\tau'_{\rho\phi} = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1\rho^{\chi_1}(\chi_1 + 1 - A) + C_2\rho^{\chi_2}(\chi_2 + 1 - A))\cdot \\
&\cdot(a_{mn}\cos\frac{m\phi}{\sqrt{\mathrm{A}}} + b_{mn}\sin\frac{m\phi}{\sqrt{\mathrm{A}}})(\sin\theta)^{\frac{A-1}{2}+\alpha} \times P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta), \\
&\tau'_{\theta\phi} = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2})(a_{mn}\cos\frac{m\phi}{\sqrt{\mathrm{A}}} + b_{mn}\sin\frac{m\phi}{\sqrt{\mathrm{A}}})(\sin\theta)^{\frac{A-1}{2}+\alpha}\cdot \\
&\cdot(\mathrm{ctg}\theta\left(\alpha - \frac{A+1}{2}\right) P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta) + \frac{\partial P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta)}{\partial\theta}), \\
&\tau'_{\rho\theta} = 0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М. : ГИТТЛ, 1954.

[2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М. : Наука, 1978. 208 с.

[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 231 с.

[4] Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н. К вопросу определения возмущенного состояния идельнопластического сжимаемого массива, ослабленного сферической полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 117–121.

A. N. Maksimov

ON THE DEFINITION OF THE DISTURBED STATE ARRAY UNDER THE CONDITION OF FULL PLASTICITY

Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Abstract. With the method of small parameter we solve the problem of determining the analytical zero and first approximation of the stress in the elastic and plastic regions with the full plasticity of compressed space, attenuated byoral.

Keywords: stress, strain, flexibility, elasticity.

REFERENCES

[1] Sokolovskij V. V. Statika sypuchej sredy. M. : GITTL, 1954. (in Russian).

[2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M. : Nauka, 1978. 208 s. (in Russian).

[3] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M. : Nauka, 1966. 231 s. (in Russian).

[4] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. K voprosu opredelenija vozmushhennogo sostojanija idel'noplasticheskogo szhimaemogo massiva, oslablennogo sfericheskoj polost'ju // Vestnik ChGPU im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2016. № 3 (29). S. 117–121. (in Russian).

Maksimov Alexey Nikolaevich, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.