

A. B. Ковалев, Е. Ю. Русина, А. Ю. Яковлев

## О МЕХАНИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕМЕНТОВ ТОНКОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

**Аннотация.** В работе методом малого параметра определено напряженно-деформированное состояние тонкой упругопластической пластины, содержащей включение формы близкой к многоугольной. Решение строилось в рамках плосконапряженного состояния по теории идеальной пластичности с условием пластичности Треска – Сен-Венана.

**Ключевые слова:** малый параметр, пластичность, упругость, плосконапряженное состояние, условие пластичности Треска – Сен-Венана.

УДК: 539.3

Вопросу построения математических моделей механического поведения материалов за пределом упругости посвящено большое количество статей и монографий [1], [2], [5], [9], [12]. При этом число работ, посвященных математическому моделированию напряженно-деформированного состояния в составных упругопластических конструкциях под действием внешних нагрузок, существенно меньше [4], [6], [7], [10], [13].

В настоящей работе предпринята попытка развить уже известные подходы математического моделирования механического поведения толстых плит, содержащих включения различных конфигураций, на конструкциях представляющих собой тонкие пластины со включениями. Основной отличительной особенностью данного подхода является то, что при построении системы уравнений используется условие перехода в пластическое состояние материала – условие пластичности Треска – Сен-Венана – для случая плоского напряженного состояния. Для решения задачи был использован метод возмущений. В этом случае решение представляется в виде (1)

---

© Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю., 2017  
Ковалев Алексей Викторович  
e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.  
Русина Елена Юрьевна  
e-mail: elena\_rs@inbox.ru, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.  
Яковлев Александр Юрьевич  
e-mail: yakovlev@amm.vsu.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 15.01.2017

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \sigma_\rho^{(0)} + \delta\sigma_\rho^{(1)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^{(0)} + \delta\sigma_\theta^{(1)}, \quad \tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^{(0)} + \delta\tau_{\rho\theta}^{(1)}, \\ \sigma_z &= 0, \quad u_\rho = u_\rho^{(0)} + \delta u_\rho^{(1)}, \\ u_\theta &= u_\theta^{(0)} + \delta u_\theta^{(1)}, \quad r_s = 1 + \delta r_s^{(1)},\end{aligned}\tag{1}$$

где верхний индекс указывает на номер приближения,  $\delta$  – малый параметр,  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\rho\theta}, u_\rho, u_\theta$  – компоненты тензора напряжений и перемещений,  $r_s$  – радиус упругопластической границы в пластине.

Построенная система уравнений позволяет получить поля напряжений и деформаций в тонкой пластине с отверстием, имеющим форму близкую к многоугольной, в которую с натягом запрессовывается несколько большее по размеру полое включение, близкое к многоугольному.

Рассмотрим случай, когда на бесконечности пластина растягивается взаимно перпендикулярными усилиями  $P_1$  и  $P_2$ , по контуру внутреннего отверстия во включении приложено давление  $P_0$ . Предположим, что под влиянием внешних нагрузок включение находится в упругом состоянии, а в пластине возникает пластическое деформирование материала. При этом пластическая зона полностью охватывает контур отверстия в пластине.

Внутренний и внешний контур включения имеют форму правильного многоугольника со «сглаженными» углами, при этом количество углов во внешней границе включения обозначено через  $m$ , а во внутренней –  $n$ . При  $m = 2$  имеем эллиптическую форму отверстия в пластине и во внешней границе включения, при  $n = 2$  – эллиптический внутренний контур включения. Задача решается в цилиндрических координатах  $(\rho, \theta, z)$ , при этом ось  $0z$  направлена перпендикулярно плоскости пластины. Начало координат выбираем в центре отверстия.

За нулевое приближение выберем осесимметричное состояние тонкой пластины радиуса  $\alpha$  с тонким упругим включением с внешним радиусом  $\alpha_1$  и внутренним  $\beta$ . Считаем, что на бесконечности данная конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями  $P = (P_1 + P_2)/4k$ . Внутренний контур включения нагружен усилиями интенсивностью  $P_0$ .

Согласно методу возмущений введен малый параметр. В данном случае характеризующий отклонение контура отверстия от окружности, а также возмущение статических граничных условий  $\delta d_3 = (P_1 - P_2)/4k$ .

Решение задачи получено в безразмерных переменных. Величины, имеющие разность напряжений, отнесены к  $2k$  – удвоенной величине предела текучести на сдвиг материала пластины. Перемещения отнесем к радиусу упругопластической границы в пластине  $r_{s0}$ . Для обозначения безразмерных величин используем прежние обозначения.

Следуя [3], для нулевого приближения имеем в упругой области пластины

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{e(0)} &= P - \frac{(q+1)\alpha}{2\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{e(0)} = P + \frac{(q+1)\alpha}{2\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{e(0)} = 0, \\ u_\rho^{e(0)} &= \frac{1}{E_1} \left[ (2 - (q+1)\alpha)\rho + \frac{3(q+1)\alpha}{\rho} \right], \quad u_\theta^{e(0)} = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

В пластической зоне пластины

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{p(0)} &= 1 - \frac{(q+1)\alpha}{\rho}, \quad \sigma_{\theta}^{p(0)} = 1, \quad \tau_{\rho\theta}^{p(0)} = 0, \\ u_{\rho}^{p(0)} &= \frac{1}{2E_1} (\rho + (q+1)\alpha(1 - 2\ln\rho)), \quad u_{\theta}^{p(0)} = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

где  $E_1$  – модуль Юнга материала пластины,  $q = q/k$  – нормальное давление на границе контакта пластины и включения.

В упругом включении, в нулевом приближении, распределение поля напряжений и перемещений имеет вид [12]

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho B}^{e(0)} &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha_1^2} \left[ (q - P_0) \beta^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) - q (\beta^2 - \alpha_1^2) \right], \\ \sigma_{\theta B}^{e(0)} &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha_1^2} \left[ (q - P_0) \beta^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) - q (\beta^2 - \alpha_1^2) \right], \\ u_{\rho B}^{e(0)} &= \frac{(q - P_0) \alpha_1^2 \beta^2}{(\beta^2 - \alpha_1^2) E_2 \rho}, \quad u_{\theta B}^{e(0)} = 0,\end{aligned}\tag{4}$$

где  $E_2$  – модуль Юнга материала включения.

Из условий совместности деформаций пластины и включения вдоль линии контакта следует

$$u_{\rho=\alpha}^{p(0)} = u_{\rho B=\alpha_1}^{e(0)} + \varepsilon, \tag{5}$$

где  $\varepsilon = \frac{\alpha_1 - \alpha}{r_{s0}}$  и из условий сопряжения на упругопластической границе в пластине

$$\sigma_{\theta}^{p(0)} = \sigma_{\theta}^{e(0)}, \text{ при } \rho = 1 \tag{6}$$

имеем следующую систему уравнений для определения контактного давления  $q$  и радиуса упругопластической границы в пластине в нулевом приближении  $r_{s0}$ :

$$\begin{aligned}r_{s0} \left( 1 + 2 \ln \alpha + \frac{2\alpha_1 \beta^2 E_1}{\alpha (\beta^2 - \alpha_1^2) E_2} \right) - 2r_{s0} \ln r_{s0} - \frac{(1 + P_0) \alpha_1 \beta^2 E_1}{(\beta^2 - \alpha_1^2) E_2 (1 - P)} + \\ + \frac{E_1 (\alpha_1 - \alpha)}{(1 - P)} - \frac{\alpha}{2(1 - P)} = 0, \\ q = \frac{2(1 - P)}{\alpha} - 1.\end{aligned}\tag{7}$$

Для решения задачи в первом приближении в плоскости, перпендикулярной оси  $0z$ , согласно [10], [12] запишем уравнение контура, ограничивающего отверстие в пластине до деформации

$$\rho = \alpha(1 + \delta d_1 \cos m\theta - \dots), \tag{8}$$

уравнение контура, ограничивающего включение до деформации,

$$\rho = \alpha_1(1 + \delta d_1 \cos m\theta - \dots), \tag{9}$$

и уравнение контура, ограничивающего внутреннее отверстие во включении до деформации,

$$\rho = \beta(1 + \delta d_2 \cos n\theta - \dots), \tag{10}$$

где  $\alpha_1 > \alpha$ ;  $\alpha, \alpha_1, \beta$  – радиусы в нулевом приближении соответственно: отверстия в пластине, внешнего очертания включения, внутреннего отверстия во включении,  $\delta$  – малый параметр,  $d_1, d_2, d_3$  – безразмерные константы,  $m$  и  $n$  – количество «сглаженных» углов в соответствующих контурах.

Ввиду малости величины  $\varepsilon$ , примем за линию контакта пластины и включения внешнюю границу включения [10], [12], которая при разложении представляется в форме

$$\rho_{kon} = R^{(0)} + \delta R^{(1)}, \quad (11)$$

где  $R^{(0)} = \alpha_1$ ,  $R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos 2\theta$ .

Выпишем линеаризованные граничные условия и условия сопряжения, необходимые для построения математической модели тонкой упругопластичной пластины со включением.

На бесконечности [10], [12]

$$\sigma_\rho^\infty = P - \delta d_3 \cos 2\theta, \tau_{\rho\theta}^\infty = \delta d_3 \sin 2\theta, \quad (12)$$

где  $P = \frac{P_1+P_2}{4k}$ ,  $\delta d_3 = \frac{P_1-P_2}{4k}$ , где  $d_3$  – безразмерная постоянная.

На внутреннем контуре отверстия в пластине согласно [3]

$$\begin{aligned} \left. \left( \sigma_\rho^{(1)} + \frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} \alpha d_2 \cos n\theta \right) \right|_{\rho=\beta} &= 0, \\ \left. \left( \tau_{\rho\theta}^{(1)} + 2 \left( \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_\rho^{(0)} \right) d_2 \sin n\theta \right) \right|_{\rho=\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Условия сопряжения на упругопластичной границе в пластине

$$\left. \left[ \sigma_{ij}^{(1)} + \frac{d\sigma_{ij}^{(0)}}{d\rho} r_s^{(1)} \right] \right|_{\rho=1} = 0, \quad (14)$$

где  $\sigma_{ij}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(1)}$  – компоненты тензора напряжений для нулевого и первого приближения соответственно.

Вдоль линии контакта пластины и включения, согласно [3], [11], запишем  
1) включение вложено с натягом в пластину

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{p(1)} + \frac{d\sigma_\rho^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} &= \sigma_{\rho B}^{e(1)} + \frac{d\sigma_{\rho B}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \\ \tau_{\rho\theta B}^{e(1)} - \left( \sigma_{\theta B}^{e(0)} - \sigma_{\rho B}^{e(0)} \right) \dot{s}_1 &= 0, \\ \tau_{\rho\theta}^{p(1)} - \left( \sigma_\theta^{p(0)} - \sigma_\rho^{p(0)} \right) \dot{s}_1 &= 0, \\ u_\rho^{p(1)} + \frac{du_\rho^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} &= u_{\rho B}^{e(1)} + \frac{du_{\rho B}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \text{ при } \rho = R^{(0)}; \end{aligned} \quad (15)$$

2) включение впаяно в пластину

$$\sigma_\rho^{p(1)} + \frac{d\sigma_\rho^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} = \sigma_{\rho B}^{e(1)} + \frac{d\sigma_{\rho B}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)},$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta B}^{e(1)} - (\sigma_{\theta B}^{e(0)} - \sigma_{\rho B}^{e(0)}) \dot{s}_1 &= \tau_{\rho\theta}^{p(1)} - (\sigma_{\theta}^{p(0)} - \sigma_{\rho}^{p(0)}) \dot{s}_1, \\ u_{\rho}^{p(1)} + \frac{du_{\rho}^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} &= u_{\rho B}^{e(1)} + \frac{du_{\rho B}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \\ u_{\theta}^{p(1)} + u_{\rho}^{p(0)} \dot{s}_1 &= u_{\theta B}^{e(1)} + u_{\theta B}^{e(0)} \dot{s}_1, \text{ при } \rho = \alpha_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos m\theta$ ,  $s_1 = R^{(1)}/R^{(0)} \Rightarrow \dot{s}_1 = -md_1 \sin m\theta$ .

Согласно [2], [3], при учете граничных условий (12) на бесконечности было получено первое приближение для напряжений и перемещений в упругой области пластины для  $\infty > \rho > 1$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{e(1)} &= A_1^e \cos 2\theta + B_1^e \cos n\theta + C_1^e \cos m\theta, \\ \sigma_{\theta}^{e(1)} &= A_2^e \cos 2\theta + B_2^e \cos n\theta + C_2^e \cos m\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{e(1)} &= A_3^e \sin 2\theta + B_3^e \sin n\theta + C_3^e \sin m\theta, \\ u_{\rho}^{e(1)} &= A_4^e \cos 2\theta + B_4^e \cos n\theta + C_4^e \cos m\theta, \\ u_{\theta}^{e(1)} &= A_5^e \sin 2\theta + B_5^e \sin n\theta + C_5^e \sin m\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь буквами  $A_i^e$ ,  $B_i^e$ ,  $C_i^e$  ( $i = 1,..,5$ ) обозначены величины, равные

$$\begin{aligned} A_1^e &= \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 + \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right) a_{21} + \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2}\right) a_{22}, \\ B_1^e|_{h=n} = C_1^e|_{h=m} &= \frac{1}{2} \left( \left(-\frac{h}{\rho^{h+2}} + \frac{h+2}{\rho^h}\right) a_{h1} + \left(\frac{h+2}{\rho^{h+2}} - \frac{h+2}{\rho^h}\right) a_{h2} \right), \\ A_2^e &= -\left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 + \frac{1}{\rho^4} a_{21} - \frac{2}{\rho^4} a_{22}, \\ B_2^e|_{h=n} = C_2^e|_{h=n} &= \frac{1}{2} \left( \left(\frac{h}{\rho^{h+2}} - \frac{h-2}{\rho^h}\right) a_{h1} + \left(-\frac{h+2}{\rho^{h+2}} + \frac{h-2}{\rho^h}\right) a_{h2} \right), \\ A_3^e &= \left(-1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 + \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2}\right) a_{21} + \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2}\right) a_{22}, \\ B_3^e|_{h=n} = C_3^e|_{h=n} &= \frac{1}{2} \left( \left(-\frac{h}{\rho^{h+2}} + \frac{h}{\rho^h}\right) a_{h1} + \left(-\frac{h+2}{\rho^{h+2}} - \frac{h}{\rho^h}\right) a_{h2} \right), \\ A_4^e &= \frac{1}{E_1} \left( \left(\frac{3}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{4}{\rho}\right) d_3 + \left(\frac{1}{2\rho^3} - \frac{2}{\rho}\right) a_{21} + \left(-\frac{1}{\rho^3} + \frac{2}{\rho}\right) a_{22} \right), \\ B_4^e|_{h=n} = C_4^e|_{h=n} &= \frac{1}{E_1} \left( \left(\frac{3h}{4(h+1)} \frac{1}{\rho^{h+1}} - \frac{3h+2}{4(h-1)} \frac{1}{\rho^{h-1}}\right) a_{h1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{3(h+2)}{4(h+1)} \frac{1}{\rho^{h+1}} + \frac{3h+2}{4(h-1)} \frac{1}{\rho^{h-1}}\right) a_{h2} \right), \\ A_5^e &= \frac{1}{E_1} \left( \left(-\frac{3}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{1}{\rho}\right) d_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}\right) a_{21} + \left(-\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{2\rho}\right) a_{22} \right), \\ B_5^e|_{h=n} = C_5^e|_{h=n} &= \frac{1}{E_1} \left( \left(\frac{3h}{4(h+1)} \frac{1}{\rho^{h+1}} - \frac{3h-8}{4(h-1)} \frac{1}{\rho^{h-1}}\right) a_{h1} + \right. \\ &\quad \left. \left(-\frac{3(h+2)}{4(h+1)} \frac{1}{\rho^{h+1}} + \frac{3h-8}{4(h-1)} \frac{1}{\rho^{h-1}}\right) a_{h2} \right), \end{aligned}$$

где  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{h1}$ ,  $a_{h2}$  – константы, определяемые из условий сопряжения (16) на границе контакта пластины и включения соответственно.

В пластической области пластины напряжения и перемещения для первого приближения, согласно [1], [3], [12], показаны ниже

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{p(1)} &= A_1^p \cos 2\theta + B_1^p \cos n\theta + C_1^p \cos m\theta, \\ \sigma_\theta^{p(1)} &= 0, \\ \tau_{\rho\theta}^{p(1)} &= A_2^p \sin 2\theta - B_2^p \sin n\theta - C_2^p \sin m\theta, \\ u_\rho^{p(1)} &= A_3^p \cos 2\theta + B_3^p \cos n\theta + C_3^p \cos m\theta, \\ u_\theta^{p(1)} &= A_4^p \sin 2\theta + B_4^p \sin n\theta + C_4^p \sin m\theta,\end{aligned}\quad (18)$$

где буквами  $A_i^p$ ,  $B_i^p$ ,  $C_i^p$  ( $i = 1,..,4$ ) обозначены величины

$$\begin{aligned}A_1^p &= \frac{a_{21} - 2a_{22}}{\rho} + \frac{2a_{22}}{\rho^2}, \\ B_1^p|_{h=n} &= C_1^p|_{h=n} = \frac{a_{h1} + ha_{h2}}{\rho} - \frac{ha_{h2}}{\rho^2}, \\ A_2^p &= \frac{2a_{22}}{\rho^2}, \\ B_2^p|_{h=n} &= C_2^p|_{h=n} = \frac{ha_{h2}}{\rho^2}, \\ A_3^p &= \frac{a_{21} - 2a_{22}}{E_1} \ln \rho + \frac{a_{21} - 2a_{22}}{E_1} - \frac{2a_{22}}{\rho E_1} + 4d_3\alpha - a_{21} \left( \frac{3}{2}\alpha + 1 \right) + a_{22}(\alpha + 4), \\ B_3^p|_{h=n} &= C_3^p|_{h=n} = \frac{a_{h1} + ha_{h2}}{E_1} \ln \rho + \frac{a_{h1} + ha_{h2}}{E_1} + \frac{ha_{h2}}{\rho E_1} - a_{h1} \left( \frac{4h+1}{2(h^2-1)}\alpha + 1 \right) + \\ &\quad + a_{h2} \left( \frac{3h^2+4h-2}{2(h^2-1)}\alpha - 2h \right), \\ A_4^p &= \frac{2a_{22}}{E_1} \ln \rho + \frac{5a_{22}}{2E_1} - 2 \left( 4d_3\alpha - a_{21} \left( \frac{3}{2}\alpha + 1 \right) + a_{22}(\alpha + 4) \right) + \\ &\quad + \rho \left( 6d_3\alpha - 2a_{21}(\alpha + 1) + a_{22} \left( \frac{1}{2}\alpha + 7 \right) \right), \\ B_4^p|_{h=n} &= C_4^p|_{h=n} = \frac{a_{h2}}{E_1} \ln \rho - \frac{a_{h2}}{E_1} + 2a_{h1} \left( \frac{4h+1}{2(h^2-1)}\alpha + 1 \right) - a_{h2} \left( \frac{3h^2+4h-2}{(h^2-1)}\alpha - h \right) + \\ &\quad + \rho \left( -a_{h1} \left( \frac{3h+3}{2(h^2-1)}\alpha + 1 \right) + a_{h2} \left( \frac{3h^2-3h-9}{2(h^2-1)}\alpha - 3h \right) \right).\end{aligned}$$

Для упругого включения получены напряжения и перемещения, имеющие вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho B}^{e(1)} &= A_1 \cos 2\theta + B_1 \cos n\theta + C_1 \cos m\theta, \\ \sigma_{\theta B}^{e(1)} &= A_2 \cos 2\theta + B_2 \cos n\theta + C_2 \cos m\theta, \\ \tau_{\rho\theta B}^{e(1)} &= A_3 \sin 2\theta + B_3 \sin n\theta + C_3 \sin m\theta,\end{aligned}\quad (19)$$

где  $b_{21}, b_{22}, b_{h1}, b_{h2}$  – константы, определяемые из соотношений на границе контакта пластины и включения, а величина  $A = \frac{(q - P_0) \alpha_1^2}{\beta^2 - \alpha_1^2} d_2$ . Здесь буквами  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) обозначены величины, равные

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{N} (f_{11}(\rho) b_{21} + f_{12}(\rho) b_{22}), \\
 A_2 &= \frac{1}{N} (f_{21}(\rho) b_{21} + f_{22}(\rho) b_{22}), \\
 A_3 &= \frac{1}{N} (f_{31}(\rho) b_{21} + f_{32}(\rho) b_{22}), \\
 B_1|_{h=n} &= C_1|_{h=n} = \frac{1}{2N} \left[ f_{h11}(\rho) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A) 2N}{(h + h^3)} + \right. \\
 &\quad \left. + f_{h12}(\rho) \frac{(2N + \beta^{-2} (h^2 - h^3)) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A)}{(h + h^3)} + A}{(\frac{h}{N} - 1)} + f_{h13}(\rho) b_{h1} + f_{h14}(\rho) b_{h2} \right], \\
 B_2|_{h=n} &= C_2|_{h=n} = \frac{1}{2N} \left[ f_{h21}(\rho) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A) 2N}{(h + h^3)} + \right. \\
 &\quad \left. + f_{h22}(\rho) \frac{(2N + \beta^{-2} (h^2 - h^3)) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A)}{(h + h^3)} + A}{(\frac{h}{N} - 1)} + f_{h23}(\rho) b_{h1} + f_{h24}(\rho) b_{h2} \right], \\
 B_3|_{h=n} &= C_3|_{h=n} = \frac{1}{2N} \left[ f_{h31}(\rho) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A) 2N}{(h + h^3)} + \right. \\
 &\quad \left. + f_{h32}(\rho) \frac{(2N + \beta^{-2} (h^2 - h^3)) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A)}{(h + h^3)} + A}{(\frac{h}{N} - 1)} + f_{h33}(\rho) b_{h1} + f_{h34}(\rho) b_{h2} \right], \\
 f_{11}(\rho) &= 1 - 2\beta^2 + \beta^{-4} + (3 - 2\beta^2 - \beta^4) \rho^{-4} + 2(1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \rho^{-2}, \\
 f_{12}(\rho) &= -2 + 2\beta^2 + (2\beta^4 - 2\beta^2) \rho^{-4} + (2 - 2\beta^4) \rho^{-2}, \\
 f_{h11}(\rho) &= h \left( (h-1) - \frac{h^2}{\beta^2} + \beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + h \left( (h+1) - \frac{h}{\beta^2} - \beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
 &\quad + (h-2) \left( (h+1) - h\beta^2 - \beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^h + (h+2) \left( (h-1) - h\beta^2 - \beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
 f_{h12}(\rho) &= h \left( (h-1) - h\beta^2 + \beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + h \left( (h-1) - h\beta^2 - \beta^{2h} \right) \rho^{-(h+2)} + \\
 &\quad + (h-2) \left( (h+1) - h\beta^{-2} - \beta^{-2h} \right) \rho^h + (h+2) \left( (h-1) - h\beta^{-2} + \beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
 f_{h13}(\rho) &= \left( -(h-1)(h+2) + h^2\beta^{-2} + (h-2)\beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + \\
 &\quad + \left( (h-2)(h+1) - h^2\beta^{-2} + (h+2)\beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
 &\quad + \left( -(h-2)(h+1) + (h^2-4)\beta^2 - (h-2)\beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^2 + \\
 &\quad + \left( (h-1)(h+2) - (h^2-4)\beta^2 - (h+2)\beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-h},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{h14}(\rho) &= \left( -(h-1)(h+2) + h^2\beta^2 + (h-2)\beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + \\
&\quad + \left( (h-2)(h+1) + (h+2)\beta^{2h} - h^2\beta^2 \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&\quad + \left( -(h-2)(h+1) + (h^2-4)\beta^{-2} - (h-2)\beta^{-2h} \right) \rho^h + \\
&\quad + \left( (h-1)(h+2) - (h^2-4)\beta^{-2} - (h+2)\beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
f_{21}(\rho) &= -1 + 2\beta^2 - \beta^{-4} + (-3 + 2\beta^2 + \beta^4) \rho^{-4} + 2(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \rho^2, \\
f_{22}(\rho) &= 2 - 2\beta^2 + (-2\beta^4 + 2\beta^2) \rho^{-4} + (6 - 8\beta^{-2} + 2\beta^{-4}) \rho^2, \\
f_{h21}(\rho) &= h \left( -(h-1) + h\beta^{-2} - \beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + h \left( -(h+1) + \frac{h}{\beta^2} + \beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&\quad + (h+2) \left( -(h+1) + h\beta^2 + \beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^h + (h-2) \left( -(h-1) + h\beta^2 - \beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h22}(\rho) &= h \left( -(h-1) + h\beta^2 - \beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + h \left( -(h-1) + h\beta^2 + \beta^{2h} \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&\quad + (h+2) \left( -(h+1) + h\beta^{-2} + \beta^{-2h} \right) \rho^h + (h-2) \left( -(h-1) + h\beta^{-2} - \beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
f_{h23}(\rho) &= \left( (h-1)(h+2) - h^2\beta^{-2} - (h-2)\beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + \\
&\quad + \left( -(h-2)(h+1) + h^2\beta^{-2} - (h+2)\beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&\quad + \left( (h+2)(h+1) - (h+2)^2\beta^2 + (h+2)\beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^2 + \\
&\quad + \left( -(h-2)(h-1) + (h-2)^2\beta^2 + (h-1)\beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h24}(\rho) &= \left( (h-1)(h+2) - h^2\beta^2 - (h-2)\beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + \\
&\quad + \left( -(h-2)(h+1) - (h+2)\beta^{2h} + h^2\beta^2 \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&\quad + \left( (h+2)(h+1) - (h+2)^2\beta^{-2} + (h+2)\beta^{-2h} \right) \rho^h + \\
&\quad + \left( -(h-1)(h+2) + (h-2)^2\beta^{-2} + (h-2)\beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
f_{31}(\rho) &= -1 + 2\beta^2 - \beta^{-4} + (3 - 2\beta^2 - \beta^4) \rho^{-4} + (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \rho^2 + (1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \rho^{-2}, \\
f_{32}(\rho) &= 2 - 2\beta^2 + (2\beta^4 - 2\beta^2) \rho^{-4} + (3 - 4\beta^{-2} + \beta^{-4}) \rho^2 + (1 - \beta^4) \rho^{-2}, \\
f_{h31}(\rho) &= h \left( -(h-1) + h\beta^{-2} - \beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + h \left( (h+1) - \frac{h}{\beta^2} - \beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&\quad + h \left( -(h+1) + h\beta^2 + \beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^h + h \left( (h-1) - h\beta^2 + \beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h32}(\rho) &= h \left( -(h-1) + h\beta^2 - \beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + h \left( (h+1) - h\beta^2 - \beta^{2h} \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&\quad + h \left( -(h+1) + h\beta^{-2} + \beta^{-2h} \right) \rho^h + h \left( (h-1) - h\beta^{-2} + \beta^{2h} \right) \rho^{-h},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{h33}(\rho) &= \left( (h-1)(h+2) - h^2\beta^{-2} - (h-2)\beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + \\
&+ \left( (h-2)(h+1) - h^2\beta^{-2} + (h+2)\beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&+ \left( h(h+1) - h(h+2)\beta^2 + h\beta^{2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^h + \left( h(h-1) - h(h-2)\beta^2 - h\beta^{-2h} \right) \left( \frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h34}(\rho) &= \left( (h-1)(h+2) - h^2\beta^2 - (h-2)\beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + \\
&+ \left( (h-2)(h+1) + (h+2)\beta^{2h} - h^2\beta^2 \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&+ \left( h(h+1) - h(h+2)\beta^{-2} + h\beta^{-2h} \right) \rho^h + \left( h(h-1) + h(h-2)\beta^{-2} - h\beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
N &= 2(h^2 - 1) - h^2(\beta^{-2} + \beta^2) + (\beta^{-2h} + \beta^{2h}).
\end{aligned}$$

Перемещения в упругом включении ввиду громоздкости не приводятся.

Из соотношения на границе контакта (16), в случае, когда включение впаяно в пластину, находятся неизвестные константы  $a_{21}, a_{22}, a_{h1}, a_{h2}, b_{21}, b_{22}, b_{h1}, b_{h2}$ .

Вид упругопластической границы для первого приближения  $r_s^{(1)}$  определяется линеаризованным условием [3, 10]

$$r_s^{(1)} = - \left[ \sigma_\theta^{(1)} \right] \left[ \frac{\partial \sigma_\theta^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \Big|_{\rho=1}. \quad (20)$$

С использованием (17) и (18) получен радиус упругопластической границы в пластине, который будет иметь вид (21)

$$r_s^{(1)} = A_r \cos 2\theta + B_r \cos n\theta + C_r \cos m\theta, \quad (21)$$

$$\text{где } A_r = -\frac{(4d_3 - a_{21} + 2a_{22})}{(q+1)\alpha}, \quad B_r|_{h=n} = C_r|_{h=n} = \frac{a_{h1} + 2a_{h2}}{(q+1)\alpha}.$$

Рассмотрим пример.

Пусть

$$\delta = 0.01, \alpha = 0.2, \alpha_1 = 0.201, \beta = 0.15, E_1 = 810, E_2 = 1100, k = 12/\sqrt{3}, \\ d_1 = 1.8, d_2 = 3.8, P_1 = 10.1, P_2 = 9.0, n = 6, m = 6.$$

На рисунке 1 кривая 1 отражает зависимость  $r_s$  от угла  $\theta$ , т. е. представляет собой форму упругопластической границы в пластине. Контуру 2 соответствует контуру отверстия в пластине. Кривая 3 отражает вид контура внутреннего отверстия во включении.

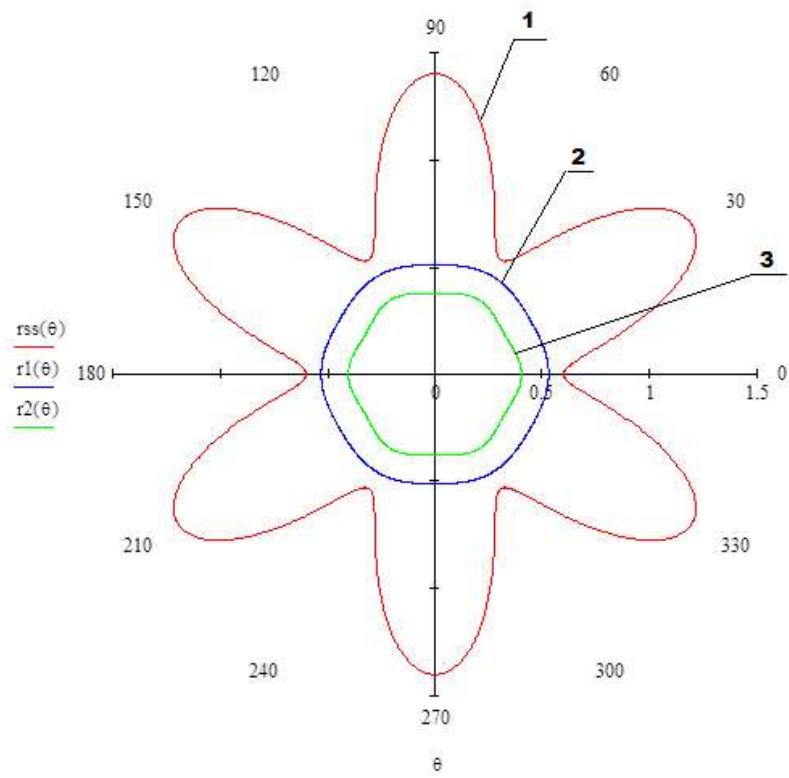


Рис. 1. Форма упругопластической границы

Условие на границе контакта для рисунка соответствует условию, когда включение впаяно в пластину (16).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Артемов М. А. О двуосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала // ПМТФ. 1985. № 6. С. 158–163.
- [2] Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика / К. Б. Бицено, Р. Граммель; пер. с нем. Я. И. Перельмана и Е. П. Попова; под ред. А. И. Лурье. Л.; М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит.; тип. "Печ. двор". 1950–1952.
- [3] Горностаев К. К., Ковалев А. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 2015. № 1. С. 135–140.
- [4] Задорожний В. Г., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 138–146.
- [5] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М. : Наука, 1978. 208 с.

- [6] Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 65–69.
- [7] Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю. Об исследовании механического взаимодействия элементов тонкой упругопластической конструкции // Механика предельного состояния и смежные вопросы: материалы Всероссийской научной школы-конференции, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. 2015. С. 107–114.
- [8] Kovalev A. V., Sporykhin A. N., Yakovlev A. Yu. Biaxial expansion of the elastoplastic space with prismatic inclusions // Прикладная механика. 2000. Т. 36. № 6. С. 114–120.
- [9] Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Яковлев А. Ю. Исследование механического взаимодействия элементов различных форм и свойств в системе спрессованных тел // Современные проблемы механики и прикладной математики сборник трудов международной школы-семинара. 2004. С. 280–281.
- [10] Ковалев А. В., Хвостов И. Г. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2014. № 2 (20). С. 29–35.
- [11] Марушкей Ю. М. Двугонное растяжение упругопластического пространства с включением // Машиностроение, 1975. № 12. С. 25–30.
- [12] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [13] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи упруго-вязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. 219 с.
- [14] Яковлев А. Ю. О влиянии формы внешнего контура включения на напряженно-деформированное состояние упругопластического пространства // Перспективы развития науки и образования сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. 2014. С. 160–162.

A. V. Kovalev, E. Y. Rusina, A. Y. Yakovlev

## ABOUT RESEARCH OF MECHANICAL INTERACTION ELEMENTS, IN THE THIN ELASTOPLASTIC DESIGNS

**Abstract.** In work as a method of small parametre tensely deformed condition of the thin is defined is elastoplastic plate that includes an inclusion of polygonal form. The decision was cost in frameworks plainly stresses a conditions under the theory of ideal plasticity with a condition of plasticity of Tresca-Saint-Venant.

*Kovalev Alexey Viktorovich*, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Rusina Elena Yuryevna*, Postgraduate student, Department of Mechanics and Computer Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Yakovlev Alexander Yuryevich*, Ph.D., Assoc. Professor, Head of Department of Mechanics and Computer Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

**Keywords:** small parametre, plasticity, elasticity, plainly stresses a conditions, condition of plasticity of Tresca-Saint-Venant.

## REFERENCES

- [1] Artemov M. A. O dvuosnom rastjazhenii tolstoij plastiny s krugovym otverstiem iz uprochnjajushhegosja uprugoplasticheskogo materiala // PMTF. 1985. № 6. S. 158–163.
- [2] Biceno K. B., Grammel' R. Tehnicheskaja dinamika / K. B. Biceno, R. Grammel'; per. s nem. Ja. I. Perel'mana i E. P. Popova; pod red. A. I. Lur'e. L.; M.: Gos. izd-vo tehn.-teoret. lit.; tip. "Pech. dvor". 1950–1952.
- [3] Gornostaev K. K., Kovalev A. V. Ob uprugoplasticheskem sostojanii tolstostennoj truby s uchetom temperatury dlja slozhnoj modeli sredy // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika, 2015. № 1. S. 135–140.
- [4] Zadorozhniy V. G., Kovalev A. V., Sporyhin A. N. Ob analitichnosti reshenija ploskoj uprugoplasticheskoy zadachi // Izvestija Rossiskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela. 2008. № 1. S. 138–146.
- [5] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s.
- [6] Kovalev A. V. Ob uchete associirovannoj szhimaemosti uprugoplasticheskikh tel v sluchae ploskoj deformacii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 1 (15). S. 65–69.
- [7] Kovalev A. V., Rusina E. Ju., Jakovlev A. Ju. Ob issledovanii mehanicheskogo vzaimodejstvija jelementov tonkoj uprugoplasticheskoy konstrukcii // Mehanika predel'nogo sostojanija i smezhnye voprosy: materialy Vserossijskoj nauchnoj shkoly-konferencii, posvjashchennoj 85-letiju professora D. D. Ivleva. 2015. S. 107–114.
- [8] Kovalev A. V., Sporykhin A. N., Yakovlev A. Yu. Biaxial expansion of the elastoplastic space with prismatic inclusions // Prikladnaja mehanika. 2000. T. 36. № 6. S. 114–120.
- [9] Kovalev A. V., Sporyhin A. N., Jakovlev A. Ju. Issledovanie mehanicheskogo vzaimodejstvija jelementov razlichnyh form i svojstv v sisteme spressovanyh tel // Sovremennye problemy mehaniki i prikladnoj matematiki sbornik trudov mezhdunarodnoj shkoly-seminara. 2004. S. 280–281.
- [10] Kovalev A. V., Hvostov I. G. Ob opredelenii naprjazhenij i peremeshchenij v uprugom prostranstve, oslablennom sfericheskoy polost'ju, s uchetom temperatury // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija, 2014. № 2 (20). S. 29–35.
- [11] Marushkej Ju. M. Dvusnoe rastjazhenie uprugoplasticheskogo prostranstva s vkljucheniem // Mashinostroenie, 1975. № 12. S. 25–30.
- [12] Mushelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 707 s.
- [13] Sporyhin A. N., Kovalev A. V., Shheglova Ju. D. Neodnomernye zadachi uprugovjazkoplastichnosti s neizvestnoj granicej. Voronezh: Izd-vo VGU, 2004. 219 s.
- [14] Jakovlev A. Ju. O vlijanii formy vneshnego kontura vkljuchenija na naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie uprugoplasticheskogo prostranstva // Perspektivy razvitiya nauki i obrazovaniya sbornik nauchnyh trudov po materialam Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. 2014. S. 160–162.