Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 15–21

М. А. Артемов, Е. С. Барановский

АНАЛИЗ И СОПОСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Проводится анализ и сопоставление следующих теорий пластического течения идеального пластического тела: Сен-Венана, Леви, Мизеса и Ишлинского. Основное внимание уделено рассмотрению гипотез, лежащих в основе построения определяющих уравнений для пластического тела. Выделяются гипотезы о пропорциональности и соосности тензоров. Рассматриваются проблемы, обусловленные гипотезами, заложенными в построение определяющих уравнений.

Ключевые слова: теория Сен-Венана, теория Леви, теория Мизеса, теория Ишлинского.

УДК: 539.214

Введение. Известно [1–8], что в основе классических теорий пластичности идеально пластических тел лежат предположения достаточно общего характера, учитывающие условия, заложенные в ранее созданные теории упругого и вязкого тела. Поскольку при создании ранних теорий пластичности проводилась параллель с теорией вязких жидкостей, то уже известные к тому времени подходы, например в теории упругого тела, были использованы в более поздних теориях. Последним толчком к развитию математической теории пластичности можно считать работу Треска, показавшего, что при развитом пластическом течении практически отсутствует взаимнооднозначное соответствие напряжений и деформаций.

Термины «теория Сен-Венана — Леви», «Леви -– Мизеса», «Сен-Венана -– Мизеса» сложились исторически и отражают тенденцию развития математической теории пластичности. Однако представляет интерес сопоставление разных теорий пластичности для понимания их различия и предположений, заложенных в их основу. Некоторое сопоставление теорий Сен-Венана, Леви дано в [17].

Артемов Михаил Анатольевич,
e-mail: artemov_m_a@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Барановский Евгений Сергеевич
e-mail: esbaranovskii@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.02.2017

Изотропное несжимаемое идеальнопластическое тело. Теория течения. Первая теория пластического течения идеального жесткопластического несжимаемого тела была опубликована Сен-Венаном в 1871 году для плоской задачи [9] при выборе условия текучести Треска.

Определяющее уравнение

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{zz}}{\dot{\varepsilon}_{xz}} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{\sigma_{xz}} \tag{1}$$

строилось на основе предположения о совпадении площадок максимального касательного напряжения и максимальной скорости сдвига. Следует учитывать, что из соотношения (1), вообще говоря, не следует неотрицательность диссипативной функции $D = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ [10].

Условие совпадения площадок максимальных касательных напряжений и соответствующих максимальных скоростей сдвига есть условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций. Как отмечается в [6], соотношение (1) для двумерного случая является следствием соотношений соосности тензоров, предложенных А. Ю. Ишлинским [11], [12].

Если подойти к соотношению (1) с позиций ассоциированного закона пластического течения, то они также будут следствием этого закона течения для всех условий пластичности, не зависящих от линейного инварианта тензора напряжений, кроме условия пластичности Треска. Однако в силу ассоциированного закона пластического течения в случае плоской деформации осевая компонента тензора напряжений (в обозначениях работы [9] это – компонента) в жесткопластическом теле остается неопределенной [12]. Несмотря на то, что в своей работе Сен-Венан рассматривает условие пластичности Треска, он полагал, что нормальное давление

$$p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}.$$

К условию пластичности вида выбранного Сен-Венаном

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2} = 2K \tag{2}$$

в случае плоской деформации приводятся все условия пластичности, не зависящие от линейного инварианта тензора напряжений.

Известно, что условие (2) также выполняется в случае плоского напряженного состояния для двух режимов условия пластичности Треска [4].

Резюмируя сказанное, можно говорить, что «в чистом виде» теория Сен-Венана для плоского деформированного состояния строится на условии соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций для любого условия пластичности, не зависящего от линейного инварианта тензора напряжений.

В определенном смысле обобщением теории Сен-Венана можно считать теорию А. Ю. Ишлинского [11], предложившего использовать только условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций для режима полной пластичности.

В отличие от теорий, использующих пластический потенциал, условие соосности тензоров не налагает ограничений на собственные значения тензоров напряжений и скоростей деформаций, поэтому соотношения соосности необходимо дополнять условием неотрицательности свертки $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma}$ [12].

Второй шаг в направлении развития теории течения идеального жесткопластического несжимаемого тела был сделан Леви [13], предположившим использовать определяющее соотношение в виде пропорции

$$\frac{\sigma_{xy}}{\dot{\varepsilon}_{xy}} = \frac{\sigma_{yz}}{\dot{\varepsilon}_{yz}} = \frac{\sigma_{zx}}{\dot{\varepsilon}_{zx}} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{zz}} = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon}_{xx}}, \tag{3}$$

а также условие пластичности Треска, записанное через основные инварианты девиатора напряжений. Соотношения (3) надо дополнять условием

$$D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0.$$

Пропорции (3) являются следствием пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций

$$Dev\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \psi\, Dev\, \boldsymbol{\sigma}, \quad \psi \geq 0, \quad tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0,$$

которая была выбрана в качестве определяющего уравнения в работе Мизеса [14]. Коэффициент ψ – искомая скалярная изотропная функция. Требование $\psi \geq 0$ обеспечивает неотрицательность диссипативной функции $D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, а из пропорций этого не следует. Теории Леви и Мизеса содержат одинаковое определяющее уравнение, но разные условия пластичности. О совпадении этих теорий можно говорить лишь в случае плоской деформации.

Формально определяющее соотношение Сен-Венана (1) следует из определяющего соотношения Леви (2), на основании чего теорию Леви иногда трактуют как обобщение теории Сен-Венана. Конечно, такая интерпретация была бы абсолютно точной, если предложение Леви о пропорциональности перенести в теорию Сен-Венана. Однако соотношения (1) являются следствием предположения о совпадении площадок максимального касательного напряжения и максимальной скорости сдвига, то есть учитывается лишь соосность тензоров, а не пропорциональность девиаторов напряжений и скоростей деформаций.

Если подойти к теории Леви с позиций пластического потенциала, который не совпадает с функцией пластичности (условие Треска в форме Леви), то в теории Леви определяющие соотношения можно представить в виде закона нормальной связи

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \psi \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \qquad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2} tr(Dev\, \boldsymbol{\sigma})^2.$$

С такой точки зрения теория Леви является примером того как пластический потенциал не совпадает с функцией пластичности. В качестве условия пластичности в теории Леви рассматривается условие пластичности Треска (о правильных формах записи условия пластичности Треска и Шмидта см. [15–17]).

Первый шаг в направлении использования закона нормальной связи был сделан в работе [18]. Мизес в качестве пластического потенциала рассматривает квадратичный инвариант девиатора напряжений, принимаемый в качестве функции пластичности

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\lambda \frac{\partial tr((Dev\, \boldsymbol{\sigma})^2)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

Введение пластического потенциала Φ – изотропной скалярной функции –

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \mathbf{h}, \qquad \mathbf{h} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

накладывает определенные ограничения на «свободу» скоростей пластических деформаций, поскольку из закона нормальной связи следует не только соосность тензоров, но и их пропорциональность.

Выводы. Теории Сен-Венана, Леви и Мизеса, основанные на разных предположениях, являются по сути различными.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 62–83.

[2] Freudental A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and plasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1958. P. 229–433. (Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.)

[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

[4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

[5] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

[6] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.

[7] Malvern L. E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1969. 713 p.

[8] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.

[9] Saint-Venant B. Mémoire sur l'etablissement des équation différenielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites ou l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état // J. d. Math. Pures Appl. Liouville. 1871. Ser. II. V. 16. P. 308–316. (Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности: сб. ст. М.: ИЛ, 1948. С. 11–19.)

[10] Артемов М. А. К теории пластичности анизотропных материалов // Проблемы механики: сб. статей. К 90-летию дня рождения А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 100–104.

[11] Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Уч. записки МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90–108.

[12] Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. Следствия нормального закона пластического течения // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2009. Т. 5, № 9. С. 145–147.

[13] Lévy M. Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état // J. Math. Pures Appl. 1871. Ser. II. Vol. 16. P. 369–372. (Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности: сб. ст. М. : ИЛ, 1948. С. 20–23.)

[14] Mises R. Mechanik des festen Korpers im plastischen deformablen Zustand // Gottinger Nachr. Math. Phys. 1913. Heft 4. S. 582–592. (Мизес Р. Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии / Теория пластичности: сб. ст. М.: ИЛ, 1948. С. 57–69.

[15] Reuss A. Vereintachte Berechnung der plastischen Formanderungsgeschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung // Ztschr. Angew. Math. und Mech. 1933. Band. 13. Heft 5. S. 356–360.

[16] Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. О соотношениях, вытекающих из условия пластичности Треска // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 3. С. 7–8.

[17] Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87.

[18] Mises R. Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen // Ztschr. Angew. Math. und Mech. 1928. Band 8. Heft 3. S. 161–185.

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii

ANALYSIS AND COMPARISON OF SOME THEORIES OF PLASTICITY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In present paper, analysis and comparison of such theories of plastic flow as Saint-Venant's theory, Levy's theory, Mises theory and Ishlinsky's theory are considered. The main attention is paid to the consideration of hypotheses, lying in the construction of the determining equations for a plastic body. The hypotheses about the proportionality of the tensors and the coaxiality of the tensors are allocated. Problems caused by hypotheses, which underlying the construction of the determining equations are consideried.

Keywords: Saint-Venant's theory, Levy's theory, Mises theory, Ishlinsky's theory.

REFERENCES

[1] Ishlinskii A. Y. Applied problems of mechanics. M.: Nauka, 1986. P. 62–83. (in Russian).

[2] Freudental A. M. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and plasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1958. P. 229–433.

[3] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).

[4] Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. M.: Nauka, 1973. 576 p. (in Russian).

[5] Sokolovskii V. V. Theory of plasticity. M.: Vishaya Shkola, 1969. 608 p. (in Russian).

[6] Ishlinskii A. Y., Ivlev D. D. The Mathematical Theory of Plasticity. M.: FIZMATLIT, 2001. 704 p. (in Russian).

[7] Malvern L. E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1969. 713 p.

[8] Prager W., Hodge P. G. Theory of Perfectly Plastic Solids. John Wiley & Sons, 1951.

[9] Saint-Venant B. Mémoire sur l'etablissement des équation différenielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites ou l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état // J. d. Math. Pures Appl. Liouville. 1871. Ser. II. Vol. 16. P. 308–316.

[10] Artemov M. A. To the Theory of Plasticity of Anisotropic Materials // Problems of Mechanics: to the 90th anniversary of A. Yu. Ishlinsky. M.: FIZMATLIT, 2003. P. 100–104. (in Russian).

[11] Ishlinskii A. Y. On the equations of deformation of bodies beyond the elastic limit // Scientific notes of the Moscow State University. Mechanics. 1946. Vol. 117. P. 90–108. (in Russian).

Artemov Mikhail Anatolievich
`e-mail:` artemov_m_a@mail.ru, Head of the Chair, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.
Baranovskii Evgeny Sergeevich
`e-mail:` esbaranovskii@gmail.com, Associate Professor, Cand. Sci. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

[12] Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. Normal plastic flow implications // Bulletin of Voronezh State Technical University. 2009. Vol. 5. № 9. P. 145–147. (in Russian).

[13] Lévy M. Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état // J. Math. Pures Appl. 1871. Ser. II. Vol. 16. P. 369–372.

[14] Mises R. Mechanik des festen Korpers im plastischen deformablen Zustand // Gottinger Nachr. Math. Phys. 1913. Heft 4. S. 582–592.

[15] Reuss A. Vereintachte Berechnung der plastischen Formanderungsgeschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung // Ztschr. Angew. Math. und Mech. 1933. Band. 13. Heft 5. S. 356–360.

[16] Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. About relations arising from Treska plasticity condition // Bulletin of Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7. № 3. P. 7–8. (in Russian).

[17] Artemov M. A., Baranovskii E. S. Mathematical Modeling of Plastic State of the Bodies in Case of Plane Strain // Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Serie: Mechanics. 2015. № 2 (24). P. 72–87. (in Russian).

[18] Mises R. Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen // Ztschr. Angew. Math. und Mech. 1928. Band 8. Heft 3. S. 161–185.