

И. И. Переяславская, М. А. Артемов, Е. С. Барановский

К ВОПРОСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЖИМАЕМОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Предложены алгоритмы нахождения напряжений и деформаций в сжимаемом идеально упругопластическом теле для осесимметричного плосконапряженного состояния при выборе кусочно-линейного условия пластичности общего вида. Определяющее уравнение выводится из ассоциированного закона пластического течения. В пространстве внешних воздействий найден образ многоугольника пластичности. Предложен алгоритм определения границ изменения значений внешних воздействий, позволяющий установить, какой режим пластичности в процессе нагружения будет выполняться в зарождающейся пластической зоне. Для построения алгоритма определения напряженного состояния найдена граница зарождения пластической зоны. Показано, что в пластической зоне могут выполняться разные режимы пластичности. Для вычисления напряжений в пластической зоне получено уравнение для границы перехода от одного режима пластичности к другому. Определены режимы пластичности и получены формулы, позволяющие выяснить, какие режимы пластичности будут выполняться в пластической зоне. Приведены расчеты и графики распределения напряжений для конкретных условий пластичности.

Ключевые слова: сжимаемое упругопластическое тело, теория пластического течения, закон нормальной связи, пространство внешних воздействий, плоское напряженное состояние.

УДК: 539.214

Введение. Вопросы теории пластического течения при выборе кусочно-линейных условий пластичности рассматривались в ряде статей и монографий (см., например [1–18]). Общим вопросам теории пластичности с сингулярной поверхностью текучести посвящены работы [19–26].

© Переяславская И. И., Артемов М. А., Барановский Е. С., 2017
Переяславская Ирина Игоревна
e-mail: irika5319@yandex.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Артемов Михаил Анатольевич
e-mail: artemov_m_a@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Барановский Евгений Сергеевич
e-mail: esbaranovskii@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.02.2017

В работах [27–33, 40] рассматривалось решение некоторых задач теории упругопластического тела при выборе кусочно-линейных условий пластичности. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности рассматривались в [1, 5, 10, 19, 34–39].

Интерес к выбору кусочно-линейных условий пластичности обусловлен получением аналитического решения некоторых задач, для которых при выборе гладких функций пластичности аналитическое решение не получено. Хорошо известно, что по сравнению с несжимаемым упругопластическим телом учет сжимаемости существенно усложняет решение даже простейших задач, в то время как при выборе кусочно-линейных условий пластичности учет пластической сжимаемости не привносит существенных сложностей при решении задач [5, 6].

Следует отметить, что кусочно-линейные условия пластичности, являясь частным случаем сингулярных условий пластичности, имеют ряд особенностей, которые вызывают критическое отношение к этим условиям [40, 41].

В настоящей работе рассматривается упругопластическое состояние осесимметричного кольцевого диска радиусов a и b , на торцевые стороны которого действуют давления p_a и p_b . Для записи необходимых соотношений используется цилиндрическая система координат (r, θ, z) , ось z которой совпадает с осью симметрии диска.

Плоское напряженное состояние. Кусочно-линейное условие пластичности для идеального пластического тела включает режимы, соответствующие сторонам и вершинам кривой пластичности в плоскости ненулевых главных нормальных напряжений [6].

Рассмотрим режим пластичности, соответствующий i -й стороне многоугольника пластичности

$$\begin{cases} f_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r - 2k = 0, \\ f_{i-1} = \alpha_{i-1} \sigma_\theta + \beta_{i-1} \sigma_r - 2k \leq 0, \\ f_{i+1} = \alpha_{i+1} \sigma_\theta + \beta_{i+1} \sigma_r - 2k \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Задача плоского напряженного состояния идеального упругопластического тела в пластической зоне статически определима

$$\begin{cases} r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \\ \sigma_\theta = \frac{2k - \beta_i \sigma_r}{\alpha_i}. \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы уравнений (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(i)} &= \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + C^{(i)} r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} - \frac{\beta_i}{\alpha_i} C^{(i)} r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае, когда $\alpha_i + \beta_i = 0$, решением системы (2) будет

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)} &= C^{(i)} + \frac{2k}{\alpha_i} \ln(r), \\ \sigma_\theta^{(i)} &= C^{(i)} + \frac{2k}{\alpha_i} (1 + \ln(r)).\end{aligned}\tag{4}$$

Формулы (4) следуют из (3), если выполнить предельный переход $\delta = \alpha_i + \beta_i \rightarrow 0$. При этом нужно учитывать, что величина $C^{(i)}$ зависит от параметра δ .

В зависимости от величины внешних воздействий в пластической зоне могут выполняться несколько режимов пластичности.

Один режим пластичности. Рассмотрим случай, когда в пластической зоне $a \leq r \leq c$ (c — радиус упругопластической границы) реализуется только один режим пластичности. Поскольку на границе $r = a$ имеет место $\sigma_r = -p_a$, то

$$C^{(i)} = - \left(\frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + p_a \right) a^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}},\tag{5}$$

если $\alpha_i + \beta_i \neq 0$.

Учитывая (5), формулы (3) примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)} &= \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} - \left(\frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + p_a \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \left(\frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + p_a \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}.\end{aligned}\tag{6}$$

Напряжения в упругой зоне $c \leq r \leq b$ и уравнение для определения радиуса упругопластической границы находим с учетом непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = c$:

$$\begin{aligned}\sigma_{r,\theta} &= \frac{c^2 p_c - b^2 p_b}{b^2 - c^2} \mp \frac{c^2 b^2 (p_c - p_b)}{(b^2 - c^2) r^2}, \quad p_c = -\sigma_r^{(i)}|_{r=c}, \\ \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \left(\frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + p_a \right) \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}} &= \frac{(c^2 + b^2)p_c - 2b^2 p_b}{b^2 - c^2}.\end{aligned}$$

Если $\alpha_i + \beta_i = 0$,

$$C^{(i)} = \frac{ma^2}{2} - p_a - \frac{2k}{\alpha_i} \ln(a),$$

а формулы (4) для компонент напряжений запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)} &= -p_a + \frac{2k}{\alpha_i} \ln \left(\frac{r}{a} \right), \\ \sigma_\theta^{(i)} &= -p_a + \frac{2k}{\alpha_i} \left(1 + \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right).\end{aligned}\tag{7}$$

Два режима пластичности. Рассмотрим случай, когда в области $a \leq r \leq r_i$ выполняется режим пластичности (корректной формой записи режимов пластичности является система (1))

$$f_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r - 2k = 0,$$

а в области $r_i \leq r \leq c$ выполняется режим

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1} \sigma_\theta + \beta_{i+1} \sigma_r - 2k = 0.$$

Для идеального пластического тела координаты вершин многоугольника пластичности известны. Они определяются из условия непрерывности компонент тензора напряжений на границе $r = r_i$

$$\sigma_\theta = \frac{2k(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{\beta_i \alpha_{i+1} - \alpha_i \beta_{i+1}}, \quad \sigma_r = \frac{2k(\beta_i - \beta_{i+1})}{\beta_i \alpha_{i+1} - \alpha_i \beta_{i+1}}. \quad (8)$$

В области $a \leq r \leq r_i$ напряженное состояние определяется по формулам (6). Переход к новому режиму пластичности происходит в точке, в которой напряжения (6) удовлетворяют уравнению

$$\alpha_{i+1} \sigma_\theta^{(i)} + \beta_{i+1} \sigma_r^{(i)} - 2k = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$r_i = \left(\frac{2k\alpha_i(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} - \alpha_i - \beta_i)}{C^{(i)}(\beta_i^2 \alpha_{i+1} + \alpha_i \beta_i(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) - \alpha_i^2 \beta_{i+1})} \right)^{-\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}}. \quad (9)$$

Если ввести обозначение $p_i = \sigma_r^{(i)}|_{r=r_i}$, то формулы для напряжений в области $r_i \leq r \leq c$ будут вполне аналогичны формулам для области $a \leq r \leq r_i$; нужно будет заменить индекс i на индекс $i+1$, давление p_a – на давление p_{-i} и величину радиуса внутренней границы $r = a$ – на радиус границы $r = r_i$.

Алгоритм решения задачи, когда в пластической зоне реализуется более двух режимов пластичности, аналогичен вышеизложенному алгоритму.

Поскольку для идеального пластического тела координаты вершин многоугольника пластичности (8) известны до определения напряжений, то формулу (9) можно получить из условия непрерывности любой комбинации компонент напряжений.

Алгоритмы определения напряженного и деформированного состояния кольцевого диска. В случае плоского напряженного состояния для идеального пластического тела границы допустимых значений давления p_a известны до решения задачи. Они определяются из рассмотрения многоугольника пластичности, или из (8). Учитывая значения давления на внутренней границе, можно выбрать один из возможных режимов пластичности в качестве режима, реализующегося в некоторой окрестности границы $r = a$. В этом случае имеются ограничения на допустимые значения внешнего давления (исследование проведено ниже). Если такой алгоритм не выбирать, то в алгоритм решения задачи нужно заложить все необходимые проверки, позволяющие ответить на следующие вопросы:

- При каких давлениях все кольцо будет находиться в упругом состоянии, т. е. ответить на вопрос: что есть процесс нагружения?
- Где в процессе нагружения зарождается пластическая зона?
- Каким ограничениям должны удовлетворять внешние воздействия, чтобы знать, какой из возможных режимов пластичности будет выполняться в момент зарождения пластической зоны?

- Сколько режимов будет выполняться в пластической зоне?

Эквивалентное напряжение. Для оценки величины напряженного состояния можно ввести эквивалентное напряжение – положительно определенную скалярную изотропную функцию напряжений. При рассмотрении вопроса о зарождении пластической зоны в процессе изменения внешних воздействий естественно приравнять эквивалентное напряжение функции пластичности. Увеличение значения эквивалентного напряжения будет характеризовать процесс нагружения в выбранной точке области упругого состояния диска. В пластической области таким образом определяемое эквивалентное напряжение не будет изменяться. Для определения процесса нагружения в пластической зоне можно ввести эквивалентную пластическую деформацию (эквивалент тензора пластических деформаций – скалярная положительно определенная изотропная функция).

О наибольшем значении эквивалентного напряжения для упругого состояния диска. Запишем кусочно-линейную функцию пластичности в виде, явно выделив ее зависимость от линейного инварианта тензора напряжений,

$$f_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z + \delta \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 0. \quad (10)$$

Для диска, находящегося в упругом состоянии, выражения для напряжений

$$\sigma_{\theta,r} = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \pm \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) r^2}, \quad \sigma_z = 0, \quad (11)$$

где p_a и p_b – давления на внутренней и внешней границе, подставляем в (10), так что

$$f_i = \frac{(\alpha_i + \beta_i + 2\delta)(a^2 p_a - b^2 p_b)}{b^2 - a^2} + a^2 b^2 \frac{(\alpha_i - \beta_i)(p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) r^2}. \quad (12)$$

Производная функции f_i :

$$\frac{df_i}{dr} = -\frac{2(\alpha_i - \beta_i)a^2 b^2 \Delta p}{(b^2 - a^2)r^3}, \quad \Delta p = p_a - p_b.$$

Знакопределенность производной указывает на то, что наибольшее и наименьшее значения функции f_i принимают на границах области.

Из (12) следует, что значения функции f_i на границах области $a \leq r \leq b$

$$\begin{aligned} f_i|_{r=a} &= \left(\beta_i - \frac{(a^2 + b^2)\alpha_i + 2a^2\delta}{b^2 - a^2} \right) p_a - \frac{2b^2(\alpha_i + \delta)p_b}{b^2 - a^2}, \\ f_i|_{r=b} &= \frac{2b^2(\alpha_i + \delta)p_a}{b^2 - a^2} - \left(\beta_i + \frac{(a^2 + b^2)\alpha_i + 2a^2\delta}{b^2 - a^2} \right) p_b. \end{aligned}$$

Разность

$$\Delta f = f_i|_{r=a} - f_i|_{r=b} = (\alpha_i - \beta_i)(p_a - p_b).$$

Анализ системы

$$\begin{cases} \Delta f = (\alpha_i - \beta_i)\Delta p, \\ \frac{df_i}{dr} = -\frac{2(\alpha_i - \beta_i)a^2 b^2 \Delta p}{(b^2 - a^2)r^3} \end{cases}$$

показывает, что наибольшее значение функция (10) принимает на внутренней границе $r = a$.

В случае, когда $\alpha_i = \beta_i$, например один из режимов пластичности для условия пластичности Шмидта (условие максимального приведенного напряжения), весь кольцевой диск переходит в предельное состояние. Алгоритм определения границ изменения давлений p_a, p_b , в пределах которых реализуется этот режим, рассмотрен ниже.

Геометрическая интерпретация эквивалентного напряжения в пространстве внешних воздействий. Задав конкретные значения коэффициентов α_i и β_i в условии пластичности

$$\begin{cases} f_i = \max_{i=1 \dots n} \{\alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z - 2k\} = 0, \\ \sigma_z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

в пространстве внешних воздействий (в рассматриваемом случае внешние воздействия – это давления, действующие на боковые стенки диска), можно получить образ кривой пластичности, поскольку для каждой точки зоны кольца, находящейся в упругом состоянии,

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta(p_a, p_b), \quad \sigma_r = \sigma_r(p_a, p_b).$$

В качестве примера рассмотрим два предельных условия пластичности максимального приведенного напряжения:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \max\{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3; \quad 2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z; \quad 2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta\} - 2k = 0, \\ f^{(2)} &= \max\{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z; \quad 2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z; \quad 2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta\} + 2k = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя формулы (11) для режимов (14), в пространстве внешних воздействий (p_a, p_b) выделяем область упругого состояния кольца (рис. 1).

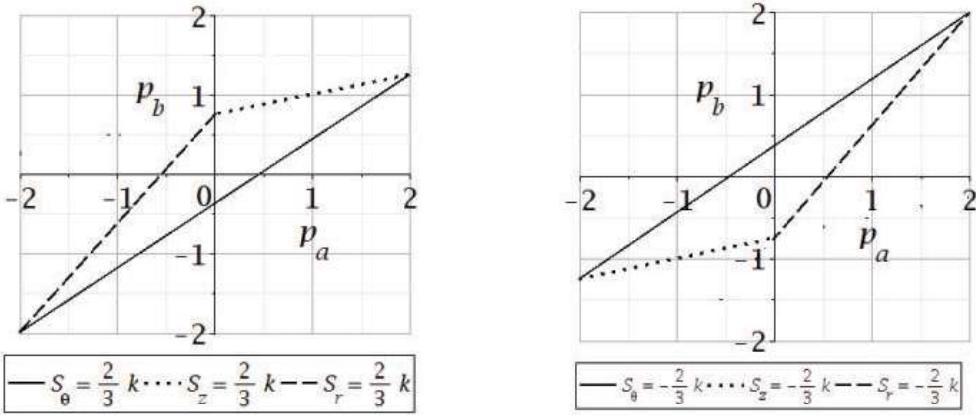


Рис. 1. а) $\max\{s_1; s_2; s_3\} = \frac{2}{3}k$, б) $\max\{s_1; s_2; s_3\} = -\frac{2}{3}k$,
 $a = 1; b = 2; k = 1; s_i$ — компоненты девиатора напряжений

Для внешних воздействий p_a, p_b , которым соответствуют точки, лежащие внутри треугольников, вся область кольца будет находиться в упругом состоянии. Точкам,

принадлежащим сторонам треугольников, соответствуют значения внешних воздействий, для которых на внутренней границе кольца, находящегося в упругом состоянии, будет выполняться определенный режим пластичности.

Уравнение

$$\sigma_{eq} = const$$

определяет множество гомотетичных треугольников, которые соответствуют определенным уровням напряженного состояния, оцениваемым эквивалентным напряжением σ_{eq} .

Условие зарождения указанного режима пластичности. Выберем любой режим пластичности (1) и найдем условия, при выполнении которых в процессе нагружения на границе $r = a$ зарождается этот режим пластичности. Для этого, используя формулы (11) для напряжений в зоне упругого состояния, получим выражения для компонент тензора напряжений на границе $r = a$:

$$\sigma_r|_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_\theta|_{r=a} = -pa + \frac{2b^2(p_a - p_b)}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_z = 0. \quad (15)$$

Подставляя выражения (15) для компонент тензора напряжений в первое условие (1), находим зависимость между внешним и внутренним давлением

$$p_b = \frac{\alpha_i(a^2 + b^2) - \beta_i(b^2 - a^2)}{2\alpha_i b^2} p_a - \frac{b^2 - a^2}{\alpha_i b^2} k. \quad (16)$$

При выполнении равенства (16) для кольца, находящегося в упругом состоянии, на границе $r = a$ будет выполняться первое условие (1).

Для режимов f_{i+1} , f_{i-1} , указанных в системе (1), получаем аналогичные соотношения:

$$p_b = \frac{(a^2 - b^2)(\beta_j p_a + 2k)}{2\alpha_j b^2} + \frac{(a^2 + b^2)p_a}{2b^2}, \quad j = i - 1, i + 1. \quad (17)$$

Приравнивая правые части равенств (16) и (17), находим границы допустимых значений для давления p_a , при изменении в которых на границе $r = a$ будет зарождаться только именно режим пластичности (1):

$$p_{a_min} \leq p_a \leq p_{a_max}, \quad (18)$$

где

$$p_{a_min} = \min\{p_a^{(i+1)}, p_a^{(i-1)}\}, \quad p_{a_max} = \max\{p_a^{(i+1)}, p_a^{(i-1)}\},$$

$$p_a^{(j)} = \frac{2k(\alpha_i - \alpha_j)}{\beta_i \alpha_j - \alpha_i \beta_j}, \quad j = i - 1, i + 1.$$

При выполнении условия (18) давление на внешней границе должно принимать значение, определяемое по формуле (17).

Если из (16) и (17) определить границы допустимых значений для давления p_b на внешней границе кольцевой области, то применяя алгоритм, аналогичный алгоритму получения формул (17), (18), находим

$$p_{b_min} \leq p_b \leq p_{b_max}, \quad (19)$$

$$p_{b_min} = \min\{p_b^{(i+1)}, p_b^{(i-1)}\}, \quad p_{b_max} = \max\{p_b^{(i+1)}, p_b^{(i-1)}\},$$

$$p_b^{(j)} = k \frac{(a^2 + b^2)(\alpha_i - \alpha_j) - (b^2 - a^2)(\beta_i - \beta_j)}{(\beta_i \alpha_j - \alpha_i \beta_j)b^2}, \quad j = i - 1, i + 1.$$

При выполнении условия (18) давление на внешней границе должно принимать значение, определяемое по формуле

$$p_a = 2 \frac{(b^2 - a^2)k + 2\alpha_i b^2 p_b}{\beta_i(b^2 - a^2) + \alpha_i(a^2 + b^2)}. \quad (20)$$

Условие пластичности максимального приведенного напряжения, когда предел пластичности при одноосном растяжении вдвое меньше предела пластичности при одноосном сжатии. Выберем одно из двух предельных условий для двуконстантного условия пластичности максимального приведенного напряжения вида

$$\max\{2\sigma_\theta - \sigma_r, 2\sigma_r - \sigma_\theta, -\sigma_\theta - \sigma_r\} = 2k. \quad (21)$$

В таблице 1 приведены наименьшее и наибольшее допустимые значения давления p_a и формулы вычисления значения давления p_b , определяемые по (17), (18), для условия (21).

Таблица 1

Режим $\alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r = 2k$	$\min p_a$	$\max p_a$	p_b
$\alpha_i = 2, \beta_i = -1$	$-2k$	$2k$	$\frac{3b^2 + a^2}{4b^2} p_a - \frac{b^2 - a^2}{2b^2} k$
$\alpha_i = -1, \beta_i = 2$	$-2k$	0	$\frac{3b^2 - a^2}{2b^2} p_a + \frac{b^2 - a^2}{b^2} k$
$\alpha_i = -1, \beta_i = -1$	0	$2k$	$\frac{a^2}{b^2} p_a + \frac{b^2 - a^2}{b^2} k$

В таблице 2 приведены наименьшее и наибольшее допустимые значения давления p_b и формулы вычисления значения давления p_a , определяемые по формулам (19), (20), для условия (21).

Таблица 2

Режим $\alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r = 2k$	$\min p_b$	$\max p_b$	p_a
$\alpha_i = 2, \beta_i = -1$	$-2k$	$\frac{b^2 + a^2}{b^2} k$	$\frac{4b^2 p_b + 2(b^2 - a^2)k}{3b^2 + a^2}$
$\alpha_i = -1, \beta_i = 2$	$-2k$	$\frac{b^2 - a^2}{b^2} k$	$2 \frac{b^2 p_b - (b^2 - a^2)k}{3b^2 - a^2}$
$\alpha_i = -1, \beta_i = -1$	$\frac{b^2 - a^2}{b^2} k$	$\frac{b^2 + a^2}{b^2} k$	$\frac{b^2}{a^2} p_b - \frac{b^2 - a^2}{a^2} k$

Напряжения в пластической зоне. Согласно данным, приведенным в таблице 1, если давление на внутренней границе изменяется в пределах

$$-2k \leq p_a \leq 2k,$$

а давление на внешней границе определяется по формуле

$$p_b = \frac{3b^2 + a^2}{4b^2}, \quad p_a = \frac{b^2 - a^2}{2b^2}k,$$

то на границе $r = a$ будет выполняться условие

$$2\sigma_\theta - \sigma_r = 2k. \quad (22)$$

При реализации этого режима переход к другим режимам пластичности в процессе нагружения не происходит. Согласно (6) напряженное состояние в пластической зоне:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2k - (2k + p_a)\sqrt{\frac{a}{r}}, \\ \sigma_\theta &= 2k - (k + \frac{1}{2}p_a)\sqrt{\frac{a}{r}}. \end{aligned}$$

В упругой зоне $c \leq r \leq b$:

$$\sigma_{r,\theta} = A \mp \frac{B}{r^2}, \quad A = \frac{2kc^2 - 3p_bb^2}{3b^2 + c^2}, \quad B = \frac{b^2c^2(2k + p_b)}{3b^2 + c^2}.$$

Радиус упругопластической границы определяется из уравнения (следует из условия непрерывности напряжений на упругопластической границе):

$$p_b - \frac{(2k + p_a)(3b^2 + c^2)}{4b^2}\sqrt{\frac{a}{c}} + 2k = 0. \quad (23)$$

Поскольку радиус упругопластической границы $a \leq c \leq b$, то из (23) следует, что для того чтобы часть кольца была пластической, значение давление на внешней границе должно попадать в интервал

$$\frac{(2k + p_a)(3b^2 + a^2)}{4b^2} - 2k \leq p_b \leq (2k + p_a)\sqrt{\frac{a}{b}} - 2k = 0.$$

На рисунке 2 а) изображены графики функций для трех режимов условия пластичности максимального приведенного напряжения (21). На рисунке 2 б) показано распределение напряжений для режима пластичности (22).

Рассмотрим случай, когда на границе $r = a$ реализуется режим

$$2\sigma_r - \sigma_\theta = 2k. \quad (24)$$

Согласно (6) распределение напряжений при выполнении (24) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2k - (2k + p_a)\frac{r}{a}, \\ \sigma_\theta &= 2k - 2(2k + p_a)\frac{r}{a}. \end{aligned}$$

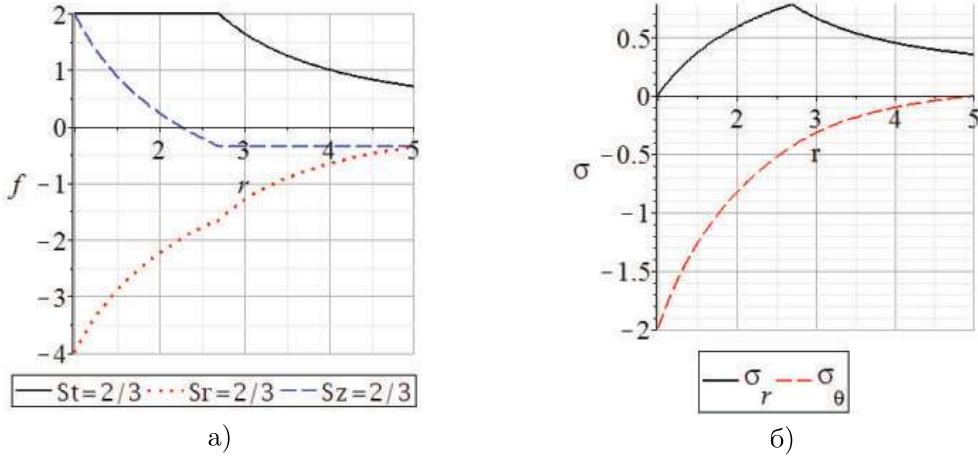


Рис. 2. а) графики функций режимов пластичности; б) распределение напряжений для параметров $a = 1$; $b = 5$; $k = 1$; $p_a = 2$; $p_b = 0$; $c = 2.7$

Проверка условия

$$\begin{cases} 2\sigma_r - \sigma_\theta = 2k, \\ 2\sigma_\theta - \sigma_r \leq 2k, \\ -\sigma_r - \sigma_\theta \leq 2k \end{cases}$$

показывает, что

$$r_1 = \frac{2ka}{2k + p_a}.$$

Если радиус упругопластической границы $r_1 < c$, то в области $r_1 \leq r \leq c$ будет выполняться режим пластичности

$$-\sigma_r - \sigma_\theta = 2k, \quad (25)$$

для которого напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{r,\theta} = -k \pm \frac{4a^2 k^3}{(2k + p_a)^2 r^2}.$$

В упругой зоне $c \leq r \leq b$:

$$\sigma_{r,\theta} = -k \pm \frac{4a^2 k^3}{(2k + p_a)^2 r^2}.$$

В случае, когда $r_1 < c$, значение радиуса упругопластической границы становится условным, поскольку во всей области $r_1 \leq r \leq b$ будет выполняться условие (25), т. е. кольцо переходит в предельное состояние (рис. 3а).

Если в результате нагружения на границе $r = a$ выходим на режим (25), то вся область кольца переходит в предельное состояние. Значения давлений p_a и p_b определяются по таблице 1.

Вычисление деформаций. Для условия пластичности (13) согласно ассоциированному закону пластического течения при рассмотрении плоского напряженного состояния компоненты тензора скоростей пластических деформаций определяются по

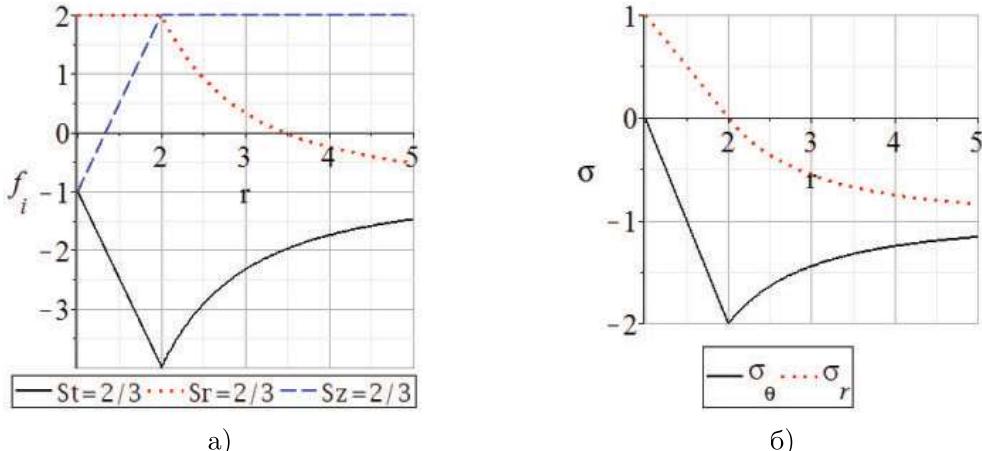


Рис. 3. а) графики функций режимов пластичности, б) распределение напряжений для параметров $a = 1$; $b = 5$; $k = 1$; $p_a = -1$; $p_b = 0.84$; $r_1 = 2$; $c = 4$

закону нормальной связи

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \lambda \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \Big|_{\sigma_z=0}, \quad \lambda \geq 0.$$

Принимая гипотезу естественного состояния и рассматривая процесс активного нагружения, интегрируя соотношения ассоциированного течения, приходим к пропорциям

$$\frac{\varepsilon_\theta^p}{\alpha_i} = \frac{\varepsilon_r^p}{\beta_i} = \frac{\varepsilon_z^p}{\gamma_i}. \quad (26)$$

Упругие деформации в упругой зоне определяются из соотношений закона Гука. Формулы связи упругих пластических и полных деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p,$$

следствия ассоциированного закона пластического течения (26) и соотношения закона Гука позволяют получить разные выражения для компонент тензора пластических деформаций. Окружную и радиальную компоненту тензора пластических деформаций, используя соотношения ассоциированного закона пластического течения, когда $\gamma_i \neq 0$, можно выразить через осевую компоненту тензора пластических деформаций

$$E\varepsilon_\theta^p = \frac{\alpha_i}{\gamma_i} E\varepsilon_z^p, \quad E\varepsilon_r^p = \frac{\beta_i}{\gamma_i} E\varepsilon_z^p, \quad (27)$$

а учитывая, что

$$E\varepsilon_z^p = E\varepsilon_z + \nu(\sigma_\theta + \sigma_r), \quad (28)$$

получаем формулы

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\theta^p &= E \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \varepsilon_z + \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \nu(\sigma_\theta + \sigma_r), \\ E\varepsilon_r^p &= E \frac{\beta_i}{\gamma_i} \varepsilon_z + \frac{\beta_i}{\gamma_i} \nu(\sigma_\theta + \sigma_r), \end{aligned} \quad (29)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Используя уравнение равновесия, соотношения (28), (29), условие совместности деформаций, можно получить, например уравнение для окружной компоненты тензора пластических деформаций

$$r \frac{dE\varepsilon_\theta^p}{dr} + \left(1 - \frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) E\varepsilon_\theta^p + r \frac{d(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)}{dr} + (1 + \nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0. \quad (30)$$

Если в условии пластичности (13) коэффициент $\gamma_i = 0$, то уравнение (30) получается, если вместо соотношений (27) рассматривать соотношение

$$\alpha_i\varepsilon_r^p = \beta_i\varepsilon_\theta^p.$$

В случае, когда в пластической зоне реализуется один режим пластичности, то в качестве граничного условия рассматриваем равенство нулю пластических деформаций на упругопластической границе $r = c$:

$$\varepsilon_\theta^p|_{r=c} = 0. \quad (31)$$

Когда в пластической зоне реализуется несколько режимов, то алгоритм определения ε_θ^p будет иным. Не умаляя общности, рассмотрим случай для двух режимов. Для области $r_i \leq r \leq c$ пластической зоны, где реализуется режим

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1}\sigma_\theta + \beta_{i+1}\sigma_r - 2k = 0,$$

решаем задачу (30), (31). Для области $a \leq r \leq r_i$, где реализуется режим

$$f_i = \alpha_i\sigma_\theta + \beta_i\sigma_r - 2k = 0,$$

решаем уравнение (30), но вместо условия (31) используем условие непрерывности компоненты ε_θ^p на границе $r = r_i$ перехода от одного режима пластичности к другому.

Остальные компоненты тензоров пластических и полных деформаций определяются по формулам (27)–(29).

Отдельно следует рассмотреть случаи, когда в условии пластичности (13) $\alpha_i = 0$ или $\beta_i = 0$.

Случай $\alpha_i = 0$. Согласно ассоциированному закону пластического течения, $\varepsilon_\theta^p = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\theta &= \frac{Eu}{r} = E\varepsilon_\theta^e = \sigma_\theta - \nu\sigma_r, & \varepsilon_r &= \frac{du}{dr}, \\ \varepsilon_r^p &= \varepsilon_r - \sigma_r + \nu\sigma_\theta, & \varepsilon_z^p &= \frac{\gamma_i}{\beta_i}\varepsilon_\theta^p, & E\varepsilon_z &= E\varepsilon_z^p - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r), \end{aligned}$$

где u — радиальная компонента вектора перемещений.

Случай $\beta_i = 0$. Согласно ассоциированному закону пластического течения, $\varepsilon_r^p = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} E\varepsilon_r &= \frac{dEu}{dr} = \sigma_r - \nu\sigma_\theta, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \varepsilon_\theta^p &= \varepsilon_\theta - \sigma_\theta + \nu\sigma_r, & \varepsilon_z^p &= \frac{\gamma_i}{\alpha_i}\varepsilon_\theta^p, & E\varepsilon_z &= E\varepsilon_z^p - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r). \end{aligned} \quad (32)$$

Границным условием при решении уравнения (32) является условие непрерывности радиальной компоненты вектора перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Теория пластичности: сб. статей. М.: ИЛ, 1948. 452 с.
- [2] Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1. М.: Наука, 1986. 407 с.
- [3] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматлит, 1962. 432 с.
- [4] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [5] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [6] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [7] Malvern L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall Inc, 1969. 713 р.
- [8] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [9] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнавака, 1998. 528 с.
- [10] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [11] Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 р.
- [12] Артемов М.А. Об одном предельном виде условия идеальной пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 2. С. 134–136.
- [13] Артемов М. А., Ивлев Д. Д. О статистических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. № 3. С. 104–111.
- [14] Артемов М. А., Ивлев Д. Д. О линеаризованных уравнениях кинематически определимых задач // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1995. № 6. С. 104–107.
- [15] Артемов М. А., Ивлев Д. Д. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочно-линейных условиях текучести // Доклады Академии наук. 1996. Т. 350. № 3. С. 332–333.
- [16] Артемов М. А., Пупыкин С. Н., Рыжков А. В. Вариант теории пластического течения анизотропных материалов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2002. № 1. С. 69–73.
- [17] Артемов М.А. К теории пластичности анизотропных материалов // Проблемы механики: сб. статей. К 90-летию дня рождения А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 100–104.
- [18] Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 81–90.
- [19] Аннин Б. Д. О теориях идеальной пластичности с сингулярной поверхностью текучести // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 181–188.
- [20] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: СГУ, 2004. 141 с.
- [21] Артемов М. А., Якубенко А. П. О соотношениях между компонентами тензора второй валентности в случае кратного собственного значения // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 8. С. 116–117.
- [22] Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. О соотношениях пространственного состояния пластических тел // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 5. С. 101–103.

- [23] Артемов М. А., Пупыкин Н. С., Якубенко А. П. Общие соотношения теории течения анизотропных пластических тел // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6, № 7. С. 56–63.
- [24] Артемов М. А., Потапов Н. С. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 3. С. 27–28.
- [25] Артемов М. А., Потапов Н. С. О соотношениях, вытекающих из условия полной plasticности // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6, № 9. С. 136–138.
- [26] Артемов М. А., Ларин И. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. К анализу упруго-пластической задачи плоской деформации // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 6. С. 135–137.
- [27] Артемов М. А., Ивлев Д. Д. Об идеальном состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Доклады Академии наук. 1997. Т. 353, № 1. С. 47–50.
- [28] Буренин А. А., Ковтаник Л. В. Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде // Проблемы механики неупругих деформаций. М.: Физматлит, 2001. С. 75–95.
- [29] Артемов М. А., Бестужева Н. П., Потапов Н. С. О выполнении условия полной plasticности при плоском деформированном состоянии // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6., № 7. С. 88–92.
- [30] Артемов М. А., Ларин И. А., Потапов Н. С. Распределение напряжений и деформаций в цилиндрической трубе при выборе кусочно-линейного условия plasticности // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6, № 9. С. 117–119.
- [31] Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 5. С. 126–128.
- [32] Артемов М. А., Якубенко А. П. К задаче Ламе // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции. Тамбов: Юком, 2014. С. 11–13.
- [33] Артемов М. А., Барановский Е. С., Потапов Н. С. Математическое моделирование упругопластического состояния цилиндрической области // Современные научные технологии. 2016. № 9. Ч. 2. С. 191–195.
- [34] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
- [35] Hershey A.V. The Plasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Face Centered Cubic Crystals // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1954. Vol. 21. P. 241–249.
- [36] Hosford W. F. A Generalize Isotropic Yield Criterion // J. Appl. Mech. 1972. Vol. 39, № 2. P. 607–609.
- [37] Karafillis A. P., Boyce M. C. A General Anisotropic Yield Criterion Using Bounds and a Transformation Weighting Tensor // J. Mech. Phys. Solid. 1993. Vol. 41. P. 1859–1886.
- [38] Артемов М. А., Барановский Е. С. Альтернативная форма записи условия plasticности // Успехи современного естествознания. 2014. № 12-3. С. 292.

- [39] Артемов М. А., Бараповский Е. С., Якубенко А. П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластиичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 71–82.
- [40] Gamber U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. 1986. № 61. Р. 1–14.
- [41] Артемов М. А., Бараповский Е. С. Математическое моделирование пластиического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87.

I. I. Pereyaslavskaya, M. A. Artemov, E. S. Baranovskii,

**ON THE PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELING OF THE
AXISYMMETRIC PLANE STRESS STATE OF A COMPRESSIBLE ELASTIC
PLASTIC BODY**

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In present paper algorithms for determining stresses and deformations in a compressible elastic perfectly plastic body for an axisymmetric plane stress state, when choosing a piecewise-linear plasticity condition of general form, are offered. The constitutive equation is derived from the associative law of plastic flow. In the space of external impacts the form of a polygon of plasticity is found. The algorithm for determining boundaries of changing values of external impacts, allowing to establish which regime of plasticity in the process of loading will be performed in the nascent plastic zone, is offered. Boundary of origin of plastic zone for construction of algorithm for determining the stress state is found. It is shown, that different plasticity regimes can be performed in the plastic zone. An equation for boundary of the transition from one plasticity regime to another, which is used for evaluating stresses in plastic zone, is obtained. Regimes of plasticity are determined, and formulas for evaluating, which plasticity regimes will be satisfied in the plastic zone, are obtained. Calculations and graphs of stress distribution for concrete plasticity conditions are given.

Keywords: compressible elastic-plastic body, theory of plastic flow, normal ratio law, space of external impacts, plane stress state

REFERENCES

- [1] Theory of Plasticity. Digest of Articles. M.: IL, 1948. (in Russian).
- [2] Ishlinskii A.Y. Applied Problems of Mechanics. M.: Nauka, 1986. (in Russian).
- [3] Freudenthal A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and Plasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1958.
- [4] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
- [5] Sokolovskii V. V. Theory of Plasticity. M.: Vishaya Shkola, 1969. (in Russian).
- [6] Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. M.: Nauka, 1973. (in Russian).
- [7] Malvern L.E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall Inc, 1969. 713 p.
- [8] Malinin N. N. Applied Theory of Plasticity and Creep. M.: Mashinostroenie, 1975. (in Russian).
- [9] Bykovcev G.I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. (in Russian).

Pereyaslavskaya Irina Igorevna

e-mail: irika5319@yandex.ru, Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Artemov Mikhail Anatolievich

e-mail: artemov_m_a@mail.ru, Head of the Chair, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Baranovskii Evgenii Sergeevich

e-mail: esbaranovskii@gmail.com, Associate Professor, Cand. Sci. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

- [10] Ishlinskii A.Y., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. M.: FIZMATLIT, 2001. (in Russian).
- [11] Chakrabarty J. Theory of Plasticity. TElsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.
- [12] Artemov M. A. On One Limiting Form of Condition of the Ideal Plasticity // Mechanics of Solids. 1996. № 2. P. 134–137. (in Russian).
- [13] Artemov M. A., Ivlev D. D. On Statistical and Kinematic Correspondences in the Theory of Ideal Plasticity Under Piecewise Linear Flow Conditions // Mechanics of Solids. 1995. № 3. P. 104–110. (in Russian).
- [14] Artemov M. A., Ivlev D. D. About Linearized Equations Kinematically Determinate Problems // Mechanics of Solids. 1995. № 6. P. 104–107. (in Russian).
- [15] Artemov M. A., Ivlev D. D. On General Relation Theory Ideal Plasticity by Line-Sectionally Condition of Plasticity // Doklady Akademii Nauk. 1996. Vol. 350, № 3. P. 332–334. (in Russian).
- [16] Artemov M. A., Pupykin S. N., Ryzhkov A. V. Variant of the Theory of Plastic Flow of Anisotropic Materials // Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics. 2002. № 1. P. 69–73. (in Russian).
- [17] Artemov M. A. To the Theory of Plasticity of Anisotropic Materials // Problems of Mechanics: to the 90th anniversary of A.Yu. Ishlinsky. M.: FIZMATLIT, 2003. P. 100–104. (in Russian).
- [18] Artemov M. A., Baranovskii E. S., Yakubenko A. P. Ratio Isotropy and Associated Flow Law // Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics. 2014. № 4. P. 81–91. (in Russian).
- [19] Annin B. D. On Theories of Ideal Plasticity with a Singular Yield Surface // PMTF. 1999. Vol. 40, № 2. P. 181–188. (in Russian).
- [20] Radaev Ju. N. The Spatial Problem of the Mathematical Theory of Plasticity. Samara: SSU, 2004. (in Russian).
- [21] Artemov M. A., Yakubenko A. P. On the Relations between the Components of the Second-Valence Tensor in the Case of a Multiple Eigenvalue // The Bulletin of Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7, № 8. P. 116–117. (in Russian).
- [22] Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. On the Relations of the Spatial State of Plastic Bodies // The Bulletin of Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7, № 5. P. 101–103. (in Russian).
- [23] Artemov M. A., Pupykin N. S., Yakubenko A. P. General Relations of the Theory of the Flow of Anisotropic Plastic Bodies // The Bulletin of Voronezh State Technical University. 2010. Vol. 6, № 7. P. 56–63. (in Russian).
- [24] Artemov M. A., Potapov N. S. Isotropic Relations and the Associated Flow Law // The Bulletin of Voronezh State Technical University. 2010. Vol. 6, № 9. P. 136–138. (in Russian).
- [25] Artemov M. A., Potapov N. S. On the Relations Arising from the Full Plasticity Condition // The Bulletin of Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7, № 3. P. 27–28. (in Russian).
- [26] Artemov M. A., Larin I. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. Elastoplastic Problem in Case of Plane Strain // The Bulletin of Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7, № 6. C. 135–137. (in Russian).
- [27] Artemov M. A., Ivlev D. D. On Plastic State of Prismatic Bodies with Variable Rectangular Cross Sections // Doklady Akademii Nauk. 1997. Vol. 353, № 1. P. 47–50. (in Russian).

- [28] Burenin A. A., Kovtanjuk L. V. Residual Stresses for a Cylindrical Cavity in an Ideal Elastoplastic Medium // Problems in the mechanics of inelastic deformations. M.: FIZMATLIT, 2001. P. 75–95. (in Russian).
- [29] Artemov M. A., Bestuzheva N. P., Potapov N. S. The Implementation of Full Plasticity Condition at Flat Strain State // Proceedings of Voronezh State Technical University. 2010. Vol. 6, № 7. P. 88–92. (in Russian).
- [30] Artemov M. A., Larin I. A., Potapov N. S. Stress and Strain Distribution in a Cylindrical Tube with Piecewise-Linear Plasticity Condition // Proceedings of Voronezh State Technical University. 2010. Vol. 6, № 9. P. 117–119. (in Russian).
- [31] Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. Mathematical Modeling of the Equilibrium State of a Circular Cylindrical Tube // Proceedings of Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7, № 5. P. 126–128. (in Russian).
- [32] Artemov M. A., Yakubenko A. P. On Lame's Problem // Theoretical and Applied Problems of Education and Science. Tambov: Ucom, 2014. P. 11–13. (in Russian).
- [33] Artemov M. A., Baranovskii E. S., Potapov N. S. Mathematical Modeling of Elastic-Plastic State of a Cylindrical Domain // Modern High Technologie. 2016. № 2. P. 191–195. (in Russian).
- [34] Prager W., Hodge P. G. Theory of Perfectly Plastic Solids. John Wiley & Sons, 1951.
- [35] Hershey A.V. The Plasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Face Centered Cubic Crystals // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1954. V. 21. P. 241–249.
- [36] Hosford W. F. A Generalize Isotropic Yield Criterion // J. Appl. Mech. 1972. V. 39, № 2. P. 607–609.
- [37] Karafillis A. P., Boyce M. C. A General Anisotropic Yield Criterion Using Bounds and a Transformation Weighting Tensor // J. Mech. Phys. Solid. 1993. Vol. 41. P. 1859–1886.
- [38] Artemov M. A., Baranovskii E. S. Alternative Forms of Plasticity Conditions // Advances in Current Natural Sciences. 2014. № 12 (3). P. 292. (in Russian).
- [39] Artemov M. A., Baranovskii E. S., Yakubenko A. P. Alternative Forms of the Piecewise-Linear Conditions of Plasticity and Their Generalizations // Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015. № 1. P. 71–82. (in Russian).
- [40] Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. 1986. № 61. P. 1–14.
- [41] Artemov M. A., Baranovskii E. S. Mathematical Modeling of Plastic State of the Bodies in Case of Plane Strain // Proceedings of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Serie: Mechanics. 2015. № 2 (24). P. 72–87. (in Russian).