

Ю. В. Немировский

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

Аннотация. На основе модели идеального жесткопластического материала для многослойных гибридных балок разработан метод расчета однородных и слоистых балок при воздействии динамических нагрузок «взрывного» типа. Метод позволяет определить закономерности расположения и распределения материалов вдоль конструкции, при которых обеспечивается существенное снижение остаточных прогибов.

Ключевые слова: однородные и слоистые балки, модель идеального жестко-пластического тела, пределы текучести, предельный изгибающий момент, вес конструкции, остаточный прогиб, рациональный проект.

УДК: 539.374

Первоначальные основы разработки методов динамического расчета балок и плит из однородного жестко-пластического материала при воздействии нагрузок «взрывного» типа были изложены в работах Гвоздева А. А. [1] и Саймонда П. [2]. Развитие исследований в дальнейшем шло по пути расширения типов конструктивных элементов: различных видов перекрестных систем, как совокупностей балочных элементов [3], [4], углубленного изучения влияния новых эффектов типа сдвига, инерции вращения [5], армирования [6], запаздывания текучести [7], скорости нагружения и др.

Успешное преодоление некоторых технических трудностей при решении возникающих при этом математических систем уравнений побуждало исследователей расширять попытки поиска на основе модели идеального жестко-пластического тела решений динамических задач для все более широкого множества конструктивных элементов. Больших успехов удалось добиться для криволинейных стержней и тонкостенных элементов типа пластин и оболочек. Подобные обзоры найденных решений динамических задач теории пластичности разнообразных тонкостенных элементов содержатся в источниках [4], [8–10].

© Немировский Ю. В., 2017
Немировский Юрий Владимирович
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 12.01.2017

Обнадеживающие усилия по разработкам методов решения прямых задач динамики пластических конструкций подсказывают, как и в задачах статики, необходимость поиска решений обратных задач. Однако в этом направлении результатов получено мало, и они имеют пока разрозненный набор частных и приближенных решений, основанных на использовании приближенного метода модальных решений применительно к однородным балкам и пластинам с кусочно-постоянными толщинами. Большинство решений получено в статьях Ю. Р. Лепика с соавторами, и они детально отражены в обзоре [11] и монографии [12].

Будем рассматривать слоистые балочные элементы с симметричными сечениями (рис. 1).

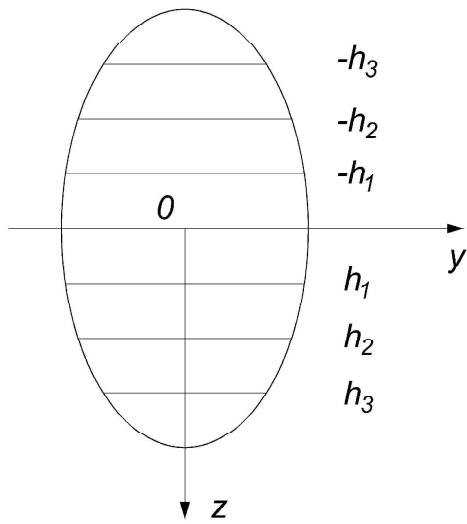


Рис. 1

Предполагаем симметрию расположения материалов относительно плоскостей $z = 0$ и $y = 0$. Считаем, что все составляющие материалы обладают достаточно высоким сопротивлением поперечным сдвигам, так что для всего пакета справедливы гипотезы Бернулли. Тогда в соответствии с моделью идеального жесткопластического состояния все материалы в сечении будут находиться либо в жестком, либо в пластическом состоянии.

Безразмерный предельный изгибающий момент в сечении балки будет равен

$$M_0(x) = 4 \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z) z dz, \quad (1)$$

а удельная осевая масса

$$m(x) = 4 \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z) dz. \quad (2)$$

Здесь

$$\sigma_{0i} = \frac{\bar{\sigma}_{0i}}{\bar{\sigma}_0^0}, b_i = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_0^0}, z_i = \frac{\bar{z}}{\bar{H}_0^0}, \rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_0^0}, x = \frac{\bar{x}}{\bar{l}}, l = \frac{\bar{l}}{\bar{l}_0}.$$

Величины $\bar{\sigma}_{0i}, \bar{z}, \bar{\rho}_i, \bar{x}, \bar{l}$ – размерные величины, $\bar{\sigma}_0^0, \bar{b}_0^0, \bar{\rho}_0^0, \bar{l}_0$ – безразмеривающие параметры.

Если не учитывать влияние инерции вращения, безразмерные уравнения динамического изгиба балки можно записать в виде

$$M'' = m\ddot{w} - f(x, t), \quad (3)$$

$$M' = Qf(x, t) = q_0 f_1(x) f_2(t), \quad (4)$$

здесь $(...) = \frac{\partial}{\partial x}(...), (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}, t = \frac{\bar{t}}{\bar{t}_0}$ – безразмерное время, q_0 – безразмерная амплитуда распределенной нагрузки.

Для нагрузки «взрывного» типа

$$\int_0^t f_2(t) dt \geq t \cdot g_2(t). \quad (5)$$

В соответствии с гипотезой Бернулли для деформации имеем:

$$\varepsilon(x, z) = z\kappa(x), \kappa(x) = -w'',$$

где $w(x, t)$ – безразмерный прогиб.

Если A_* – безразмерная работа деформирования материала в момент разрушения, то для идеально-пластического материала в момент разрушения возникнет предельная деформация

$$\varepsilon_* = A_*/\sigma_0.$$

Критерием рационального использования материала в конструкции следует считать ситуацию, при которой возникшее в сечении пластическое состояние остается таким до остановки балки в некоторый момент времени t_* и когда каждый из входящих в сечение балки материалов в один и тот же момент реализует свою предельную деформацию. Последнее означает, что в момент остановки в рациональной слоистой балке должны выполняться условия

$$\frac{h_{k+1}}{h_k} = \frac{\varepsilon_{k+1}^*}{\varepsilon_k^*} > 1, \varepsilon_k^* = \frac{A_k^*}{\sigma_{ok}}, (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$h_k = \frac{\varepsilon_k^*}{\varepsilon_1^*} h_1. \quad (8)$$

Выражения (7), (8) определяют порядок расположения материалов в сечении и значения координат раздела всех слоев через координату первого слоя.

Для установления сравнительных характеристик качества проектов в динамическом режиме необходимо установить некоторое общее качество сходности проектов. Таким качеством естественно считать одинаковый вес сравниваемых проектов, то есть необходимо требовать выполнения условия

$$\int_0^l m(x) dx = lm_0,$$

где m_0 – удельная масса эталонного проекта постоянного сечения. Это требование примет вид

$$4 \int_0^l \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z) dz = lm_0. \quad (9)$$

При этом следует иметь в виду зависимости (8).

При нагрузках «взрывного» типа обычные начальные условия для балок имеют вид:

$$\dot{w}(x, 0) = 0, w(x, 0) = 0. \quad (10)$$

Представим теперь уравнения (3) в форме

$$\frac{M_0''(x)}{m(x)} + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} f_2(t) = \ddot{w}(x, t) \quad (11)$$

и проинтегрируем его по t с учетом начальных условий (10), получим выражения

$$\dot{w}(x, t) = \frac{M_0''(x)}{m(x)} t + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} I_1(t), \quad (12)$$

$$w(x, t) = \frac{M_0''(x)}{2m(x)} t^2 + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} J_1(t), \quad (13)$$

$$I_1(t) = \int_0^t f_2(t) dt; J_1(t) = \int_0^t I_1(t) dt.$$

Если в момент времени t_* балка останавливается, то $\dot{w}(x, t_*) = 0$, при этом для закона распределения предельного изгибающего момента $M_0(x)$ и остаточного прогиба $w_*(x) = W(x, t_*)$ получим уравнения

$$M_0''(x) = -q_0 f_1(x) p_*, p_* = t_*^{-1} I_1(t_*), \quad (14)$$

$$w_*(x) = \frac{q_0 f_1(x)}{2m(x)} [2J_1(t_*) - p_* t_*^2]. \quad (15)$$

Полученные выражения справедливы для некоторого участка балки $x_1 < x < x_2$, который в течение всего времени движения $0 \leq t \leq t_*$ деформируется пластически. При определенном характере распределения нагрузки и закрепления краев балки такое состояние может быть реализовано на всем пролете. В общем же случае, наряду с пластически деформируемыми, в балке могут существовать жесткие участки, для которых выполняется условие $\dot{\kappa}(x, t) = 0$ и следовательно скорость и ускорение прогиба подчиняются зависимостям

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)x + \dot{C}_2(t), \ddot{w} = \ddot{C}_1(t)x + \ddot{C}_2(t), \quad (16)$$

где $C_1(t), C_2(t)$ – искомые функции. Для их нахождения надо получить соответствующие решения уравнений движения (3) с использованием зависимостей (16), необходимых граничных условий и условий сопряжения на границах пластических и жестких состояний.

Соответствующие процедуры удобнее всего продемонстрировать на конкретных ситуациях. Поэтому далее рассмотрим некоторые примеры.

1. Шарнирно-опертые балки длины $2l$, нагруженные симметрично расположенным относительно середины пролета нагрузками.

В силу симметрии будем рассматривать решение на отрезке $0 \leq x \leq l$. В этом случае должны выполняться граничные условия:

$$Q(0, t) = 0, M(l, t) = 0, \dot{w}(l, t) = 0. \quad (17)$$

Если пластическое состояние реализуется на отрезке $0 \leq x \leq x_2$, ($x_1 = 0$), то на нем будем иметь выражения

$$Q(x) = M_0^1(x) = -q_0 p_* \int_0^x f_1(x) dx, \quad (18)$$

$$M_{01}(x) = M_{01}^* - q_0 p_* \int_{x_2}^x \left[\int_0^x f_1(x) dx \right] dx, M_{01}^* = M(x_2), \quad (19)$$

$$w(x, t) = \frac{q_0 f_1(x)}{m(x)} \left(-p_* t + I_1(t) \right), \quad (20)$$

$$I_1(t) = \int_0^t f_2(t) dt, p_* = t_*^{-1} I_1(t_*).$$

Если $f_1(l) = 0$, то все условия (17) выполнены на отрезке $0 \leq x \leq l$ и $x_2 = l$. Если же распределение нагрузки таково, что $f_1(l) \neq 0$, то формулы (18)–(20) будут справедливы лишь на участке $0 \leq x \leq x_2 < l$. Отрезок балки будет оставаться жестким и на нем имеем

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l), \ddot{w}(t) = \ddot{C}_1(t)(x - l), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} m(x) &= m_*(x), \\ M(x, t) &= \ddot{C}_1(t) \int_l^x \left[\int_{x_2}^x (x - l) m_*(x) dx \right] dx - \\ &- q_0 \left\{ f_2(t) \int_l^x \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx + p_*(x - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Пользуясь условием сопряжения $M(x_2, t) = M_*(x_2)$, получим

$$\begin{aligned} M_*(x_2) &= \ddot{C}_1(t) \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x (x - l) m(x) dx \right] dx - \\ &- q_0 \left\{ f_2(t) \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx + p_*(x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку $M_*(x_2)$ не зависит от t , то из последнего равенства следуют выражения

$$\ddot{C}_1(t) = A_1 + q_0 A_2 f_2(t), \quad (24)$$

$$M_*(x_2) + q_0 p(x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx = q_0 \lambda_1 = const, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{q_0 \lambda_1}{\Psi_1(x_2)}, A_2 = \frac{\Psi_2(x_2)}{\Psi_1(x_2)}, \\ \Psi_1(x_2) &= \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x (x - l) m_*(x) dx \right] dx, \\ \Psi_2(x_2) &= \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx. \end{aligned}$$

Интегрируя (24) при нулевых начальных условиях получим

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= A_1 t + A_2 q_0 I_1(t), \\ C_1(t) &= \frac{1}{2} A_1 t^2 + A_2 q_0 J_1(t), J_1(t) = \int_0^t I_1(t) dt. \end{aligned}$$

Тогда участок балки $x_2 \leq x \leq l$ будет устанавливаться в момент времени $t = t_*$ и распределение остаточного прогиба на нем будет выражаться формулой:

$$w(x, t) = q_0 A_2 \left[-p_* \frac{t^2}{2} + J_1(t) \right] (x - l).$$

Постоянная A_2 определяется из условия непрерывности скоростей прогиба на границе $x = x_2$:

$$A_2 = \frac{f_1(x_2)}{m_1(x_2)(x_2 - l)}.$$

Граница x_2 определяется из уравнения (25), которое примет вид

$$M_*(x_2) = q_0 p_* \left[(x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) - \Psi_2(x_2) \right].$$

Закон распределения материала вдоль балки на участке $0 \leq x \leq x_2$ определяется выражением (19).

2. Зашемленная балка. При нагружении симметрично распределенной нагрузкой относительно середины пролета должны выполняться условия

$$Q(0, t) = 0 \text{ (или } M'_{01}(0, t) = 0\text{)}, \quad \dot{w}(0, t) = 0 \quad (26)$$

и на границе $x = l$ в этом случае выполняются условия

$$\dot{w}(l, t) = 0, \quad M(l, t) = -M_{02}^*. \quad (27)$$

Тогда в области $0 \leq x \leq x_1$ имеем решение

$$Q(x) = M'_{01}(x) = \lambda_0 q_0 \int_0^x f_1(x) dx, \quad (28)$$

$$M_{01}(x) = M_{01}^* + \lambda_0 q_0 \int_{x_1}^x \left[\int_0^x f_1(x) dx \right] dx, \quad \lambda_0 = -t_*^{-1} I_1(t_*), \quad (29)$$

$$\dot{w}(x, t) = \frac{q_0 f_1(x)}{m_1(x)} (\lambda_0 t + I_1(t)), \quad (30)$$

$$\ddot{w}(x, t) = q_0 \frac{[f'_1(x)m_1(x) - m_1(x)f_1(x)]}{m_1^2(x)} (\lambda_0 t + I_1(t)). \quad (31)$$

В силу условия (26) должно выполняться равенство

$$[f'_1(x)m_1(x) - m_1(x)f_1(x)]_{x=0} = 0. \quad (32)$$

В области $x_1 \leq x \leq l$ имеем жесткий участок ($\kappa(x, t) = 0$) с предельными значениями моментов на концах $M(x_1) = M_{02}^* = M_{01}^*$, $M(l) = -M_{03}^*$.

В результате на отрезке $x_1 \leq x \leq l$ имеем решение:

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l), \quad \ddot{w}(x, t) = \ddot{C}_1(t)(x - l),$$

$$M(x, t) + M_{03}^* = \ddot{C}_1(t)\Psi_1(x) - q_0 f_2(t)\Psi_2(x) + \lambda_0 q_0 (x - l) \int_0^{x_1} f_1(x) dx.$$

Используя граничное условие $M(x_1, t) = M_{02}^*$, получим

$$\ddot{C}_1(t) = \frac{q_0 \Psi_2(x_1)}{\Psi_1(x_1)} (f_2(t) + A_1),$$

$$\dot{C}_1(t) = \frac{q_0 \Psi_2(x_1)}{\Psi_1(x)} (I_1(t) + A_1 t),$$

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l),$$

$$A_1 = \frac{M_{02}^* + M_{03}^* - \lambda_0 q_0 (x_1 - l) \int_0^{x_1} f_1(x) dx}{q_0 \Psi_2(x_1)}.$$

Из условия непрерывности скорости прогиба на границе $x = x_1$ имеем

$$\frac{q_0 \Psi_2(x_1)(x_1 - l)}{\Psi_1(x_1)} (I_1(t) + A_1 t) = \frac{f_1(x_1)}{m_1(x_1)} (I_1(t) + \lambda_0 t).$$

Это равенство будет выполняться для любого t , если $A_1 = \lambda_0$ и

$$\frac{q_0 \Psi_2(x_1)(x_1 - l)}{\Psi_1(x_1)} = \frac{f_1(x_1)}{m_1(x_1)}.$$

Последнее равенство служит для определения координаты x_1 . При этом на участке $0 \leq x \leq x_1$ распределение материала вдоль балки определяется по формуле (21), а на отрезке $x_1 \leq x \leq l$ оно считается заданным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 1–2. С. 18–21.
- [2] Саймонде П. Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа // Механика: сб. переводов. М.: Мир, 1956. № 4. С. 90–108.
- [3] Иванов Г. В., Немировский Ю. В., Работнов Ю. Н. Динамика жестко-пластической системы перекрестных связей // Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 51–57.
- [4] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1984. 234 с.
- [5] Немировский Ю. В. Влияние сдвига и инерции вращения на динамический изгиб пластических балок // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1974. Вып. 19–20. С. 83–100.
- [6] Немировский Ю. В. Динамический изгиб армированных пластических стержней // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1979. Вып. 47. С. 37–44.
- [7] Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В. Динамика жестко-пластической балки с запаздыванием текучести // Известия АН СССР. МТТ. 1968. № 6. С. 25–33.
- [8] Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамическая теория пластичности: обзор. М.: ВИНИТИ, 1968. 112 с.
- [9] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование конструкций // Библиографический указатель за 1948–1974 гг. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1975. Ч. I, П. 472 с.
- [10] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Механика: Проблемы динамики упруго-пластических сред. 1975. Вып. 5. С. 155–247.
- [11] Лепик Ю. Р. Оптимальное проектирование неупругих конструкций при динамических воздействиях // Прикладная механика. 1981. Т. XVII. № 9. С. 3–20.
- [12] Лепик Ю. Р. Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин: Валгус, 1982.

Yu. V. Nemirovskii

Institute of Theoretical and Applied Mechanics named after S. A. Christianovich of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Abstract. On the basis of model of ideal rigidly plastic material the computational method of the homogeneous and stratified beams at influence of inertial reaction of "explosive" type is developed for multilayer hybrid beams. The method allows to define regularities of an arrangement and distribution of materials along a design at which essential decrease in residual deflections is provided.

Keywords: the homogeneous and stratified beams, model of an ideal rigid and plastic body, yield points, the limiting moment of deflection, structural weight, residual deflection, rational project.

REFERENCES

- [1] Gvozdev A. A. K raschetu konstrukcij na dejstvie vzryvnnoj volny // Stroitel'naja promyshlennost'. 1943. № 1–2. S. 18–21. (in Russian).
- [2] Sajmonde P. Bol'shie plasticheskie deformacii sterzhnej pod dejstviem nagruzki vzryvnogo tipa // Mehanika: sb. perevodov. M.: Mir, 1956. № 4. S. 90–108. (in Russian).
- [3] Ivanov G. V., Nemirovskij Ju. V., Rabotnov Ju. N. Dinamika zhestko-plasticheskoy sistemy perekrestnyh svjazej // Izvestija AN SSSR, OTN. Mehanika i mashinostroenie. 1963. № 2. S. 51–57. (in Russian).
- [4] Komarov K. L., Nemirovskij Ju. V. Dinamika zhestko-plasticheskikh jelementov konstrukcij. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1984. 234 s. (in Russian).
- [5] Nemirovskij Ju. V. Vlijanie sdvigov i inercii vrashchenija na dinamicheskij izgib plasticheskikh balok // Dinamika sploshnoj sredy. Novosibirsk: Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1974. Vyp. 19–20. S. 83–100. (in Russian).
- [6] Nemirovskij Ju. V. Dinamicheskij izgib armirovannyh plasticheskikh sterzhnej // Dinamika sploshnoj sredy. Novosibirsk: Institut hidrodinamiki SO AN SSSR, 1979. Vyp. 47. S. 37–44. (in Russian).
- [7] Rabotnov Ju. N., Suvorova Ju. V. Dinamika zhestko-plasticheskoy balki s zapazdyvaniem tekuchesti // Izvestija AN SSSR. MTT. 1968. № 6. S. 25–33. (in Russian).
- [8] Rejtman M. I., Shapiro G. S. Dinamicheskaja teorija plastichnosti: obzor. M.: VINITI, 1968. 112 s. (in Russian).
- [9] Mazalov V. N., Nemirovskij Ju. V. Optimal'noe proektirovanie konstrukcij // Bibliograficheskij ukazatel' za 1948–1974 gg. Novosibirsk: Institut hidrodinamiki SO AN SSSR, 1975. Ch. I, II. 472 s. (in Russian).
- [10] Mazalov V. N., Nemirovskij Ju. V. Dinamika tonkostennyh plasticheskikh konstrukcij // Mehanika: Problemy dinamiki uprugo-plasticheskikh sred. 1975. Vyp. 5. S. 155–247. (in Russian).
- [11] Lepik Ju. R. Optimal'noe proektirovanie neuprugih konstrukcij pri dinamicheskikh vozdejstvijah // Prikladnaja mehanika. 1981. T. XVII. № 9. S. 3–20. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics named after S. A. Christianovich of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

- [12] Lepik Ju. R. Optimal'noe proektirovaniye neuprugih konstrukcij v sluchae dinamicheskogo nagruzhenija. Tallin: Valgus, 1982. (in Russian).