Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 49–54

Ю. В. Немировский[1], *А. С. Мозгова*[2]

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ КОНСТРУКЦИОННОГО ЭЛЕМЕНТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ВИДЕ МНОГОСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

[1] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

[2] *Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Исследование теплопроводности в многослойных конструкциях имеет большое значение в связи с проектированием теплозащитных покрытий для перспективных космических аппаратов. Для успешного выполнения космического полета должны быть удовлетворены многие требования. Одно весьма распространенное требование заключается в том, что температуры каждого элемента космического аппарата в течение всего времени должны поддерживаться в заданном рабочем диапазоне. В статье рассмотрен метод решения задачи теплопроводности для многослойного цилиндра при симметричных граничных условиях третьего рода.

Ключевые слова: теплопроводность, теплообмен, космический аппарат, распространение тепла, многослойные конструкции, теплоизоляция.

УДК: 539.374

1. Введение. Обеспечение теплового режима космического аппарата, т.е. поддержание температур основных элементов конструкции, приборов, агрегатов и газовой среды в гермоотсеках в заданных диапазонах, является одним из основных условий успешного выполнения программы космического полета. Космические аппараты имеют большое количество болтовых соединений, разъемов, шарниров и тому подобных элементов, распространение тепла вдоль которых осложняется наличием контактных термических сопротивлений. Успешное функционирование космического аппарата в большой степени зависит от температурного режима его элементов и поверхностей.

Немировский Юрий Владимирович
`e-mail`: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Мозгова Анна Станиславовна
`e-mail`: mozgova-energo@yandex.ru, кандидат экономических наук, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-31-00511, 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 15.01.2017

Чем сложнее задачи полета, тем большее значение приобретают защитные экраны и другие методы теплоизоляции. Для проведения тепловых расчетов большинства элементов конструкции требуется знание величины контактной проводимости соединений. Можно привести много примеров изделий современной космической техники, для которых контактный теплообмен является определяющим фактором. Сюда относится теплоизоляция таких элементов, как отражающие экраны, узлы крепления антенн, отсеки с криогенным топливом. В этих конкретных случаях использование изолирующих материалов с низкой теплопроводностью приносит прямую выгоду [1].

Используя метод описанный в [2] рассмотрим задачу теплопроводности конструкционного элемента космического аппарата в виде многослойного цилиндра.

Среди методов решения задач теплопроводности для многослойных конструкций известны методы, в которых такие конструкции рассматриваются как один слой, но с переменными (разрывными) физическими свойствами среды. При использовании этих методов в одних случаях строятся системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, а в других – для описания разрывных свойств среды используется асимметричная единичная функция. Сведение многослойной конструкции к однослойной значительно упрощает как процесс получения аналитических решений, так и получаемые для них формулы [2].

2. Постановка краевой задачи. Рассмотрим задачу теплопроводности для многослойного цилиндра при симметричных граничных условиях третьего рода. Математически рассматриваемая проблема сводится к решению начально краевой задачи [2]:

$$\frac{\partial \Theta_i(x,Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a}\left(\frac{\partial^2 \Theta_i(x,Fo)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \Theta_i(x,Fo)}{\partial x}\right); \tag{1}$$

$$(Fo > 0;\ x_{i-1} \le x < x_i;\ i = \overline{1,m};\ x_0 = 0;\ x_m = 1)$$

$$\Theta_i(x,0) = 1; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Theta_{m-1}(0,Fo)}{\partial x} = 0; \tag{3}$$

$$\Theta_{m-1}(x_{m-1},Fo) = \Theta_m(x_{m-1},Fo); \tag{4}$$

$$\lambda_{m-1}\frac{\partial \Theta_{m-1}(x_{m-1},Fo)}{\partial x} = \lambda_m \frac{\partial \Theta_m(x_{m-1},Fo)}{\partial x}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Theta_m(1,Fo)}{\partial x} + Bi\Theta_m(1,Fo) = 0, \tag{6}$$

здесь $x_i = \eta/\delta_i, (i = \overline{1,m})$ - безразмерная радиальная координата; η - координата; δ_i - радиус цилиндра; $Fo = a\tau/\delta^2$ - число Фурье; $Bi = \alpha\delta/\lambda_i$ - число Био;
$\Theta_i = (t_i - t_{cp})/(t_{0i} - t_{cp})$ - относительная избыточная температура; a - наименьший из коэффициентов температуропроводности a_i,$(i = \overline{1,m})$; α - коэффициент теплоотдачи; λ_i, $(i = \overline{1,m})$ - коэффициент теплопроводности; t_0 - начальная температура; t_{cp} - температура среды; τ - время.

При проектировании многих несущих элементов современных космических аппаратов используются армирующие волокнистые конструкции. В этом случае все слои или часть слоев будут ортотропными с различными коэффициентами теплопроводности в главных направлениях цилиндра, что приведет к несущественному изменению записи уравнений (1). Необходимые при этом коэффициенты теплопроводности подобных армирующих слоев могут быть определены по модели, предложенной в статье [3].

3. Решение краевой задачи. Решение задачи (1)-(6) находим среди функций вида:

$$\Theta_i(x, Fo) = f_1(Fo)\varphi_{1i}(x) + \sum_{k=2}^{n} f_k(Fo)\varphi_{ki}(x), \tag{7}$$

где $f_1(Fo), f_k(Fo), (k = \overline{(2, n)}$ - неизвестные функции времени; $\varphi_{1i}(x), \varphi_{ki}(x)$ - координатные функции.

Неизвестные функции времени принимаем одинаковыми для всех контактирующих тел при различных для каждого тела координатных функциях.

Решение построим так, чтобы координатные функции первого приближения $\varphi_{k1}(x), k = \overline{(1, n)}$ удовлетворяли граничным условиями и условиями сопряжения. Вначале определим координатную функцию для m-го тела. Эта функция находится методом неопределенных коэффициентов так, чтобы выполнялось граничное условие (6).

Формулу для определения координатной функции m-го тела находим в виде:

$$\varphi_m(x) = \frac{Bi + 2}{Bi} - x^2. \tag{8}$$

Координатную функцию для (m-1)-го слоя находим в виде:

$$\varphi_{m-1}(x) = E_1 + E_2 x^2, \tag{9}$$

где E_1 и E_2 - неизвестные коэффициенты, определяемые из условия сопряжения (4) и (5) между m-ым и (m-1)-м слоем.

Из системы уравнений определим E_1 и E_2:

$$\begin{cases} \dfrac{Bi + 2}{Bi} - x_{m-1}^2 = E_1 + E_2 x_{m-1}^2; \\ \lambda_m(-2x_{m-1}) = \lambda_{m-1}(2E_2 x_{m-1}). \end{cases}$$

$$E_2 = -\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}; \tag{10}$$

$$E_1 = \frac{Bi + 2}{Bi} - x_{m-1}^2 - E_2 x_{m-1}^2 = \frac{Bi + 2}{Bi} + (\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1)x_{m-1}^2. \tag{11}$$

Полученные значения (10) и (11) подставим в (9):

$$\varphi_{m-1}(x) = \frac{Bi + 2}{Bi} + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x^2.$$

Формулу для координатной функции (m-2)-го слоя, определим таким образом, чтобы выполнялись условия сопряжения между (m-1)-м и (m-2)-м слоем.

Координатную функцию для (m-2)-го слоя находим в виде:

$$\varphi_{m-2}(x) = F_1 + F_2 x^2, \tag{12}$$

где F_1 и F_2 - неизвестные коэффициенты, определяемые из условия сопряжения (4) и (5) между (m-1)-м и (m-2)-м слоем.

Определим F_1 и F_2:

$$\begin{cases} \dfrac{Bi+2}{Bi} + \left(\dfrac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2 - \dfrac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x_{m-2}^2 = F_1 + F_2 x_{m-2}^2; \\ \lambda_{m-1}\left(-2\dfrac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x_{m-2}\right) = \lambda_{m-2}(2F_2 x_{m-2}). \end{cases}$$

$$F_2 = -\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-2}}; \tag{13}$$

$$F_1 = \frac{Bi+2}{Bi} + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2 + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-2}} - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}\right)x_{m-2}^2. \tag{14}$$

Полученные значения (13) и (14) подставим в (12):

$$\varphi_{m-2}(x) = \frac{Bi+2}{Bi} + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2 + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-2}} - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}\right)x_{m-2}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-2}}x^2.$$

Таким путем построим координатные функции для любого числа контактирующих тел.

Запишем общую формулу для координатной системы первого приближения:

$$\varphi_{1i}(x) = \frac{Bi+2}{Bi} + \sum_{k=0}^{m-i}(1 - H(i+k-m))\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-k-1}} - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-k}}\right)x_{m-k-1}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_i}x^2,$$

где $H(\eta)$ - функция Хевисайда (единичная функция), определяемая выражением:

$$H(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le \eta < \infty; \\ 0 & \text{при } -\infty < \eta < 0. \end{cases}$$

$$(\eta = i + k - m)$$

Для нахождения неизвестных функций времени $f_k(Fo)$ составим невязку уравнения (1) и потребуем ортогональности невязки ко всем координатным функциях $\varphi_k(x)$, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k(Fo)}{\partial Fo}\varphi_{ki}(x) - f_k(Fo)\frac{a_i}{a}\left(\frac{\partial^2\varphi_{ki}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\varphi_{ki}(x)}{\partial x}\right)\right)\varphi_{ji}(x)dx = 0. \tag{15}$$

Вычисляя интегралы в (15) относительно неизвестных функций времени получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} A_{11}f_1^{'} + A_{12}f_2^{'} + ... + A_{1n}f_n^{'} + B_{11}f_1 + B_{12}f_2 + ... + B_{1n}f_n = 0; \\ A_{21}f_1^{'} + A_{22}f_2^{'} + ... + A_{2n}f_n^{'} + B_{21}f_1 + B_{22}f_2 + ... + B_{2n}f_n = 0; \\ ....; \\ A_{n1}f_1^{'} + A_{n2}f_2^{'} + ... + A_{nn}f_n^{'} + B_{n1}f_1 + B_{n2}f_2 + ... + B_{nn}f_n = 0. \end{cases} \quad (16)$$

где

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{ki}(x)\varphi_{ji}(x)dx; B_{jk} = -\sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{a_i}{a}\left(\frac{\partial^2 \varphi_{ki}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \varphi_{ki}(x)}{\partial x}\right)\varphi_{ji}(x)dx.$$

$$(j = k = \overline{1, n})$$

Частные решения системы уравнений (16) находим в виде:

$$f_j(Fo) = \sum_{k=1}^{n} D_{jk} e^{(\mu_k Fo)}. \qquad (j = \overline{1, n}) \quad (17)$$

Для нахождения общего решения этой системы умножим частное решение, отвечающее корню μ_1, на произвольную постоянную C_1, решение, отвечающее μ_2 - на C_2 и т.д. Тогда решение (7) примет вид:

$$\Theta_i(x, Fo) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_k D_{jk} e^{(\mu_k Fo)} \varphi_{ki}(x). \quad (18)$$

Для определения постоянных $C_k, (k = 1, n)$ составим невязку начального условия (2) и потребуем ортогональности невязки ко всем координатным функциям φ_{ki}, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_k D_{jk} e^{(\mu_k 0)} \varphi_{ki}(x) - 1\right)\varphi_i(x)dx = 0. \qquad (i = \overline{1, n}) \quad (19)$$

После определения C_k окончательное решение задачи (1)-–(6) находится из (18).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лукас Дж. Теплообмен и тепловой режим космических аппаратов / под ред. Н. А. Анфимова. М.: Мир, 1974. 544 с.

[2] Кудинов В. А., Аверин Б. В., Стефанюк Е. В., Назаренко С. А. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. Самара: Самар. гос. тех. ун-т, 2006. 304 с.

[3] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Влияние формы и расположения армирующих элементов на тепловые свойства композитов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 3–25.

Yu. V. Nemirovskii[1], *A. S. Mozgova*[2]

THE THERMAL CONDUCTIVITY OF A CONSTRUCTIONAL ELEMENT OF THE SPACECRAFT IN THE FORM OF THE MULTILAYERED CYLINDER

[1]*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

[2]*I. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. The use of thermal conductivity in multilayer structures is of great importance in connection with designing heat-shielding coatings for perspective spacecrafts. Many requirements should be taken into consideration for a successful space flight. The first and the most common requirement is that temperature of each element of a spacecraft during all the period of time should be maintained in the predetermined operating range. The article describes the method of solving the problem of thermal conductivity for a multilayer cylinder with symmetric boundary conditions of the third kind.
Keywords: thermal conductivity, heat exchange, spacecraft, heat spreading, multilayered cylinder, thermal insulation.

REFERENCES

[1] Lucas John W. Heat Trasfer and Spacecraft Thermal Control / ed. N. A. Anfimova. M.: Mir, 1974. 544 p.

[2] Kudinov V. A, Averin B. V, Stefanyuk E. V., Nazarenko S.A. The thermal conductivity and thermoelasticity for multilayer structures. Samara: Samar. state technical University, 2006. 304 p.

[3] Nemirovskii Yu. V., Stanislavovich A. V. The Influence of shape and arrangement of reinforcing elements on the thermal properties of reinfoeced materials // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 4 (26). P. 3–25. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

`e-mail:` nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

Mozgova Anna Stanislavovna

`e-mail:` mozgova-energo@yandex.ru, Candidate of Economic Sciences, I. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.