

Ю. В. Немировский¹, А. В. Станиславович²

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. В статье представлена математическая модель теплопроводности многослойной плоской стенки, слои которой имеют различную толщину и структуру. Слои могут представлять собой как изотропные материалы, так и ортотропные: армированные волокнами либо частицами композиционные материалы, сотовые структуры с различными параметрами армирования. Предложена методика решения нестационарной задачи теплопроводности для многослойной плоской стенки в трехмерной постановке. Методика решения основана на сведении нестационарной задачи к стационарной с помощью преобразования Лапласа и построения решения получившейся стационарной задачи в виде бесконечного ряда методом Бубнова – Галеркина.

Ключевые слова: теплопроводность, теплозащита, сотовые конструкции, слоистые конструкции, аналитические решения.

УДК: 536.21

Введение. Исследование различных проблем теплопередачи играет важную роль при проектировании газотурбинных двигателей и установок, авиационной и ракетной техники [1], [2]. При этом помимо эффективного увеличения термического сопротивления по толщине стенок несущих и теплоотводящих конструкций требуется обеспечение достаточной прочности и жесткости при ограничении веса. Одновременное выполнение таких требований может быть реализовано в подкрепленных конструкциях коробчатого типа или в трехслойных панелях с легкими алюминиевыми или стеклопластиковыми сотовыми наполнителями. Теплопроводность таких конструкций была

© Немировский Ю. В., Станиславович А. В., 2017
Немировский Юрий Владимирович
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.
Станиславович Алексей Вячеславович
e-mail: alexey.st@bk.ru, ведущий специалист, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 11.08.2016

исследована в работах [3], [4]. В настоящее время существуют технологии производства многослойных сотопластовых и металлокомпозитных конструкций, разделяющих жидкости или газы с различными температурами. Все составляющие конструкцию подслои могут состоять из различных материалов, иметь различные структуры армирования, различную форму, плотность и взаимное расположение сот и в связи с этим могут позволять в широких пределах управлять температурным полем в направлении нормали к поверхности многослойной конструкции. Решение такой задачи нам неизвестно и должно быть основано на относительно разумных и простых гипотезах, позволяющих построить сравнительно простую расчетную модель, обеспечивающую возможность решения соответствующих задач управления тепловым полем и оптимизационных задач.

Рассматривая слоистую в направлении оси Oz конструкцию (рисунок 1), будем считать все составляющие слои ортотропными и имеющими размеченную структуру в направлении оси Oz . Структура в каждом слое является регулярно-сотовой или однородной с “тонкими слоями армирования”, позволяет использовать модель теплопроводности из [5], [6].

Математическая модель. Пусть дана трехмерная стенка, состоящая из N слоев постоянной толщины δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в направлении оси $O\tilde{z}$ (рисунок 1). Граница между i -м и $(i+1)$ -м слоями имеет координату, l_{zi} ($i = 1, 2, \dots, N - 1$). Тогда выполняются условия:

$$0 = l_{z0} < l_{z1} < l_{z2} < \dots < l_{z(N-1)} < l_{zN} = l_z.$$

Материал каждого слоя неоднороден и ортотропен по типу [5], [6]. На границе раздела i -го и $(i+1)$ -го слоев задаются условия идеального теплового контакта [7]:

$$T^i = T^{i+1}; \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \mathbf{n}}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор единичной нормали к поверхности раздела слоев, λ_i , λ_{i+1} – коэффициенты теплопроводности i -го и $(i+1)$ -го слоев соответственно в направлении нормали \mathbf{n} .

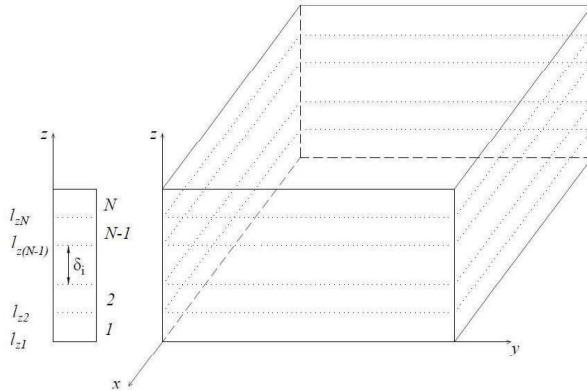


Рис. 1. Многослойная пластинка

В случае неидеального теплового контакта (контактные поверхности разделены тонкой прослойкой) обычно вводится понятие контактного сопротивления R . Равенство тепловых потоков здесь имеет место, но появляется пропорциональная им разность между двумя поверхностными температурами [8]:

$$\begin{aligned} \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} &= \frac{1}{R} \left(T^{i+1}(x, y, z, t) \Big|_{S_{i+1}} - T^i(x, y, z, t) \Big|_{S_i} \right), \\ \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} &= \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{i+1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности S_i относительно i -го слоя.

Решение задачи нестационарной теплопроводности многослойных стенок, состоящих из N слоев, разнородных по геометрии и тепловым свойствам материалов при различных вариантах теплообмена с окружающей средой, совершенном или не совершенном контакте на поверхности раздела слоев сводится к решению системы уравнений [8]:

$$\begin{aligned} \rho_i C_i \frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\lambda_x^i(\tilde{x}) \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\lambda_y^i(\tilde{y}) \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\lambda_z^i(\tilde{z}) \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}}) \right] &= \tilde{f}_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t), \\ t > 0, \quad 0 < \tilde{x} < l_x, \quad 0 < \tilde{y} < l_y, \quad l_{z(i-1)} < \tilde{z} < l_{zi} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ρ_i , C_i – приведенная плотность и объемная теплоемкость i -го слоя, λ_x^i , λ_y^i , λ_z^i – компоненты тензора теплопроводности вдоль соответствующих координатных осей, в общем случае зависящие от координат [6].

Дополним систему (2) следующими начальными и граничными условиями [8]:

$$T^i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) \Big|_{t=0} = \Phi_{oi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \beta_{11}^x \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0} - \beta_{21}^x T^i \Big|_{\tilde{x}=0} &= -\phi_1^x(t), \quad \beta_{12}^x \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=l_x} - \beta_{22}^x T^i \Big|_{\tilde{x}=l_x} = -\phi_2^x(t), \\ \beta_{11}^y \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0} - \beta_{21}^y T^i \Big|_{\tilde{y}=0} &= -\phi_1^y(t), \quad \beta_{12}^y \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=l_y} - \beta_{22}^y T^i \Big|_{\tilde{y}=l_y} = -\phi_2^y(t), \\ \beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{\tilde{z}=0} &= -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_z} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{\tilde{z}=l_z} = -\phi_2^z(t). \end{aligned} \quad (5)$$

При $\beta_{1j}^k = 0$, $\beta_{2j}^k = 1$ получим первую краевую задачу.

При $\beta_{1j}^k = \lambda$, $\beta_{2j}^k = 0$ получим вторую краевую задачу.

При $\beta_{1j}^k = -\lambda$, $\beta_{2j}^k = \alpha$, $\phi_j^k(t) = \alpha T_{\text{ср}}^j$ получим третью краевую задачу. Здесь α – коэффициент теплонапередачи, $T_{\text{ср}}^j$ – температура окружающей среды при конвективном теплообмене, $j = 1, 2$, $k = "x", "y"$ или $"z"$.

Условия сопряжения (предполагается идеальный тепловой контакт) (1) записываются в виде:

$$T^i \Big|_{\tilde{z}=l_{zi}} = T^{i+1} \Big|_{\tilde{z}=l_{zi}},$$

$$\lambda_z^i(l_{zi}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_{zi}} = \lambda_z^{i+1}(l_{zi}) \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_{zi}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (6)$$

Введем безразмерные переменные [8]:

$$x = \frac{\tilde{x}}{l_x}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{l_y}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{l_z}, \quad w_i = \frac{l_{zi}}{l_z}, \quad \omega_i = \frac{\delta_i}{l_z}. \quad (7)$$

Обозначим

$$a_x^i(x) = \frac{\lambda_x^i(x)}{\rho_i C_i}, \quad a_y^i(y) = \frac{\lambda_y^i(y)}{\rho_i C_i}, \quad \dots, \quad \tilde{f}_i(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho_i C_i} f(x, y, z, t). \quad (8)$$

Тогда соотношения (2)–(6) придут к виду:

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} (a_x^i(x) \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (a_y^i(y) \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (a_z^i(z) \frac{\partial T}{\partial z}) \right] = f_i(x, y, z, t), \quad (9)$$

$$t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

$$T^i(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \Phi_{oi}(x, y, z) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

$$\beta_{11}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} \Big|_{x=0} - \beta_{21}^x T^i \Big|_{x=0} = -\phi_1^x(t), \quad \beta_{12}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} \Big|_{x=1} - \beta_{22}^x T^i \Big|_{x=1} = -\phi_2^x(t),$$

$$\beta_{11}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} \Big|_{y=0} - \beta_{21}^y T^i \Big|_{y=0} = -\phi_1^y(t), \quad \beta_{12}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} \Big|_{y=1} - \beta_{22}^y T^i \Big|_{y=1} = -\phi_2^y(t), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{z=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial z} \Big|_{z=1} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{z=1} = -\phi_2^z(t). \quad (11)$$

$$T^i \Big|_{z=w_i} = T^{i+1} \Big|_{z=w_i},$$

$$\lambda_z^i(w_i) \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=w_i} = \lambda_z^{i+1}(w_i) \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (12)$$

Методика решения. Положим [8]:

$$\bar{T}(x, y, z, p) = \int_0^\infty e^{-pt} T(x, y, z, t) dt. \quad (13)$$

Применив преобразование Лапласа (9) к задаче (7)–(11), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_x^i(x) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_y^i(y) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_z^i(z) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \right) - p \bar{T}^i(x, y, z, p) = \\ = \bar{\Phi}_{1i}(x, y, z, p), \end{aligned} \quad (14)$$

$$t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$\bar{\Phi}_{1i}(x, y, z, p) = -(\Phi_{0i}(x, y, z) + \bar{f}_i(x, y, z, p)).$$

Начальные и граничные условия (8)–(11) принимают вид:

$$\begin{aligned} \beta_{11}^x \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \Big|_{x=0} - \beta_{21}^x \bar{T}^i \Big|_{x=0} &= -\bar{\phi}_1^x(z), \quad \beta_{12}^x \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \Big|_{x=1} - \beta_{22}^x \bar{T}^i \Big|_{x=1} = -\bar{\phi}_2^x(p), \\ \beta_{11}^y \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial y} \Big|_{y=0} - \beta_{21}^y \bar{T}^i \Big|_{y=0} &= -\bar{\phi}_1^y(p), \quad \beta_{12}^y \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \Big|_{y=1} - \beta_{22}^y \bar{T}^i \Big|_{y=1} = -\bar{\phi}_2^y(p), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ \beta_{11}^z \frac{\partial \bar{T}^1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta_{21}^z \bar{T}^1 \Big|_{z=0} &= -\bar{\phi}_1^z(p), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial \bar{T}^N}{\partial z} \Big|_{z=1} - \beta_{22}^z \bar{T}^N \Big|_{z=1} = -\bar{\phi}_2^z(p). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\tilde{f}_i(x, y, z, t) \rightarrow \bar{f}(x, y, z, p)$, $\phi_j^k(t) \rightarrow \bar{\phi}_j^k(p)$ ($k = "x", "y"$ или $"z"$).

Условия сопряжения (12) приходят к виду:

$$\begin{aligned} \bar{T}^i \Big|_{z=w_i} &= \bar{T}^{i+1} \Big|_{z=w_i}, \\ \lambda_z^i(w_i) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \Big|_{z=w_i} &= \lambda_z^{i+1}(w_i) \frac{\partial \bar{T}^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} L[\bar{T}^i(x, y, z, p)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a_x^i(x) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_y^i(y) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_z^i(z) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \right) - \\ &- p \bar{T}^i(x, y, z, p). \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда выражение (10) можно записать в виде:

$$L[\bar{T}^i(z, y, z, p)] - \Phi_{1i}(x, y, z, p) = 0. \quad (18)$$

Решение задачи (10)–(16) будем искать с помощью метода Бубнова – Галеркина [9], [10], [11] в виде ряда:

$$\bar{T}^i(x, y, z, p) = \phi_0(x, y, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \phi_m(x, y, z). \quad (19)$$

Здесь $\phi_m(x, y, z)$ – какая-то полная система линейненезависимых функций, дважды непрерывно дифференцируемая в

$$S = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\},$$

удовлетворяющая однородным краевым условиям, $\phi_0(x, y, z)$ – какая-то функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (15)–(16), $A_m(p)$ – произвольные коэффициенты. Тогда, в общем случае, ряд (14) не удовлетворяет дифференциальную уравнению (12)

$$\begin{aligned}
& L[\bar{T}^i(x, y, z, p)] - \Phi_{1i}(x, y, z, p) = \\
& = L\left[\phi_0(x, y, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \phi_m(x, y, z)\right] - \Phi_{1i}(x, y, z, p) = \\
& = L[\phi_0(x, y, z)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) L[\phi_m(x, y, z)] - \Phi_{1i}(x, y, z, p) = F(x, y, z, p) \neq 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, что невязка полученного решения существенно зависит от значений неопределенных коэффициентов $A_m(p)$. Потребуем выполнения условий ортогональности функции $F(x, y, z, p)$ полной системе линейно независимых функций $\phi_k(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{(S_i)} F(x, y, z, p) \phi_k^i(x, y, z) dx dy dz = \\
& = \iiint_{(S_i)} \left[L[\varphi_0(x, y, z)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^i(p) L[\phi_m^i(x, y, z)] - \Phi_{1i}(x, y, z, p) \right] \times \\
& \quad \times \phi_k^i(x, y, z) dx dy dz = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} B_{mk}^i A_m^i - C_k^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N; \quad k = 1, 2, 3 \dots).
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B_{mk}^i &= \iiint_{(S_i)} L[\phi_m^i(x, y, z)] \phi_k^i(x, y, z) dx dy dz, \\
C_k^i &= \iiint_{(S_i)} \Phi_{1i}(x, y, z, p) \phi_k^i(x, y, z) dx dy dz.
\end{aligned}$$

Таким образом получена система алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mk}^i A_m^i = C_k^i \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, 3 \dots)$$

для определения коэффициентов A_m^i , так что функции $F^i(x, y, z, p)$ ортогональны системе функций $\phi_k^i(x, y, z)$ и, следовательно, функции $F^i(x, y, z, p)$ тождественно равны нулю:

$$F(x, y, z, p) = L[T^i(x, y, z, p)] - \Phi_{1i}(x, y, z, p) \equiv 0.$$

Так как система алгебраических уравнений в общем случае является полной бесконечной системой, решение которой в общем виде возможно лишь при определенных соотношениях между коэффициентами системы, то на практике обычно ограничиваются конечным числом членов ряда, получая таким образом приближенное решение.

Более простое решение получается, если системы функций $L[\phi_m^i(x, y, z)]$ и $\phi_k^i(x, y, z)$ взаимно ортогональны в области интегрирования. Тогда метод Бубнова – Галеркина приводит к системе независимых алгебраических уравнений для каждого неизвестного коэффициента A_m^i :

$$A_m^i = \frac{C_m^i}{B_{mm}^i}, \quad (22)$$

и, следовательно, можно получить точное решение задачи. Таким образом, ряд (14) задает решение задачи (2)–(5) в изображениях.

В случае когда толщина стенки мала по сравнению с ее размерами, задачу можно свести к двумерной, аппроксимировав распределение температуры вдоль оси Oz какой-либо функцией заданного вида (например, полиномом k -й степени).

Пример. Рассмотрим двухслойную пластинку (рис. 2). На плоскости $z = 0$ задан постоянный тепловой поток Q , направленный внутрь контура, остальные поверхности внешнего контура контактируют со средой нулевой температуры. Плоскость раздела слоев имеет координату $z = w_1$. Внутри первого слоя существует внутренний источник тепла

$$f_1(x, y, z, t) = \sin \pi x \sin \pi y \cos \frac{\pi z}{2w_1} \sin t.$$

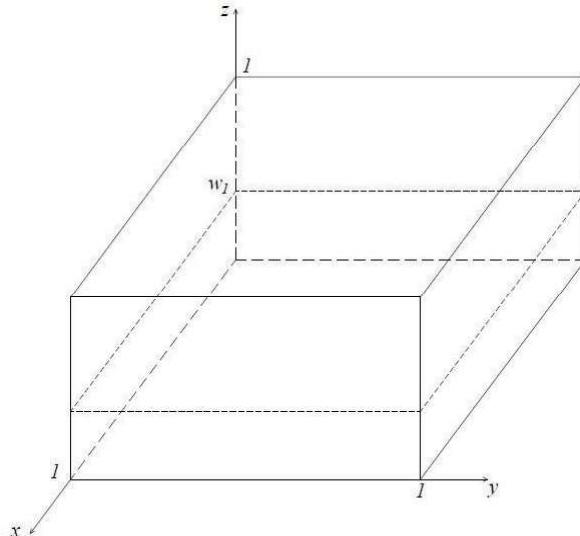


Рис. 2. Двухслойная пластина

Коэффициент теплопроводности первого слоя вдоль оси Oz λ_z^1 изменяется от k_1 до k_2 по линейному закону

$$\lambda_z^1(z) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{w_1} z,$$

вдоль осей x , y коэффициенты теплопроводности первого слоя постоянны и равны соответственно λ_x^1 , λ_y^1 . Второй слой изотропен, коэффициенты теплопроводности вдоль осей равны

$$\lambda_x^2 = \lambda_y^2 = \lambda_z^2 = \lambda^2.$$

Уравнение теплопроводности записывается в виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 C_1 \frac{\partial T^1}{\partial t} - \left[\lambda_x^1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y^1 \frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z^1(z) \frac{\partial T^2}{\partial z} \right) \right] &= \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos \frac{\pi z}{2w_1} \sin t \\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < w_1, \quad t > 0, \\ \rho_2 C_2 \frac{\partial T^2}{\partial t} - \lambda^2 \left[\frac{\partial^2 T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^2}{\partial z^2} \right] &= 0, \\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad w_1 < z < 1, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Начальные и граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} T^1|_{\Gamma_1} &= 0, \quad T^2|_{\Gamma_2} = 0, \\ k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} &= Q \\ \Phi_{01}(x, y, z) &= (1-x)(1-y) \sin \frac{\pi z}{w_1}, \quad \Phi_{02}(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь Γ_1, Γ_2 :

$$\Gamma_1 = \{0 \leq x \leq 1; y = 0 \cup y = 1; 0 \leq z \leq w_1\} + \{x = 0 \cup x = 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq w_1\},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \{0 \leq x \leq 1; y = 0 \cup y = 1; w_1 \leq z \leq 1\} + \{x = 0 \cup x = 1; 0 \leq y \leq 1; w_1 \leq z \leq 1\} + \\ &+ \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; z = 1\}. \end{aligned}$$

Условия сопряжения слоев:

$$\begin{aligned} T^1|_{z=w_1} &= T^2|_{z=w_1}, \\ k_2 \frac{\partial T^1}{\partial z} \Big|_{z=w_1} &= \lambda^2 \frac{\partial T^2}{\partial z} \Big|_{z=w_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Применим к задаче (23)–(25) преобразование Лапласа (9):

$$\begin{aligned} \lambda_x^1 \frac{\partial^2 \bar{T}^1}{\partial x^2} + \lambda_x^1 \frac{\partial^2 \bar{T}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z^1(z) \frac{\partial \bar{T}^1}{\partial z} \right) - \rho_1 C_1 p \bar{T}^1 &= \\ = -\sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos \left(\frac{\pi z}{2w_1} \right) \frac{1}{p^2-1}, \\ \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{T}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}^2}{\partial z^2} \right) - \rho_2 C_2 p \bar{T}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Граничные условия (24) записываются в виде:

$$\bar{T}^1|_{\Gamma_1} = 0, \quad \bar{T}^2|_{\Gamma_2} = 0. \quad (27)$$

Условия сопряжения (25):

$$\bar{T}^1|_{z=w_1} = \bar{T}^2|_{z=w_1}, \quad k_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = Q, \quad k_2 \frac{\partial \bar{T}^1}{\partial z} \Big|_{z=w_1} = \lambda^2 \frac{\partial \bar{T}^2}{\partial z} \Big|_{z=w_1}. \quad (28)$$

Представим \bar{T}^i ($i = 1, 2$) в виде

$$\bar{T}^i = \bar{F}_1^i(x, y, p) F_2^i(z).$$

Распределение температуры по толщине примем в виде полинома второй степени:

$$F_2^i(z) = z^2 + b_i z + c_i. \quad (29)$$

Значения коэффициентов b_i , c_i найдем из краевых условий (18)–(28). Подставив, получим систему 4 линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов b_i , c_i :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{Q}{k_1}, \\ c_1 &= w_1 \left(\frac{k_2}{\lambda^2} \left(2w_1 + \frac{Q}{k_1} \right) - 2w_1 \right) - 1 - \frac{k_2}{\lambda^2} \left(2w_1 + \frac{Q}{k_1} \right) + 2w_1 - w_1 \frac{Q}{k_1}, \\ b_2 &= \frac{k_2}{\lambda^2} \left(2w_1 + \frac{Q}{k_1} \right) - 2w_1, \\ c_2 &= - \left(1 + \frac{k_2}{\lambda^2} \left(2w_1 + \frac{Q}{k_1} \right) - 2w_1 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда уравнения (26) придут к виду:

$$\begin{aligned} F_2^1 \left[a_x^1 \frac{\partial^2 \bar{F}_1^1}{\partial x^2} + a_x^1 \frac{\partial^2 \bar{F}_1^1}{\partial x^2} \right] + F_1^1 \frac{d}{dz} \left(a_z^1(z) \frac{\partial F_2^1}{\partial z} \right) - p \bar{F}_1^1 F_2^1 = \\ = - \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos\left(\frac{\pi z}{2w_1}\right) \frac{1}{p^2 - 1}, \\ a^2 \left(F_2^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{F}_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}_1^2}{\partial y^2} \right) + \bar{F}_1^2 \frac{d^2 F_2^2}{dz^2} \right) - p \bar{F}_1^2 F_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь

$$a^2 = \frac{\lambda^2}{\rho_2 C_2}, \quad a_i^1 = \frac{\lambda_i^1}{\rho_1 C_1} \quad (i = "x", "y", "z").$$

Таким образом, мы перешли к задаче в плоскости Oxy .

В качестве линейно независимой системы функций возьмем:

$$g_n(x, y) = \sin(\pi n x) \sin(\pi n y). \quad (32)$$

Легко проверить, что системы функций (32) удовлетворяют краевым условиям (18). Решение задачи (31), (18)–(28) будем искать в виде ряда (14).

Найдем

$$\begin{aligned}
L[g] &= F_2^1 \left[-a_x^1 (\pi n)^2 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) - a_y^1 (\pi n)^2 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) \right] + \\
&+ \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) \left[\frac{da_z^1}{dz} \frac{dF_2^1}{dz} + a_z^1 \frac{d^2 F_2^1}{dz^2} \right] - pF_2^1 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) = \\
&= \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) \left[-F_2^1 (\pi n)^2 (a_x^1 + a_y^1) + \left(\frac{da_z^1}{dz} \frac{dF_2^1}{dz} + a_z^1 \frac{d^2 F_2^1}{dz^2} \right) - pF_2^1 \right] = \\
&= R_1 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y),
\end{aligned}$$

где

$$R_1 = -F_2^1 (\pi n)^2 (a_x^1 + a_y^1) + \left(\frac{da_z^1}{dz} \frac{dF_2^1}{dz} + a_z^1 \frac{d^2 F_2^1}{dz^2} \right) - pF_2^1. \quad (33)$$

Далее найдем

$$\begin{aligned}
B_{nm}^1 &= \iint_{(S)} L[g_n(x, y)] g_m(x, y) dS_1 = \\
&= \iint_{(S)} R_1 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) \sin(\pi m x) \sin(\pi m y) dx dy = \\
&= R_1 \int_0^1 \sin(\pi n x) \sin(\pi m x) dx \int_0^1 \sin(\pi n y) \sin(\pi m y) dy = \\
&= \frac{1}{4} R_1 \delta_{nm}.
\end{aligned} \quad (34)$$

Здесь

$$S = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\},$$

δ_{nm} – символ Кронекера.

$$\begin{aligned}
C_m^1 &= -\frac{1}{\rho_1 C_1} \iint_{(S)} \left[(1-x)(1-y) \sin \frac{\pi z}{w_1} + \sin \pi x \sin \pi y \cos \frac{\pi z}{2w_1} \times \frac{1}{p^2-1} \right] \times \\
&\times \sin(\pi m x) \sin(\pi m y) dx dy = \\
&= -\frac{1}{\rho_1 C_1} \frac{1}{(\pi m)^2} \sin \left(\frac{\pi z}{w_1} \right) \times \begin{cases} 9 + \cos \left(\frac{\pi z}{2w_1} \right) \frac{1}{4} \frac{1}{p^2-1}, & m = 1 \\ 1, & m = 2k \\ 9, & m = 2k + 1 \end{cases} \quad (35)
\end{aligned}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Отсюда найдем формулы для неизвестных коэффициентов $A_n^1(p, z)$

$$A_n^1 = - \left[\frac{1}{4} R_1 \right]^{-1} \times \frac{1}{\rho_1 C_1} \frac{1}{(\pi n)^2} \sin \left(\frac{\pi z}{w_1} \right) \times \begin{cases} 9 + \cos \left(\frac{\pi z}{2w_1} \right) \frac{1}{4} \frac{1}{p^2-1}, & n = 1 \\ 1, & n = 2k \\ 9, & n = 2k + 1 \end{cases}. \quad (36)$$

Вторую из формул (31) путем деления обеих частей на $\bar{F}_1^2 F_2^2$ приведем к виду

$$\frac{a^2}{\bar{F}_1^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{F}_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}_1^2}{\partial y^2} \right) - p = -\frac{a^2}{F_2^2} \frac{d^2 F_2^2}{dz^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_2 [g] &= \frac{a^2}{\sin(\pi n x) \sin(\pi n y)} \left[(\pi n)^2 (-\sin(\pi n x) \sin(\pi n y) - \sin(\pi n x) \sin(\pi n y)) \right] - p = \\ &= -2a^2 (\pi n)^2 - p. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения (19)–(36), найдем

$$\begin{aligned} B_{nm}^2 &= \iint_{(S)} L_2 [g_n(x, y)] g_n(x, y) dS = \\ &= \left[-2a^2 (\pi n)^2 - p \right] \int_0^1 \sin(\pi m x) dx \int_0^1 \sin(\pi m y) dy = \\ &= \left[-2a^2 (\pi n)^2 - p \right] \times \begin{cases} \frac{4}{(\pi m)^2}, & m = 2k - 1 \\ 0, & m = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $k = 1, 2, 3\dots$

$$\begin{aligned} C_m^2 &= \iint_{(S)} \frac{a^2}{F_2^2} \frac{d^2 F_2^2}{dz^2} \sin(\pi m x) \sin(\pi m y) dxdy = \\ &= \frac{2a^2}{F_2^2} \times \begin{cases} \frac{4}{(\pi m)^2}, & m = 2k - 1 \\ 0, & m = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $L_2 [g_n(x, y)]$ и $g_n(x, y)$ не образуют взаимно ортогональной системы функций на прямоугольнике S , для определения коэффициентов $A_n^2(z, p)$ получим систему N линейных алгебраических уравнений, которая, как известно, имеет единственное решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{11}A_1 + B_{12}A_2 + B_{13}A_3 + \dots + B_{1N}A_N = C_1 \\ B_{31}A_1 + B_{32}A_2 + B_{33}A_3 + \dots + B_{3N}A_N = C_3 \\ B_{51}A_1 + B_{52}A_2 + B_{53}A_3 + \dots + B_{5N}A_N = C_5 \\ \dots \\ B_{N1}A_1 + B_{N2}A_2 + B_{N3}A_3 + \dots + B_{NN}A_N = C_N. \end{array} \right. \quad (37)$$

Таким образом, приближенное решение задачи (31), (18)–(28) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\bar{T}^1(x, y, z, p) &= \sum_{n=1}^N A_n^1(z, p) g_n(x, y) = \\
&= - \sum_{n=1}^N g_n(x, y) \left[\frac{1}{4} R_1 \right]^{-1} \frac{1}{\rho_1 C_1} \frac{1}{(\pi n)^2} \sin \left(\frac{\pi z}{w_1} \right) \times \begin{cases} 9 + \cos \left(\frac{\pi z}{2w_1} \right) \frac{1}{4} \frac{1}{p^2-1}, & n = 1 \\ 1, & n = 2k \\ 9, & n = 2k+1 \end{cases} \\
\bar{T}^2(x, y, z, p) &= \sum_{n=1}^N A_n^2(z, p) g_n(x, y) = \\
&= \sum_{n=1}^N g_n(x, y) \frac{2a^2}{F_2^2} \left[-2a^2 (\pi n)^2 - p \right]^{-1} \times \begin{cases} 1, & m = 2k-1 \\ 0, & m = 2k. \end{cases} \tag{38}
\end{aligned}$$

Здесь $F_2^2(z)$ задается формулами (19)–(30), $g_n(x, y)$ задается формулой (32), R_1 задается формулой (20), A_n^1 задается формулой (36), A_n^2 находится из системы (37).

Таким образом, ряды (38) представляют собой решение задачи (23)–(25) в изображениях. Для обратного перехода к оригиналам можно воспользоваться одним из справочников по преобразованию Лапласа, например [12], [13], [14].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Авдуевский В. С., Галицкий Б. М., Глебов Г. А. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
- [2] Иванов В. Л., Леонтьев А. И., Манушин Э. А., Осипов М. И. Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок: учебник для вузов. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 592 с.
- [3] Марченко В. М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 298 с.
- [4] Поварницын М. С. Исследование температурного поля в трехслойной пластине с сотовым заполнителем при несимметричном нагреве // Инженерно-физический журнал. 1961. № 10. Т. 4. С. 64–70.
- [5] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Влияние формы и расположения армирующих элементов на тепловые свойства композитов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 3–24.
- [6] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Теплопроводность пакета полиармированных слоев // Вестник КемГУ. 2015. № 4 (64), т. 3. С. 177–183.
- [7] Коляно Ю. М., Ломакин В. А., Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
- [8] Картапов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
- [9] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: в 2 т. Т. 2: Температурное поле. М.: ГИФМЛ, 1959. 620 с.
- [10] Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967. 213 с.

- [11] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 512 с.
- [12] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
- [13] Егер Д., Карслу Х. Операционные методы в прикладной математике. М.: Издательство иностранной литературы, 1948. 290 с.
- [14] Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.: Государственное издательство технико-технической литературы, 1951. 255 с.

Yu. V. Nemirovskii¹, A. V. Stanislavovich²

THERMAL CONDUCTIVITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC PLATES

¹*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

Abstract. The paper presents mathematical model of heat conduction of multilayer plain wall. Each layer of plain wall which is under consideration is either isotropic material or fiber composite or dispersion-strengthened composite or honeycomb composite structure. Method for solving time-dependent heat conduction equation for multilayer plain wall is proposed in the article. Proposed method is based on reduction of unsteady-state problem to steady-state heat conduction equation using Laplace transformation. Then steady-state heat conduction problem is solved using Galerkin-Bubnov method.

Keywords: heat conduction, heat protection, honeycomb structures, fiber composites, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] Avduevskij V. S., Galicejskij B. M., Glebov G. A. Osnovy teploperedachi v aviacionnoj i raketno-kosmicheskoy tehnike. 2-e izd. M.: Mashinostroenie, 1992. 528 s. (in Russian).
- [2] Ivanov V. L., Leont'ev A. I., Manushin Je. A., Osipov M. I. Teploobmennye apparaty i sistemy ohlazhdelenija gazoturbinnyy i kombinirovannyh ustavok: uchebnik dlja vuzov. 2-e izd., stereotip. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2004. 592 s. (in Russian).
- [3] Marchenko V. M. Temperaturnye polja i naprjazhenija v konstrukcijah letatel'nyh apparatov. M.: Mashinostroenie, 1965. 298 s. (in Russian).
- [4] Povarnicyn M. S. Issledovanie temperaturnogo polja v trehslojnoj plastine s sotovym zapolnitelem pri nesimmetrichnom nagreve // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1961. № 10. T. 4. S. 64–70. (in Russian).
- [5] Nemirovskij Ju. V., Stanislavovich A. V. Vlijanie formy i raspolozhenija armirujushhih jelementov na teplovye svojstva kompozitov // Vestnik Chuvashskogo

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Associate at Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

Stanislavovich Alexey Viacheslavovich, Leading specialist at Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 4 (26). S. 3–24. (in Russian).

[6] Nemirovskij Ju. V., Stanislavovich A. V. Teploprovodnost' paketa poliarmirovannyh sloev // Vestnik KemGU. 2015. № 4 (64), t. 3. S. 177–183. (in Russian).

[7] Koljano Ju. M., Lomakin V. A., Podstrigach Ja. S. Termouprugost' tel neodnorodnoj struktury. M.: Nauka, 1984. 368 s. (in Russian).

[8] Kartashov Je. M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel. M.: Vysshaja shkola, 2001. 550 s. (in Russian).

[9] Berezin I. S., Zhidkov N. P. Metody vychislenij: v 2 t. T. 2. temperaturnoe pole. M.: GIFML, 1959. 620 s. (in Russian).

[10] Rvachev V. L. Geometricheskie prilozhenija algebry logiki. Kiev: Tehnika, 1967. 213 s. (in Russian).

[11] Mihlin S. G. Variacionnye metody v matematicheskoy fizike. 2-e izd. M.: Nauka, 1970. 512 s. (in Russian).

[12] Dech G. Rukovodstvo k prakticheskому primeneniju preobrazovanija Laplasa i Z-preobrazovanija. M.: Nauka, 1971. 288 s. (in Russian).

[13] Eger D., Karslou H. Operacionnye metody v prikladnoj matematike. M.: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1948. 290 s. (in Russian).

[14] Ditkin V. A., Kuznecov P. I. Spravochnik po operacionnomu ischisleniju. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-tehnicheskoy literatury, 1951. 255 s. (in Russian).