Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 69–78

Т. Ю. Леонтьева

ТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Нелинейные дифференциальные уравнения характеризуются наличием подвижных особых точек, для определения координат которых необходим определенный математический аппарат. И эта задача является составной для метода приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. В последнее время эти задачи рассматривались для ряда классов нелинейных дифференциальных уравнений. Результаты данной работы расширяют этот класс нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, подвижная особая точка, приближенное решение, возмущение подвижной особой точки, точные критерии существования решения.

УДК: 517.925.7

Введение. Подвижные особые точки нелинейных дифференциальных уравнений невозможно определить классическими методами решения, используемыми для линейных дифференциальных уравнений. Этот факт ставит задачу разработки новых методов приближенного решения таких уравнений. На данный момент в работах [1]–[7] предлагается приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, в которых одной из задач является нахождение подвижной особой точки с заданной точностью. Решение этой задачи связано с точными критериями существования подвижных особых точек, которые представляют собой необходимые и достаточные условия и классифицируются на точечные и интервальные критерии. Наибольший интерес в практическом приложении представляют интервальные критерии существования подвижных особых точек, а точечные позволяют лишь констатировать факт их существования.

Леонтьева Татьяна Юрьевна
`e-mail:` betty2784@mail.ru, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 11.12.2016

В данной работе представлены как точные, так и интервальные критерии для рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений.

Результаты. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\begin{gathered} y''(x) = a_0(x)\,y^5(x) + a_1(x)\,y^4(x) + a_2(x)\,y^3(x) + \\ + a_3(x)\,y^2(x) + a_4(x)\,y(x) + a_5(x) \end{gathered}, \tag{1}$$

где a_i, $i = 0, 1, ..., 5$ аналитические функции в рассматриваемой области. С помощью замены переменной

$$y(x) = \frac{v(x)}{\sqrt[4]{a_0(x)}} - \frac{a_1(x)}{5a_0(x)}$$

при условии:

$$\frac{a_1(x)}{5a_0(x)} = \frac{a_2(x)}{2a_1(x)} = \frac{a_3(x)}{a_2(x)} = \frac{2\left(a_4(x) + \dfrac{a_0''(x)}{4a_0(x)} - \dfrac{5}{16}\left(\dfrac{a_0''(x)}{a_0(x)}\right)^2\right)}{a_3(x)}$$

уравнение (1) приводится к нормальному виду:

$$v''(x) = v^5(x) + r(x),$$

где

$$\begin{gathered} r(x) = -\frac{a_1^5(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{5^5 a_0^4(x)} - \frac{3a_0''(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{20a_0^2(x)} + a_5(x)\sqrt[4]{a_0(x)} + \\ + \frac{a_1''(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0(x)} - \frac{2a_0'(x)\,a_1'(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0^2(x)} + \frac{2\left(a_0'(x)\right)^2 a_1(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0^3(x)} - \\ - \frac{\left(a_0''(x)\right)^2 a_1(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{16a_0^3(x)} + \frac{a_0'(x)}{2a_0(x)}u'(x) \end{gathered}$$

в каждой области, в которой $a_0(x) \neq 0$ [8].

Рассмотрим задачу Коши:

$$y''(x) = y^5(x) + r(x), \tag{2}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1. \tag{3}$$

С помощью замены

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \frac{1}{u^2(\mathrm{x})} \tag{4}$$

получим задачу Коши

$$2u''(\mathrm{x})\,u^7(\mathrm{x}) = 6\left(u'(\mathrm{x})\right)^2 u^6(\mathrm{x}) - 1 - r(\mathrm{x}) \cdot u^{10}(\mathrm{x}), \tag{5}$$

$$u(\mathrm{x}_0) = u_0, \quad u'(\mathrm{x}_0) = u_1. \tag{6}$$

Для оптимизации алгоритма нахождения решения исследуемого уравнения, как и для классов уравнений, рассмотренных в работах [1]–[7], используется связь локальных экстремумов исходного и интервального уравнений.

Теорема 1. Пусть $\mathrm{y}(x)$ *– решение задачи (2)–(3) и* $u(x)$ *– решение задачи Коши (4), (7) непрерывны на отрезке* $[a;\,b]$.

Для того чтобы решение задачи (2)–(3) $\mathrm{y}(x)$ *имело в точке* $\mathrm{c}\in(a,b)$ *локальный максимум (минимум),* $\mathrm{y}(\mathrm{c})=const>0$ $(\mathrm{y}(\mathrm{c})=const<0)$*, необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (4), (7),* $u(x)$ *в этой точке имело локальный минимум (максимум).*

В основе доказательства лежит классический подход, основанный на необходимых и достаточных условиях существования локального экстремума.

Для определения положения в ходе решения нелинейного дифференциального уравнения может быть использовано необходимое условие попадания в окрестность подвижной особой точки.

Теорема 2 (необходимое условие существования подвижной особой точки). *Пусть функция* $\mathrm{y}(x)$ *является решением задачи Коши (2)–(3) и определена на промежутке* $[\mathrm{x}_0;\mathrm{x}^*)$*, где* x^* *− подвижная особая точка данной функции, причем* $\mathrm{x}^*>\mathrm{x}_0$*. Тогда существует такая окрестность* $[\mathrm{a};\mathrm{x}^*)$ *точки* x^**, в которой* $\mathrm{y}(x)>0,\ \mathrm{y}'(x)>0,\ \mathrm{y}''(x)>0$, $(\mathrm{y}(x)<0,\ \mathrm{y}'(x)<0,\ \mathrm{y}''(x)<0\,)$.

Доказательство. Решение функции $\mathrm{y}(x)$ в окрестности подвижной особой точки (слева) в соответствии с [10] представимо в виде:

$$\mathrm{y}(x)=(x^*-x)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\,(x^*-x)^{n/2}\,, \tag{7}$$

где $\mathrm{C}_0=\sqrt[4]{3/4}$, $\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_2=\mathrm{C}_3=\mathrm{C}_4=\mathrm{C}_8=0$.

На основании теоремы существования [10] имеется точка $\mathrm{x}_1\in[\mathrm{x}_0;x^*)$, что правильная часть ряда (8) сходится в области $[\mathrm{x}_1;x^*)$. Ряд (8) разобьем на главную и правильную части:

$$\begin{gathered}\mathrm{y}(x)=\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{(x^*-x)}}+\mathrm{C}_5\,(x^*-x)^2+\\+\mathrm{C}_6\,(x^*-x)^{5/2}+\mathrm{C}_7\,(x^*-x)^3+\mathrm{C}_9\,(x^*-x)^4+\ldots\,.\end{gathered} \tag{8}$$

Дифференцируя (9) по x, получаем:

$$\begin{gathered}\mathrm{y}'(x)=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\frac{1}{2\sqrt{(x^*-x)^3}}-2\mathrm{C}_5\,(x^*-x)-\\-\tfrac{5}{2}\mathrm{C}_6\,(x^*-x)^{3/2}-3\mathrm{C}_7\,(x^*-x)^2-4\mathrm{C}_9\,(x^*-x)^3-\ldots\,.\end{gathered} \tag{9}$$

Введем обозначение

$$\mathrm{y}'(x)=g_1(x)+h_1(x)\,,$$

где

$$g_1(x) = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \frac{1}{2\sqrt{(x^* - x)^3}} \;\; ,$$

$$h_1(x) = -2\mathrm{C}_5(x^* - x) - \frac{5}{2}\mathrm{C}_6(x^* - x)^{3/2} - 3\mathrm{C}_7(x^* - x)^2 - 4\mathrm{C}_9(x^* - x)^3 - \dots .$$

Так как $g_1(x) \to +\infty$ и $h_1(x) \to 0$ при $x \to \mathrm{x}^* - 0$, то существует такая точка x^*, удовлетворяющая условию $x_2 \geq \mathrm{x}_1, \quad \forall x \in [\mathrm{x}_2; x^*)$, что будет верно неравенство:

$$g_1(x) > h_1(x),$$

следовательно, $\mathrm{y}'(x) > 0$.

Дифференцируя дважды (9) по x, получаем:

$$\begin{gathered}\mathrm{y}''(x) = \sqrt[4]{\left(\tfrac{3}{4}\right)^5} \Big/ \sqrt{(\mathrm{x}^* - \mathrm{x})^5} + 2\mathrm{C}_5 + \tfrac{15}{4}\mathrm{C}_6(\mathrm{x}^* - \mathrm{x})^{1/2} + \\ +6\mathrm{C}_7(\mathrm{x}^* - \mathrm{x}) + 12\mathrm{C}_9(\mathrm{x}^* - \mathrm{x})^2 + \dots .\end{gathered} \tag{10}$$

Представим вторую производную в виде:

$$\mathrm{y}''(x) = g_2(x) + h_2(x),$$

где

$$g_2(x) = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^5} \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{x}^* - \mathrm{x})^5}},$$

$$h_2(x) = 2\mathrm{C}_5 + \frac{15}{4}\mathrm{C}_6(\mathrm{x}^* - \mathrm{x})^{1/2} + 6\mathrm{C}_7(\mathrm{x}^* - \mathrm{x}) + 12\mathrm{C}_9(\mathrm{x}^* - \mathrm{x})^2 + \dots .$$

Так как $g_2(x) \to +\infty$ и $h_2(x) \to 2\mathrm{C}_5$ при $x \to \mathrm{x}^* - 0$, то существует такая точка x^*, что $x_3 \geq \mathrm{x}_1 \quad \forall x \in [\mathrm{x}_3; x^*)$ будет верно неравенство:

$$g_2(x) > h_2(x).$$

Таким образом, $\mathrm{y}''(x) > 0$. Что и доказывает теорему.

Аналогичным образом доказывается и второй случай теоремы.

Теорема 3 (точечный критерий существования подвижной особой точки). *Пусть* $\mathrm{y}(x)$ *решение задачи (2)–(3). Для того чтобы* x^**являлась подвижной особой точкой решения* $\mathrm{y}(x)$*, необходимо и достаточно, чтобы функция* $u(x)$ *решения задачи Коши (6)–(7) являлась аналитической и удовлетворяла следующим условиям:*

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = -\sqrt{3}. \tag{11}$$

Доказательство I (*необходимость*). По условию теоремы с учетом замены переменной (4) выражение $u(x)$ будет иметь вид:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n (x^* - x)^{n+1}. \tag{12}$$

x^* является нулем функции $u(x)$, что следует из замены переменной (4).

Учитывая, что $u(x^*) = 0$, на основании обращения рядов [11] следует, что

$$(x^* - x)^{1/2} = \mathrm{B}_1 u + \mathrm{B}_2 u^2 + \mathrm{B}_3 u^3 + \mathrm{B}_4 u^4 + \dots\,, \tag{13}$$

где

$$\mathrm{B}_1 = C_0 = \sqrt[4]{3/4}, \tag{14}$$

а все последующие коэффициенты определяются по рекуррентному соотношению.

Соотношение (15) представляет собой аналитическое выражение голоморфной функции $u(x)$ в некоторой окрестности $(0; \mathrm{x}^*)$.

$$x^* - x = \mathrm{B}_1^2 u^2 + \tilde{\mathrm{B}}_2 u^3 + \tilde{\mathrm{B}}_3 u^4 + \tilde{\mathrm{B}}_4 u^5 + \dots \tag{15}$$

Дифференцируем (15) по u, получаем

$$-x' = 2\mathrm{B}_1^2 u + 3\tilde{\mathrm{B}}_2 u^2 + 4\tilde{\mathrm{B}}_3 u^3 + 5\tilde{\mathrm{B}}_4 u^4 + \dots$$

$$-x'' = 2\mathrm{B}_1^2 + 6\tilde{\mathrm{B}}_2 u + 12\tilde{\mathrm{B}}_3 u^2 + 20\tilde{\mathrm{B}}_4 u^3 + \dots\,.$$

При $u = 0$ находим $x'(0) = 0, x''(0) = -2B_1^2 = -\sqrt{3}$. Что и требовалось доказать.

Доказательство II (*достаточность*). Докажем, что $\mathrm{y}(x)$ имеет особую точку алгебраического типа.

По условию теоремы 3 имеем:

$$x(u) = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 u + \mathrm{B}_2 u^2 + \mathrm{B}_3 u^3 + \mathrm{B}_4 u^4 + \dots\,. \tag{16}$$

Обозначим B_0 через x^* и, по аналогии с (15), определяем

$$x' = \mathrm{B}_1 + 2\mathrm{B}_2 u + 3\mathrm{B}_3 u^2 + 4\mathrm{B}_4 u^3 + \dots$$

$$x'' = 2\mathrm{B}_2 + 6\mathrm{B}_3 u + 12\mathrm{B}_4 u^2 + \dots\,.$$

По условию теоремы из (12), (18) и последнего соотношения находим:

$$\mathrm{B}_1 = 0,\ \mathrm{B}_2 = -\sqrt{3}\Big/2.$$

Тогда (18) принимает вид:

$$x(u) = x^* - \sqrt{3}\Big/2u^2 + \tilde{\mathrm{B}}_3 u^3 + \tilde{\mathrm{B}}_4 u^4 + \dots,$$

или

$$x^* - x = \sqrt{3}\Big/2u^2 - \tilde{\mathrm{B}}_3 u^3 - \tilde{\mathrm{B}}_4 u^4 - \dots\,.$$

На основании обращения рядов [12] следует, что

$$u(x) = D_1 (x^* - x)^{1/2} + D_2 (x^* - x) + D_3 (x^* - x)^{3/2} + \dots\,,$$

где $D_1 = \left(2/\sqrt{3}\right)^{1/2} = \sqrt[4]{4/3}$.

Из последнего соотношения получим:

$$y(x) = 1/u(x) = 1/D_1 (x^* - x)^{-1/2} + \tilde{D}_2 (x^* - x)^0 + \tilde{D}_3 (x^* - x)^{1/2} + \dots\,.$$

Данное разложение представимо в следующем виде:

$$y(x) = C_0 (x^* - x)^{-1/2} + C_1 (x^* - x)^0 + C_2 (x^* - x)^{1/2} + C_3 (x^* - x) + ...,$$

т. е.

$$y(x) = (x - x^*)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2},$$

где $C_0 = \sqrt[4]{3/4}$.

Таким образом, учитывая теорему существования [8], имеем: x^* – является подвижной особой точкой решения задачи (2)–(3). Что и доказывает теорему.

Следующая теорема, представляющая собой интервальный критерий существования подвижных особых точек, дает возможность построения алгоритма для нахождения координат подвижных особых точек с заданной точностью.

Теорема 4 (интервальный критерий существования подвижной особой точки). *Пусть* $y(x)$ *– решение задачи (2)–(3),* x^* *будет являться подвижной особой точкой решения* $y(x)$ *тогда и только тогда, когда существует отрезок* $[x_1; x_2], x^* \in [x_1; x_2]$*, на котором функция* $u(x)$ *решение задачи Коши (4), (7) является непрерывной, аналитической и выполняется условие:* $u(x_1) \cdot u(x_2) < 0$.

Доказательство I (*необходимость*). Так как x^* является подвижной особой точкой решения $y(x)$, которая имеет структуру (8) с соответствующими значениями параметров этого выражения.

Далее рассмотрим замену

$$u(x) = \frac{1}{y^2(x)}. \tag{17}$$

Последнее выражение позволяет утверждать, что x^* переходит в класс регулярных точек для $u(x)$. Далее

$$1/u(x) = y^2(x) = (x^* - x)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2} \right)^2, \tag{18}$$

из которого выразим $u(x)$

$$u(x) = (x^* - x) \bigg/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2} \right)^2. \tag{19}$$

Исходя из структуры выражения (19), следует существование отрезка $[x_1; x_2]$, для которого будет выполняться условие $u(x_1) \cdot u(x_2) < 0$.

Доказательство II (*достаточность*). По условию теоремы функция $u(x)$ – решение задачи Коши (4), (7) является непрерывной, аналитической и выполняется условие: $u(x_1) \cdot u(x_2) < 0$ на отрезке $u(x) \in [x_1; x_2]$. Следовательно, функцию $u(x)$ на указанном интервале можно представить в виде:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n (x^* - x)^{n+1}, \tag{20}$$

где значение коэффициента $D_0 = 2\sqrt{3}/3 \neq 0$ определяется из выражения (19) с учетом $C_0 = \sqrt[4]{3/4}$, значение которого было получено ранее [8].

Далее из выражений (19) и (20) получим

$$y(x) = \sqrt{1/u(x)} = 1 \Bigg/ \left((x^* - x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} D_n (x^* - x)^{n-1} \right)^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{(x^* - x) \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} D_n (x^* - x)^{n-1} \right)^{1/2}}.$$

Из полученного выражения можно сделать вывод о существовании подвижной особой точки функции $\mathrm{y}(x)$ на некотором интервале $x_3^* : \mathrm{x}_3^* \in [x_1; x_2]$.

На основе данной теории составлена программа для определения координат подвижной особой точки и исследования влияния на них возмущений начальных условий и получено авторское право [13]. Результаты представлены в следующих таблицах:

Таблица 1. При $\mathrm{x}_0 = 0$ и $y_0 = 1$

y_1	0,1	0,3	0,5	1	1,5
x*	1,125	0,992	0,8965	0,7397	0,64

Таблица 2. При $\mathrm{x}_0 = 0,5$ и $y_0 = 1$

y_1	0	0,5	1	1,5	2
x*	1,71	1,396	1,24	1,15	1,07

Таблица 3. При $\mathrm{x}_0 = 0,5$ и $y_0 = 0,5$

y_1	0	0,3	0,5	1	2
x*	3,87	2,998	2,18	1,686	1,31

Резюме. В статье представлены формулировка и доказательство теорем, отражающих необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек, которые являются ключевым моментом в алгоритме программы нахождения подвижных особых точек. Также приведены результаты работы вышеуказанной программы в зависимости от изменения начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.

[2] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4 (35). С. 102–108.

[3] Орлов В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник МАИ. 2008. Т. 15, № 5. С. 128–135.

[4] Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 399–405.

[5] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати // Вестник Самарского ГУ. Естественно научная серия. 2006. № 6/1 (46). С. 64–69.

[6] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве // Известия Тульского ГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: Изд-во Тул. ГУ, 2006. С. 26–29.

[7] Редкозубов С. А., Орлов В. Н. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля // Известия института инженерной физики. 2009. № 4 (16). С. 12–14.

[8] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий: международная научно-практическая конференция. Чебоксары. 2013. С. 47–52.

[9] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Влияние возмущения начальных данных на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3 (19). С. 103–109.

[10] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки, 2015. № 2 (59). С. 26–37.

[11] Леонтьева Т. Ю. Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 109–118.

[12] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2 изд. М.; Л.: Гос. изд.-во технико-теоретической литературы. 1950. 436 с.

[13] Программа ONDEL1.4,2.4,2.5-SF / С. А. Иванов, В. Н. Орлов, М. П. Гузь, Т. Ю. Леонтьева // ФИПС: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016617252. 29.06.2016.

T. Yu. Leonteva

THE EXACT CRITERIA FOR THE EXISTENCE OF MOVABLE SINGULAR POINTS OF SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The nonlinearity of the differential equation is manifested in the appearance of movable singular points, to find which requires a certain mathematical apparatus. And this task is part of a method for the approximate solution of nonlinear differential equations with movable singularities. Recently these tasks were considered for several classes of nonlinear differential equations. The results of this work extend the class of nonlinear differential equations with movable singularities.

Keywords: nonlinear differential equation of the second order, a movable singular point, approximate solution, perturbation of the movable singular point, the exact criteria for the existence of the solution.

REFERENCES

[1] Orlov V. N. O priblizhennom reshenii pervogo uravnenija Penleve // Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva. 2008. № 2. S. 42–46. (in Russian).

[2] Orlov V. N. Issledovanie priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki // Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Serija: Estestvennye nauki. 2009. № 4 (35). S. 102–108. (in Russian).

[3] Orlov V. N. Ob odnom metode priblizhennogo reshenija matrichnyh differencial'nyh uravnenij Rikkati // Vestnik MAI. 2008. T. 15, № 5. S. 128–135. (in Russian).

[4] Orlov V. N. Tochnye granicy dlja priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti priblizhennogo znachenija podvizhnoj osoboj tochki v kompleksnoj oblasti // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2010. № 2 (8). S. 399–405. (in Russian).

[5] Orlov V. N. Kriterii sushhestvovanija podvizhnyh osobyh tochek reshenij differencial'nyh uravnenij Rikkati // Vestnik Samarskogo GU. Estestvenno nauchnaja serija. 2006. № 6/1 (46). S. 64–69. (in Russian).

[6] Orlov V. N. Kriterii sushhestvovanija podvizhnyh osobyh tochek reshenij vtorogo uravnenija Penleve // Izvestija Tul'skogo GU. Serija Differencial'nye uravnenija i prikladnye zadachi. Vyp. 1. Tula: Izd-vo Tul. GU, 2006. S. 26–29. (in Russian).

[7] Redkozubov S. A., Orlov V. N. Tochnye kriterii sushhestvovanija podvizhnoj osoboj tochki differencial'nogo uravnenija Abelja // Izvestija instituta inzhenernoj fiziki. 2009. № 4 (16). S. 12–14. (in Russian).

[8] Orlov V. N., Leont'eva T. Ju. Postroenie priblizhennogo reshenija nelinejnogo differencial'nogo uravnenija v oblasti analitichnosti // Fundamental'nye i prikladnye problemy mehaniki deformiruemogo tverdogo tela, matematicheskogo modelirovanija i informacionnyh tehnologij: mezhdunarodnaja nauchno-prakticheskaja konferencija. Cheboksary. 2013. S. 47–52. (in Russian).

Leont'eva, Tat'jana Jur'evna, Postgraduate Student, Department of Mathematical analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[9] Orlov V. N., Leont'eva T. Ju. Vlijanie vozmushhenija nachal'nyh dannyh na priblizhennoe reshenie odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka v oblasti analitichnosti // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 3 (19). S. 103–109. (in Russian).

[10] Orlov V. N., Leont'eva T. Ju. Postroenie priblizhennogo reshenija odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki // Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Serija: Estestvennye nauki, 2015. № 2 (59). S. 26–37. (in Russian).

[11] Leont'eva T. Ju. Vlijanie vozmushhenija podvizhnoj osoboj tochki na priblizhennoe reshenie odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka v kompleksnoj oblasti // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 2 (24). S. 109–118. (in Russian).

[12] Golubev V. V. Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij. 2 izd. M. ; L.: Gos. izd.-vo tehniko-teoreticheskoj literatury. 1950. 436 s. (in Russian).

[13] Programma ONDEL1.4,2.4,2.5-SF / C. A. Ivanov, V. N. Orlov, M. P. Guz', T. Ju. Leont'eva // FIPS: Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlja JeVM № 2016617252. 29.06.2016. (in Russian).