Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 86–95

А. Д. Чернышов

О СОГЛАСОВАНИИ НАЧАЛЬНЫХ, ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЕЙ С ТЕМПЕРАТУРНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Аннотация. Приводятся примеры согласования начальных, граничных условий и дифференциальных уравнений для различных математических моделей. Обсуждается необходимость выполнения этих условий при постановке начально-краевых задач для последующего их решения. Невыполнение этих условий приводит к разрывным решениям и существенной погрешности.

Ключевые слова: граничные условия, начальные условия, дифференциальные уравнения, теплопроводность, упругость.

УДК: 517.518.454

Введение. Вопросу согласования начальных, граничных условий и дифференциальных уравнений в научной литературе отводится слишком мало места. Редко встречаются работы, где эти условия выполнены. Так, в [1] при решении задачи об изгибе упругой консоли автор ничего не пишет об этом, но интуитивно эти условия выполняет. Можно отметить и другие работы [2], [3], [4], [5], где условия совместности выполнены. Тем не менее, часто при решении краевых задач условия совместности не выполняются. Даже в широко известной учебной литературе [6], [7], [8] вопросы согласования не обсуждаются. Так, в [6] приводится точное решение задачи о тепловом ударе в полубесконечном стержне, где начальное и граничные условия не согласованы. Но это аналитическое решение, выраженное через интеграл ошибок, не существует при $t = 0$ и существует только в пределе при $t \to 0$. Численное решение подобной задачи при малых t будет существенно отличаться от данного точного из-за неограниченных градиентов при $t \to 0$ в окрестности точки разрыва – конца стержня.

В природе в большинстве случаев такие величины, как температура, прогибы, перемещения, деформации, напряжения и т.д., из физических соображений и основных концепций механики сплошных сред в некоторой рассматриваемой области являются непрерывными, гладкими и однозначными. Выполнение этих свойств приводит к некоторым дополнительным условиям, которым должны подчиняться начальные и граничные условия, приводимые ниже. Подобные дополнительные условия в дальнейшем будем называть условиями согласования, или просто согласованиями. Если хотя бы одно из таких условий не выполняется, то непрерывное решение задачи не существует, решение будет разрывным. Данная проблема возникает, если форма границы негладкая, имеет угловые точки и граничные условия заданы кусочно. Проблема согласований имеет место не только при построении решения в аналитическом виде, но и при использовании численных методов, так как при составлении выражения для производной, например, в разностной форме $\partial U/\partial x \approx \Delta U/\Delta x$, при малом

Поступила 14.09.2014

сеточном шаге Δx приращение ΔU должно быть тоже малым. В точке разрыва приращение ΔU может оказаться конечным, а при подходе к точке разрыва значение U зависит от направления подхода. Тогда погрешность вычислений резко возрастет, что влияет на всю вычислительную процедуру в целом. Выкалывание точки разрыва не поможет, так как конечность приращения ΔU на малом шаге Δx так и останется, да и физически подобное решение неприемлемо. В любом случае увидеть недостаток полученного решения можно с помощью проверки выполнения начальных, граничных условий и дифференциальных уравнений, что принято называть невязками.

Алгоритм получения согласований опирается на следующие два положения.

Положение 1. Функции, для которых ставятся граничные и начальные условия и которые должны удовлетворять некоторой системе дифференциальных уравнений, являются однозначными в каждой точке области Ω и ее границы Γ, включая ребра, вершины и угловые точки этой границы.

Положение 2. Эти функции вместе с граничными и начальными условиями должны быть непрерывными, достаточно гладкими и при подходе к угловым точкам допускать дифференцирование по касательным к Γ направлениям нужное число раз в зависимости от конкретного случая.

Во всех примерах ниже при получении условий согласования будем использовать эти два положения. Необходимость выполнения дополнительных условий согласования покажем на простейших примерах уравнений механики сплошных сред.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Теплопроводность

Рассмотрим задачу теплопроводности для прямоугольной области Ω:

$$\begin{gathered} U_{x\,x}+U_{y\,y}+k_1U_x+k_2U_y+k_3U+q\,(x,y)=0\ , \\ \Omega=(0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le b)\ \ ,\ U\,(x,y)\in C^{(2)}\,(\Omega)\ \ ,\ \ q\,(x,y)\in C\,(\Omega)\,. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Пусть на границах прямоугольника заданы условия первого рода:

$$U|_{x=0}=f_1\,(y)\ ,\ \ U|_{y=0}=f_2\,(x)\ ,\ \ U|_{x=a}=f_3\,(y)\ ,\ \ U|_{y=b}=f_4\,(x)\,,\ \ \ f_i\in C^{(2)}\,(\Omega)\,. \tag{1.2}$$

Будем строить гладкое решение задачи (1.1), (1.2). Требование непрерывности и единственности решения приводит к тому, что в углах прямоугольника должны выполняться дополнительные условия согласования: функции f_i из граничных условий должны быть не только гладкими, но и при подходе к угловым точкам по любой из двух сторон прямоугольника необходимо, чтобы значение температуры было одинаковым. Отсюда получаем следующие условия согласования граничных условий:

$$\text{в точке } (0,\,0)\ \ \Rightarrow\ f_1\,(0)=f_2\,(0)\,,\ \text{в точке } (a,\,0)\ \ \Rightarrow\ f_2\,(a)=f_3\,(0)\,,$$

$$\text{в точке } (a,\,b)\ \ \Rightarrow\ f_4\,(a)=f_3\,(b)\,,\ \text{в точке } (0,\,b)\ \ \Rightarrow\ f_4\,(0)=f_1\,(b)\,. \tag{1.3}$$

Кроме условий согласования (1.3) можно получить дополнительные условия согласования граничных условий (1.2) с дифференциальным уравнением (1.1) в угловых точках. Для этого в точке $(0,0)$ из (1.2) найдем частные производные:

$$[U_{x\,x}=f_2''\,(0)\ ,\ U_x=f_2'\,(0)\ ,\ U_{y\,y}=f_1''\,(0)\ ,\ U_y=f_1'\,(0)\ ,\ U=f_1\,(0)]\Big|_{\substack{x=0\\ y=0.}}$$

После подстановки этих выражений в дифференциальное уравнение (1) получим искомое согласование граничных условий с дифференциальным уравнением в угловой точке $(0,0)$:

$$f_2''(0) + f_1''(0) + k_1 f_2'(0) + k_2 f_1'(0) + k_3 f_1(0) + q(0,\,0) = 0. \tag{1.4}$$

Аналогично получим условия согласования в остальных трех угловых точках:

$$\begin{gathered}
\left[U_{x\,x} = f_2''(a)\ ,\ U_x = f_2'(a)\ ,\ U_{y\,y} = f_3''(0)\ ,\ U_y = f_3'(0)\ ,\ U = f_2(a)\right]\Big|_{\substack{x=a\\ y=0}}\ ,\\
f_2''(a) + f_3''(0) + k_1 f_2'(a) + k_2 f_3'(0) + k_3 f_2(a) + q(a,\,0) = 0,\\
\left[U_{x\,x} = f_4''(a)\ ,\ U_x = f_4'(a)\ ,\ U_{y\,y} = f_3''(b)\ ,\ U_y = f_3'(b)\ ,\ U = f_3(b)\right]\Big|_{\substack{x=a\\ y=b}}\ ,\\
f_4''(a) + f_3''(b) + k_1 f_4'(a) + k_2 f_3'(b) + k_3 f_3(b) + q(a,\,b) = 0,\\
\left[U_{x\,x} = f_4''(0)\ ,\ U_x = f_4'(0)\ ,\ U_{y\,y} = f_1''(b)\ ,\ U_y = f_1'(b)\ ,\ U = f_1(b)\right]\Big|_{\substack{x=0\\ y=b}}\ ,\\
f_4''(0) + f_1''(b) + k_1 f_4'(0) + k_2 f_1'(b) + k_3 f_1(b) + q(0,\,b) = 0.
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Таким образом, для получения гладкого решения задачи (1.1), (1.2) граничные условия 1-го рода для уравнения теплопроводности должны дополнительно удовлетворять восьми условиям согласования (1.3), (1.5) в угловых точках прямоугольника Ω. Невыполнение хотя бы одного из этих условий ведет к разрывному решению задачи.

Рассмотрим случай, когда заданы граничные условия второго рода:

$$\begin{gathered}
\left.\tfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = f_1(y)\quad ,\quad \left.\tfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = f_2(x)\quad ,\quad \left.\tfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=a} = f_3(y)\quad ,\\
\left.\tfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=b} = f_4(x)\quad ,\quad f_i \in C^{(2)}(\Omega)\quad ,\quad U \in C^{(3)}(\Omega)\,.
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Для получения условий согласования продифференцируем первое равенство из (1.6) по переменной y, а второе – по переменной x. В угловой точке $(0,0)$ получим равенство $f_1'(0) = f_2'(0)$. Отсюда получаем следующие условия согласования:

$$\text{в точке } (0,\,0)\ \Rightarrow\ f_1'(0) = f_2'(0)\,,\ \text{в точке } (a,\,0)\ \Rightarrow\ f_2'(a) = f_3'(0)\,,$$

$$\text{в точке } (a,\,b)\ \Rightarrow\ f_4'(a) = f_3'(b)\,,\ \text{в точке } (0,\,b)\ \Rightarrow\ f_4'(0) = f_1'(b)\,. \tag{1.7}$$

В данном случае при задании граничных условий второго рода (1.6) дополнительные условия их согласования с дифференциальным уравнением (1.1) в угловых точках не существуют.

Пусть заданы граничные условия третьего рода:

$$\begin{gathered}
\left.\tfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_1\left.\left(U - f_1(y)\right)\right|_{x=0}\ ,\ \left.\tfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_2\left.\left(U - f_2(x)\right)\right|_{y=0}\ ,\\
\left.\tfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=a} = \alpha_3\left.\left(U - f_3(y)\right)\right|_{x=a}\ ,\ \left.\tfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=b} = \alpha_4\left.\left(U - f_4(x)\right)\right|_{y=b},\\
f_i \in C^{(1)}(\Omega)\quad ,\quad U \in C^{(2)}(\Omega)\,.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Продифференцируем первое условие по переменной y, а второе – по x. В результате получим

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_{x=0,\,y=0} = \alpha_1\left.\left(\frac{\partial U}{\partial y} - f_1'(y)\right)\right|_{x=0,y=0} = \alpha_2\left.\left(\frac{\partial U}{\partial x} - f_2'(x)\right)\right|_{x=0,y=0}.$$

После исключения отсюда частных производных $\partial U/\partial x,\ \partial U/\partial y$ с помощью первого и второго условий найдем условие согласования в точке $(0,\,0)$:

$$\alpha_1\alpha_2\left(f_2(0) - f_1(0)\right) = \alpha_2 f_2'(0) - \alpha_1 f_1'(0)\,. \tag{1.9}$$

Аналогично могут быть получены условия согласования и в остальных угловых точках:

$$\begin{array}{ll}(x=a\,,\; y=0)\Rightarrow & \alpha_2\alpha_3\left(f_2\left(a\right)-f_3\left(0\right)\right)=\alpha_2 f_2'\left(a\right)-\alpha_3 f_3'\left(0\right),\\ (x=a\,,\; y=b)\Rightarrow & \alpha_4\alpha_3\left(f_3\left(b\right)-f_4\left(a\right)\right)=\alpha_3 f_3'\left(b\right)-\alpha_4 f_4'\left(a\right),\\ (x=0\,,\; y=b)\Rightarrow & \alpha_1\alpha_4\left(f_1\left(b\right)-f_4\left(0\right)\right)=\alpha_1 f_1'\left(b\right)-\alpha_4 f_4'\left(0\right).\end{array} \tag{1.10}$$

При задании граничных условий смешанного типа также можно записать условия согласования. Пусть на одной стороне угла $(0,0)$ заданы условия 1-го рода, а на другой – 2-го рода:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=f_1\left(y\right)\quad,\quad U|_{y=0}=f_2\left(x\right). \tag{1.11}$$

Тогда условия согласования будут иметь вид

$$f_1\left(0\right)=f_2'\left(0\right). \tag{1.12}$$

При задании условий 1-го рода на одной стороне угла и 3-го рода – на другой:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\alpha_1\left.\left(U-f_1\left(y\right)\right)\right|_{x=0}\;,\;\left.U\right|_{y=0}=f_2\left(x\right). \tag{1.13}$$

Условия согласования представляются равенствами типа

$$\alpha_1\left.\left(f_2\left(0\right)-f_1\left(0\right)\right)\right|_{x=0}=f_2'\left(0\right). \tag{1.14}$$

Если на одной стороне угла задать условия 2-го рода и на другой 3-го рода:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=f_1\left(y\right)\quad,\quad\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0}=\alpha_2\left.\left(U-f_2\left(x\right)\right)\right|_{y=0}, \tag{1.15}$$

то условия согласования можно записать выражениями типа

$$\alpha_2\left.\left(f_1\left(0\right)-f_2'\left(0\right)\right)\right|_{y=0}=f_1'\left(0\right). \tag{1.16}$$

Упругая пластина

Рассмотрим уравнение равновесия для прогиба W прямоугольной упругой пластины:

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)-S\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+kW=q\left(x,y\right). \tag{1.17}$$

На границах пластины зададим условия для четных производных:

$$\begin{array}{l} W|_{x=0}=f_1\left(y\right)\;,\;\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\phi_1\left(y\right)\;,\;W|_{y=0}=f_2\left(x\right)\;,\;\left.\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_{y=0}=\phi_2\left(x\right),\\ W|_{x=a}=f_3\left(y\right)\;,\;\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{x=a}=\phi_3\left(y\right)\;,\;W|_{y=b}=f_4\left(x\right)\;,\;\left.\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_{y=b}=\phi_4\left(x\right),\\ \qquad f_i\in C^{(4)}\left(\Omega\right)\quad,\quad\phi_3\in C^{(2)}\left(\Omega\right).\end{array} \tag{1.18}$$

Тогда в угловых точках условия согласования будут иметь вид:

$$\begin{array}{l}(0,0)\;\Rightarrow\;f_1\left(0\right)=f_2\left(0\right)\;,\;f_1''\;\left(0\right)=\phi_2\left(0\right)\;,\;f_2''\left(0\right)=\phi_1\left(0\right)\;,\;\phi_1''\left(0\right)=\phi_2''\left(0\right),\\ \;D\left[f_2^{IV}\left(0\right)+2\phi_1''\left(0\right)+f_1^{IV}\left(0\right)\right]-S\left[\phi_1\left(0\right)+\phi_2\left(0\right)\right]+kf_1\left(0\right)=q\left(0,0\right).\\ (a,0)\;\Rightarrow\;f_3\left(0\right)=f_2\left(0\right)\;,\;f_3''\left(0\right)=\phi_2\left(a\right)\;,\;f_2''\left(a\right)=\phi_3\left(0\right)\;,\;\phi_3''\left(0\right)=\phi_2''\left(a\right),\\ \;D\left[f_2^{IV}\left(a\right)+2\phi_3''\left(0\right)+f_1^{IV}\left(0\right)\right]-S\left[\phi_3\left(0\right)+\phi_2\left(a\right)\right]+kf_2\left(0\right)=q\left(a,0\right).\\ (a,b)\;\Rightarrow\;f_3\left(b\right)=f_4\left(a\right)\;,\;f_3''\left(b\right)=\phi_4\left(a\right)\;,\;f_4''\left(a\right)=\phi_3\left(b\right)\;,\;\phi_3''\left(b\right)=\phi_4''\left(a\right),\\ \;D\left[f_4^{IV}\left(a\right)+2\phi_3''\left(b\right)+f_3^{IV}\left(b\right)\right]-S\left[\phi_3\left(b\right)+\phi_4\left(a\right)\right]+kf_3\left(b\right)=q\left(a,b\right).\\ (0,b)\;\Rightarrow\;f_1\left(b\right)=f_4\left(0\right)\;,\;f_1''\left(b\right)=\phi_4\left(0\right)\;,\;f_4''\left(0\right)=\phi_1\left(b\right)\;,\;\phi_1''\left(b\right)=\phi_4''\left(0\right),\\ \;D\left[f_4^{IV}\left(0\right)+2\phi_1''\left(b\right)+f_1^{IV}\left(b\right)\right]-S\left[\phi_1\left(b\right)+\phi_4\left(0\right)\right]+kf_1\left(b\right)=q\left(0,b\right).\end{array} \tag{1.19}$$

Пусть на границах пластины заданы условия для прогиба и угла наклона:

$$\begin{gathered}
W|_{x=0} = f_1(y) \;\;,\;\; \frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{x=0} = \phi_1(y) \;\;,\;\; W|_{y=0} = f_2(x) \;\;,\;\; \frac{\partial W}{\partial y}\Big|_{y=0} = \phi_2(x)\,, \\
W|_{x=a} = f_3(y) \;\;,\;\; \frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{x=a} = \phi_3(y) \;\;,\;\; W|_{y=b} = f_4(x) \;\;,\;\; \frac{\partial W}{\partial y}\Big|_{y=b} = \phi_4(x)\,, \\
f_i \in C^{(1)}(\Omega) \;\;,\;\; \phi_3 \in C^{(1)}(\Omega)\,.
\end{gathered} \tag{1.20}$$

Условия согласования представляются выражениями:

$$\text{в точке } (0,0) \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} f_1(0) = f_2(0) \;\;,\;\; f_1'(0) = \phi_2(0) \;\;, \\ f_2'(0) = \phi_1(0) \;\;,\;\; \phi_1'(0) = \phi_2'(0)\,; \end{array}$$

$$\text{в точке } (a,0) \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} f_2(0) = f_1(a) \;\;,\;\; f_3'(0) = \phi_2(a) \;\;, \\ f_2'(a) = \phi_3(0) \;\;,\;\; \phi_3'(0) = \phi_2'(a)\,; \end{array}$$

$$\text{в точке } (a,b) \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} f_3(b) = f_4(a) \;\;,\;\; f_3'(b) = \phi_4(a) \;\;, \\ f_4'(a) = \phi_3(b) \;\;,\;\; \phi_3'(b) = \phi_4'(a)\,; \end{array}$$

$$\text{в точке } (0,b) \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} f_1(b) = f_4(0) \;\;,\;\; f_1'(b) = \phi_4(0) \;\;, \\ f_4'(0) = \phi_1(b) \;\;,\;\; \phi_1'(b) = \phi_4'(0)\,. \end{array} \tag{1.21}$$

В данном случае условия согласования с дифференциальным уравнением равновесия не существует, так как невозможно выразить смешанную производную $\partial^4 W / \partial x^2 \partial y^2$ в угловых точках из граничных условий. Аналогичным образом можно получить условия согласования для других комбинированных граничных условий.

Упругий прямоугольный брус

Запишем уравнения упругого равновесия Ламе для перемещений при плоской деформации:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\, U_{x\,x} + (\lambda + \mu)\, V_{x\,y} + \mu U_{y\,y} &= q_1(x,y)\,, \\
(\lambda + 2\mu)\, V_{y\,y} + (\lambda + \mu)\, U_{x\,y} + \mu V_{x\,x} &= q_2(x,y)\,.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Если граница имеет угловую точку $M_0(x_0, y_0)$, то при задании на Γ напряжений условия согласования получим из следующих рассмотрений. Обозначим через Γ_1, Γ_2 два участка границы, расположенные под углом $0 < \beta < \pi$. Введем единичные нормали и касательные векторы к Γ_1, Γ_2:

$$\nu_i(\nu_{ix}, \nu_{iy})\,, \tau_i(\tau_{ix}, \tau_{iy}) \;\;,\;\; (i = 1, 2)\,. \tag{1.23}$$

Зададим нормальные σ_n и касательные τ_n напряжения:

$$\sigma_n|_{\Gamma i} = F_i(M_{\Gamma i}) \;\;,\;\; \tau_n|_{\Gamma i} = \Phi_i(M_{\Gamma i}) \;\;,\;\; i = 1, 2. \tag{1.24}$$

Здесь $M_{\Gamma i}$ – точки на границах Γ_1, Γ_2. Представим условия (1.24) с помощью (1.23) в более явной форме через компоненты тензора напряжений в точке излома границы $M_0(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_n|_{\Gamma i} &= \sigma_{x\,x}\nu_{ix}^2 + 2\sigma_{x\,y}\nu_{ix}\nu_{iy} + \sigma_{y\,y}\nu_{iy}^2 = F_i(x_0, y_0) \;\;,\;\; i = 1, 2, \\
\tau_n|_{\Gamma i} &= \sigma_{x\,x}\nu_{ix}\tau_{ix} + \sigma_{x\,y}(\nu_{ix}\tau_{iy} + \nu_{iy}\tau_{ix}) + \sigma_{y\,y}\nu_{iy}\tau_{iy} = \Phi_i(x_0, y_0)\,.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Если из каких-нибудь трех уравнений системы (1.25) выразить три компоненты $\sigma_{x\,x}$, σ_{xy}, $\sigma_{y\,y}$ и подставить в четвертое уравнение, то получим искомое условие согласования как соотношение между четырьмя функциями F_i, Φ_i в точке излома границы $M_0(x_0, y_0)$, которое не будем выписывать явно из-за его громоздкости. В частном случае при $\beta = \pi/2$ условие согласования принимает простой вид:

$$\Phi_1(x_0, y_0) = \Phi_2(x_0, y_0)\,. \tag{1.26}$$

Пусть на границе Γ заданы условия для перемещений:

$$\begin{array}{c} U|_{x=0} = f_1(y) \quad , \quad V|_{x=0} = \phi_1(y) \quad , \quad U|_{y=0} = f_2(x) \quad , \quad V|_{y=0} = \phi_2(x) \, , \\ U|_{x=a} = f_3(y) \quad , \quad V|_{x=a} = \phi_3(y) \quad , \quad U|_{y=b} = f_4(x) \quad , \quad V|_{y=b} = \phi_4(x) \, , \\ f_i \in C^{(1)}(\Omega) \, , \, \phi_3 \in C^{(1)}(\Omega) \, . \end{array} \tag{1.27}$$

Условия согласования будут иметь вид:

$$\begin{array}{l} \text{в точке } (0,0) \ \Rightarrow \quad f_1(0) = f_2(0) \ \ , \ \ \phi_1(0) = \phi_2(0) \, , \\ \text{в точке } (a,0) \ \Rightarrow \ f_2(a) = f_3(0) \ \ , \ \ \phi_2(a) = \phi_3(0) \, , \\ \text{в точке } (a,b) \ \Rightarrow \ f_3(b) = f_4(a) \ \ , \ \ \phi_3(b) = \phi_4(a) \, , \\ \text{вточке } (0,b) \ \Rightarrow \ f_1(b) = f_4(0) \ \ , \ \ \phi_1(b) = \phi_4(0) \, . \end{array} \tag{1.28}$$

При задании на Γ напряжений

$$\begin{array}{c} \sigma_{xx}|_{x=0} = f_1(y) \ \ , \ \ \sigma_{xy}|_{x=0} = \phi_1(y) \ \ , \ \ \sigma_{yy}|_{y=0} = f_2(x) \ \ , \ \ \sigma_{xy}|_{y=0} = \phi_2(x) \ \ , \\ \sigma_{xx}|_{x=a} = f_3(y) \ \ , \ \ \sigma_{xy}|_{x=a} = \phi_3(y) \ \ , \ \ \sigma_{yy}|_{y=b} = f_4(x) \ \ , \ \ \sigma_{xy}|_{y=b} = \phi_4(x) \end{array}$$

из непрерывности σ_{xy} при подходе к углу с двух его сторон получим

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) \ \ , \ \ \phi_3(0) = \phi_2(a) \ \ , \ \ \phi_3(b) = \phi_4(a) \ \ , \ \ \phi_1(b) = \phi_4(0) \, . \tag{1.29}$$

Уравнения Навье-Стокса

На границах прямоугольника для уравнений Навье-Стокса могут быть заданы компоненты вектора скорости (U, V), т.е.

$$\begin{array}{c} U|_{x=0} = f_1(y) \quad , \quad V|_{x=0} = \phi_1(y) \quad , \quad U|_{y=0} = f_2(x) \quad , \quad V|_{y=0} = \phi_2(x) \, , \\ U|_{x=a} = f_3(y) \quad , \quad V|_{x=a} = \phi_3(y) \quad , \quad U|_{y=b} = f_4(x) \quad , \quad V|_{y=b} = \phi_4(x) \, , \\ f_i \in C^{(1)}(\Omega) \quad , \quad \phi_3 \in C^{(1)}(\Omega) \, . \end{array} \tag{1.30}$$

Из условия непрерывности вектора скорости найдем условия согласования:

$$\begin{array}{l} \text{в точке } (0,0) \ \Rightarrow \quad f_1(0) = f_2(0) \ \ , \ \ \phi_1(0) = \phi_2(0) \, , \\ \text{в точке } (a,0) \ \Rightarrow \ f_2(a) = f_3(0) \ \ , \ \ \phi_2(a) = \phi_3(0) \, , \\ \text{в точке } (a,b) \ \Rightarrow \ f_3(b) = f_4(a) \ \ , \ \ \phi_3(b) = \phi_4(a) \, , \\ \text{в точке } (0,b) \ \Rightarrow \ f_1(b) = f_4(0) \ \ , \ \ \phi_1(b) = \phi_4(0) \, . \end{array} \tag{1.31}$$

Если имеется свободная поверхность жидкости, то на ней задаются соответственные напряжения, например, нормальное напряжение равно атмосферному давлению, а касательное – нулю. На границах прямоугольника можно задать касательное и нормальное напряжения:

$$\begin{array}{c} \sigma_{xx}|_{x=0} = f_1(y) \ \ , \ \ \sigma_{xy}|_{x=0} = \phi_1(y) \ \ , \ \ \sigma_{yy}|_{y=0} = f_2(x) \ \ , \ \ \sigma_{xy}|_{y=0} = \phi_2(x) \ \ , \\ \sigma_{xx}|_{x=a} = f_3(y) \ \ , \ \ \sigma_{xy}|_{x=a} = \phi_3(y) \ \ , \ \ \sigma_{yy}|_{y=b} = f_4(x) \ \ , \ \ \sigma_{xy}|_{y=b} = \phi_4(x) \, . \end{array}$$

Условия совместности будут иметь вид:

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) \ \ , \ \ \phi_3(0) = \phi_2(a) \ \ , \ \ \phi_3(b) = \phi_4(a) \ \ , \ \ \phi_1(b) = \phi_4(0) \, . \tag{1.32}$$

2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Если время t считать дополнительным измерением, то получим, что в области “прямоугольник + время” при $t = 0$ всегда будем иметь угловую точку или ребро, где должны быть выполнены условия согласования начальных и граничных условий.

Нестационарная теплопроводность

Для нестационарного уравнения теплопроводности

$$\begin{array}{c} U_t = a_0 \left(U_{x\,x} + U_{y\,y} + k_1 U_x + k_2 U_y + k_3 U + q(t,x,y) \right) \ \ , \\ \Omega = (0 \le x \le a \ , \ 0 \le y \le b) \ \ , \ \ U(t,x,\,y) \in C^{(2)}(\Omega) \ \ , \\ q(t,x,y) \in C(\Omega) \quad , \quad t \ge 0 \end{array} \tag{2.1}$$

в граничные условия (1.2) всюду следует формально добавить переменную t, т.е. вместо (1.2) теперь будем иметь

$$\begin{gathered} U|_{x=0} = f_1(t,y) \quad , \quad U|_{y=0} = f_2(t,x) \quad , \quad U|_{x=a} = f_3(t,y) \quad , \\ U|_{y=b} = f_4(t,x) \quad , \quad f_i \in C^{(2)}(\Omega) \, . \end{gathered} \tag{2.2}$$

С добавлением переменной t условия согласования (1.3) принимают форму

$$(0,\,0) \;\Rightarrow\; f_1(t,0) = f_2(t,0) \quad , \quad (a,\,0) \;\Rightarrow\; f_2(t,a) = f_3(t,0) \, ,$$

$$(a,\,b) \;\Rightarrow\; f_4(t,a) = f_3(t,b) \quad , \quad (0,\,b) \;\Rightarrow\; f_4(t,0) = f_1(t,b) \, . \tag{2.3}$$

Граничные условия дополним начальным:

$$U(t,x,y)|_{t=0} = F(x,y) \, . \tag{2.4}$$

При задании граничных условий (2.2) кроме (1.3) дополнительно можно записать согласования начального (2.4) и граничных (2.2) условий:

$$\begin{gathered} F(x,y)|_{x=0} = f_1(t,y)|_{t=0} \quad , \quad F|_{y=0} = f_2(t,x)|_{t=0} \quad , \\ F|_{x=a} = f_3(t,y)|_{t=0} \quad , \quad F|_{y=b} = f_4(t,x)|_{t=0} \quad , \quad (F,\; f_i) \in C^{(2)}(\Omega) \, . \end{gathered} \tag{2.5}$$

Условия согласования с дифференциальным уравнением в угловых точках прямоугольника принимают вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_1(t,0)}{\partial t} = a_0 \left(\begin{array}{l} \left.\frac{\partial^2 f_2(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial^2 f_1(t,y)}{\partial y^2}\right|_{y=0} + k_1 \left.\frac{\partial f_2(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} + \\ + k_2 \left.\frac{\partial f_1(t,y)}{\partial y}\right|_{y=0} + k_3 f_1(t,0) + q(t,0,\,0) \end{array} \right), \\
\frac{\partial f_2(t,a)}{\partial t} = a_0 \left(\begin{array}{l} \left.\frac{\partial^2 f_2(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=a} + \left.\frac{\partial^2 f_3(t,y)}{\partial y^2}\right|_{y=0} + k_1 \left.\frac{\partial f_2(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a} + \\ + k_2 \left.\frac{\partial f_3(t,y)}{\partial y}\right|_{y=0} + k_3 f_3(t,0) + q(t,a,\,0) \end{array} \right), \\
\frac{\partial f_3(t,b)}{\partial t} = a_0 \left(\begin{array}{l} \left.\frac{\partial^2 f_4(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=a} + \left.\frac{\partial^2 f_3(t,y)}{\partial y^2}\right|_{y=b} + k_1 \left.\frac{\partial f_4(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a} + \\ + k_2 \left.\frac{\partial f_3(t,y)}{\partial y}\right|_{y=b} + k_3 f_3(t,b) + q(t,a,\,b) \end{array} \right), \\
\frac{\partial f_1(t,b)}{\partial t} = a_0 \left(\begin{array}{l} \left.\frac{\partial^2 f_4(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial^2 f_1(t,y)}{\partial y^2}\right|_{y=b} + k_1 \left.\frac{\partial f_4(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} + \\ + k_2 \left.\frac{\partial f_1(t,y)}{\partial y}\right|_{y=b} + k_3 f_1(t,b) + q(t,a,\,b) \end{array} \right).
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Для граничных условий второго рода (1.6) кроме условий (1.7), где следует формально добавить время t, имеют место согласования граничных с начальными условиями:

$$\begin{gathered} f_1(t,y)|_{t=0} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=0} \quad , \quad f_2(t,x)|_{t=0} = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} \quad , \\ f_3(t,y)|_{t=0} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=a} \quad , \quad f_4(t,x)|_{t=0} = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=b} . \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь возможны также следующие четыре условия согласования с дифференциальным уравнением в угловых точках:

$$\begin{gathered}
\Phi(t,x,y) = a_0\left[\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_1\frac{\partial F}{\partial x} + k_2\frac{\partial F}{\partial y} + k_3 F + q(t,x,y)\right], \\
\left.\frac{\partial f_1(t,y)}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ y=0}} = \left.\Phi\right|_{\substack{t=0\\ x=0\\ y=0}}, \quad \left.\frac{\partial f_2(t,x)}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ x=a}} = \left.\Phi\right|_{\substack{t=0\\ x=a\\ y=0}}, \\
\left.\frac{\partial f_3(t,y)}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ y=b}} = \left.\Phi\right|_{\substack{t=0\\ x=a\\ y=b}}, \quad \left.\frac{\partial f_4(t,x)}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ x=0}} = \left.\Phi\right|_{\substack{t=0\\ x=0\\ y=b}}.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

При задании граничных условий третьего рода кроме (1.9), (1.10) следует учитывать согласования с начальными условиями:

$$\begin{gathered}
\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_1\left(F - f_1(t,y)\right)\Big|_{\substack{t=0\\ x=0}}, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_2\left(F - f_2(t,x)\right)\Big|_{\substack{t=0\\ y=0}}, \\
\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=a} = \alpha_3\left(F - f_3(t,y)\right)\Big|_{\substack{t=0\\ x=a}}, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=b} = \alpha_4\left(F - f_4(t,x)\right)\Big|_{\substack{t=0\\ y=b}}.
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Динамическое деформирование упругой пластины

Запишем уравнение движения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) - S\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + kW - q(t,x,y) \tag{2.10}$$

с начальными условиями

$$W(t,x,y)|_{t=0} = F_1(x,y) \ , \ \ \partial W/\partial t|_{t=0} = F_2(x,y)\,. \tag{2.11}$$

Для граничных условий (1.18) кроме (1.19) должны выполняться также следующие равенства:

$$\begin{gathered}
f_1(t,y)|_{t=0} = F_1(x,y)|_{x=0}, \quad \phi_1(t,y)|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}\right|_{x=0}, \\
\left.\frac{\partial f_1}{\partial t}\right|_{t=0} = F_2(x,y)|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial \phi_1(t,y)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right|_{x=0}, \\
f_2(t,x)|_{t=0} = F_1(x,y)|_{y=0}, \quad \phi_2(t,x)|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\right|_{y=0}, \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial t}\right|_{t=0} = F_2(x,y)|_{y=0}, \quad \left.\frac{\partial \phi_2(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\right|_{y=0}, \\
f_3(t,y)|_{t=0} = F_1(x,y)|_{x=a}, \quad \phi_3(t,y)|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}\right|_{x=a}, \\
\left.\frac{\partial f_3}{\partial t}\right|_{t=0} = F_2(x,y)|_{x=a}, \quad \left.\frac{\partial \phi_3(t,y)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right|_{x=a}, \\
f_4(t,x)|_{t=0} = F_1(x,y)|_{y=b}, \quad \phi_4(t,x)|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\right|_{y=b}, \\
\left.\frac{\partial f_4}{\partial t}\right|_{t=0} = F_2(x,y)|_{y=b}, \quad \left.\frac{\partial \phi_4(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\right|_{y=b}.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Подобным образом строятся согласования начальных, граничных условий и соответственных рассматриваемой математической модели дифференциальных уравнений.

В заключение отметим, что приведение несогласованных условий к согласованному виду можно осуществить, например, при помощи введения буферной зоны, где первоначальные условия заменяются на вспомогательные.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.

[2] *Долотов, М. В.* Динамическая задача для упругого полупространства при несимметричной нормальной нагрузке его границы / М. В. Долотов, И. Д. Килль // ПММ. – 2012. – Т. 76. – Вып. 6. – С. 1003–1014.

[3] *Кулиев, С. А.* Колебания многоугольной пластинки ослабленной круглой полостью с двумя прямолинейными разрезами / С. А. Кулиев // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 6. – С. 96–115.

[4] *Чернышов, А. Д.* Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. – № 11. – С. 482–486.

[5] *Чернышов, А. Д.* Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна / А. Д. Чернышов, И. О. Павлов, Е. В. Воронова, В. В. Горяйнов // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19. – № 6. – С. 739–749.

[6] *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. –736 с.

[7] *Лыков, А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.

[8] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.

Чернышов Александр Данилович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

e-mail: chernyshovad@mail.ru

A. D. Chernyshov

ABOUT USE CONSISTENT, BOUNDARY CONDITIONS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS TO OBTAIN A SMOOTH SOLUTION OF THE MODEL WITH THERMAL PROPERTIES

Voronezh State University of Engineering Technologies

Abstract. Are examples of matching the initial conditions, boundary conditions and differential equations for the various mathematical models. Discusses the need to satisfy these conditions in the formulation of the initial-boundary value problems for subsequent decisions. Failure to comply with these conditions leads to discontinuous solutions and substantial error.
Keywords: boundary conditions, initial conditions, differential equations, thermal conductivity, elasticity.

REFERENCES

[1] *Tymoshenko, S. P.* Theory of elasticity / S. P. Tymoshenko, J. Gudyer. – M. : Nauka, 1979. – 560 p.

[2] *Dolotov, M. V.* Dynamic task for an elastic half-space at asymmetrical normal loading of its border / M. V. Dolotov, I. D. Kiel // PMM. – 2012. – Vol. 76. – Issue 6. – P. 1003–1014.

[3] *Kuliyev, S. A.* Fluctuations of a polygonal plate the weakened round cavity with two rectilinear cuts / S. A. Kuliyev // News of the Russian Academy of Sciences. MTT. – 2013. – № 6. – P. 96–115.

[4] *Chernyshov, A. D.* Temperature condition at natural convection of thermoviscous incompressible liquid in squared capacity / A. D. Chernyshov, A. N. Marchenko, V. V. Goryaynov // Thermal processes in equipment. – 2012. – Vol. 4. – № 11. – P. 482–486.

[5] *Chernyshov, A. D.* The decision by method of fast decomposition of a task about grain drying / A. D. Chernyshov, I. O. Pavlov, E. V. Voronova, V. V. Goryaynov // Thermophysics and aeromechanics. – 2012. – Vol. 19. – № 6. – P. 739–749.

[6] *Tikhonov, A. N.* Equations of mathematical physics / A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii. – M. : Nauka, 1977. –736 p.

[7] *Lykov, A. V.* Theory of heat conductivity / A. V. Lykov. – M. : High school, 1967. – 600 p.

[8] *Lurye, A. I.* Theory of elasticity / A. I. Lurye. – M. : Nauka, 1970. – 940 p.

Chernyshov, Alexander Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh